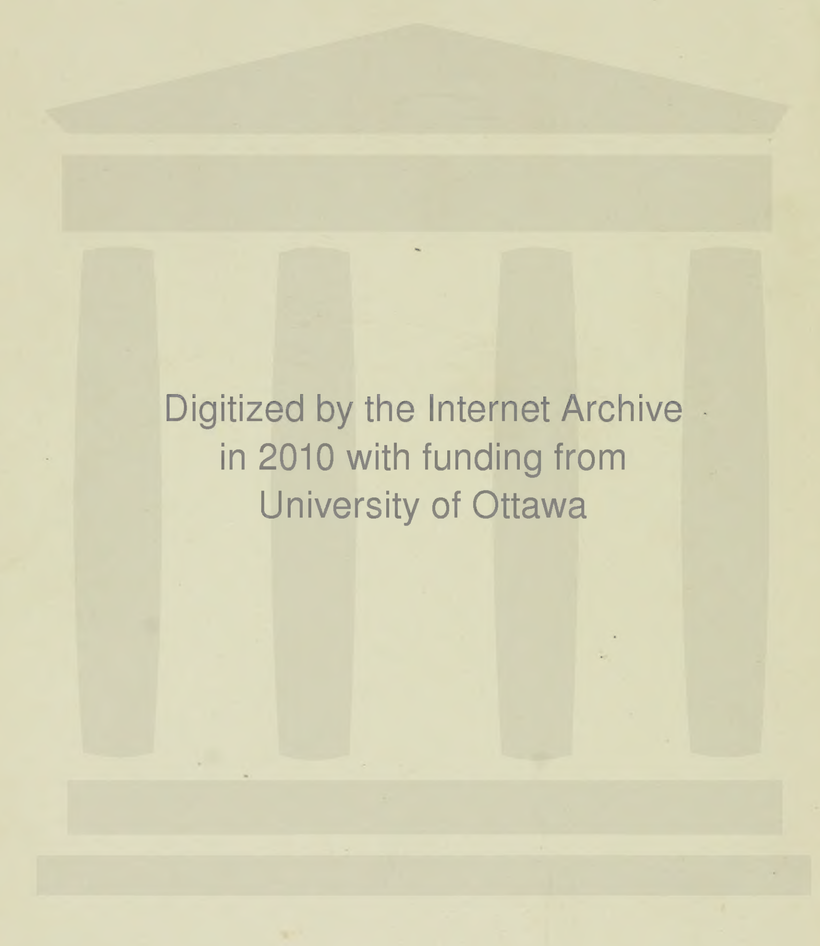


BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux,* Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

24192 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL,
GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION,
MOLK, POKROVSKY, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

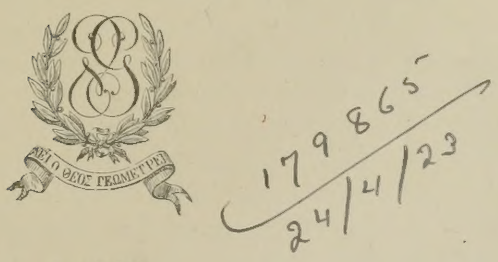
PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXI. — ANNÉE 1897.

(TOME XXXII DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55

1897

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

F. TISSERAND. — TRAITÉ DE MÉCANIQUE CÉLESTE. Tome III, p. IX-427; Tome IV, p. XXII-548; 1896.

J'ai résumé, aux Tomes XIII et XVII de ce Bulletin (2e série), le contenu des Tomes I et II du *Traité de Mécanique céleste*. Des circonstances indépendantes de ma volonté ont retardé l'analyse du Tome III consacré à la Théorie de la Lune. Je venais à peine de la terminer quand j'ai appris la mort de l'illustre astronome, dont ce Traité est le plus important Ouvrage, et c'est au moment de commencer l'analyse du Tome IV que j'ai dû laisser la plume pour me rendre à ses funérailles. D'autres ont dit avec autorité ce qu'a fait perdre à l'Astronomie et à la France cette mort soudaine. Hommage a été rendu au savant et au professeur éminent, au travailleur acharné, à l'administrateur habile, au directeur respecté, à l'ami sûr et constant, à l'homme simple, loyal et bon. L'expression de l'admiration profonde d'un des plus humbles amis de Tisserand n'ajouterait rien à ce que chacun sait et pense. On me pardonnera cependant de n'avoir pu commencer ce dernier article sans laisser échapper, en face de ce deuil subit, un cri de tristesse et de douleur.

Le Tome III et neuf Chapitres du Tome IV du *Traité de Mécanique céleste* sont consacrés aux théories des satellites. Le plus intéressant pour nous, la Lune, a provoqué depuis Newton de nombreux et immenses travaux. Il offre l'application la plus importante du problème des trois corps ; l'ellipse de Képler ne peut y être regardée comme une approximation suffisante, même pour une seule révolution. La Terre étant placée au centre des mouvements, la comparaison de la théorie aux observations peut être faite avec la plus grande précision, ce qui n'a pas lieu pour les satellites des planètes supérieures dont les orbites sont vues raccourcies dans une énorme proportion.

La Théorie de la Lune a offert aux géomètres contemporains l'occasion d'appliquer certains résultats de la théorie des équations différentielles. Les Chapitres I et II du Tome III sont consacrés à l'équation $\frac{d^2x}{dt^2} + x(q^2 + 2q_1\cos 2t) = 0$, que Tisserand appelle *équation de Gyldén-Lindstedt*, à l'équation plus générale $\frac{d^2x}{dt^2} + x\Sigma q_i \cos 2it = 0$, dont l'intégrale peut être exprimée par une série périodique convergente, à la même équation pourvue d'un second membre somme de termes de la forme $A_i \cos(l_i t + b_i)$ et à la généralisation, étudiée par Hill et Poincaré, de l'équation sans second membre où l'on suppose que i augmente indéfiniment.

Les travaux de Newton sur la Théorie de la Lune offrent, au point de vue de l'histoire de la Science, le plus haut intérêt. Les démonstrations même de Newton doivent être lues dans le 11e Livre des *Principes*. Les idées que Newton y met en jeu ont été développées depuis par Herschel, Airy, Lagrange, Lespiault, Möbius. Tisserand reproduit seulement la construction de Newton pour la décomposition de la force perturbatrice. Il montre que les corollaires de la proposition 46 des *Principes* reviennent à la démonstration de plusieurs des relations qui existent entre les dérivées des éléments du mouvement elliptique et les composantes de la force perturbatrice suivant le rayon vecteur, sa perpendiculaire dans le plan de l'orbite et la normale à ce plan. Tisserand incline à penser que Newton connaissait toutes ces relations, mais que, au lieu de les publier, il a préféré en tirer un

grand nombre de propositions géométriques, en ne considérant chaque fois que l'effet de l'une des composantes.

C'est Clairaut qui, le premier, a donné une théorie systématique du mouvement de la Lune, et la marche qu'il a suivie a été adoptée plus tard par Laplace, Damoiseau et Plana. Les équations initiales expriment l'inverse du rayon vecteur et le temps en fonction de la longitude vraie. Tisserand les déduit des équations (α'') de la page 91 du Tome I. Clairaut n'a donné que les valeurs numériques des coefficients et, tout d'abord, avait négligé l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique. Plus tard, il tint compte de cette inclinaison et de l'excentricité de l'orbite du Soleil.

D'Alembert donne une théorie tout à fait analogue à celle de Clairaut, plus approfondie. Il donne l'expression algébrique du second terme du mouvement du périgée. Il rencontre, dans ses Opuscules, l'équation de Gyldén-Lindstedt et montre que les coordonnées de la Lune sont, après le calcul des perturbations, exprimées en séries de sinus et cosinus de multiples des quatre arguments $v - v'$, $cv - \varpi$, $gv - \theta$, $v' - \varpi'$.

En 1753 a été publiée la première Théorie d'Euler, et en 1772 la seconde. Euler prend pour variable indépendante l'anomalie moyenne du Soleil. La marche est analytique. Euler suppose ses inconnues développées suivant les puissances des excentricités, de l'inclinaison et du demi grand axe. Il est conduit à 31 équations différentielles qu'il intègre par approximations successives. Tisserand montre que la méthode d'Euler introduirait l'anomalie du Soleil en dehors des signes trigonométriques. Il faut en retenir l'idée de séparer les inégalités en divers ordres, puis de calculer celles du 1er ordre, celles du 2e, etc.

Le Chapitre VII résume les théories de Laplace, Damoiseau et Plana. « La Théorie de Laplace, dit l'auteur, peut être considérée comme le développement de celle de Clairaut et d'Alembert; mais la méthode est singulièrement perfectionnée. Les calculs s'enchaînent d'une façon systématique : toutes les inégalités du 2e et du 3e ordre sont obtenues, et quelques-unes du 4e; les Tables qui résument la théorie représentent les théories de la Lune à moins d'une demi-minute d'arc près. »

Laplace tient compte dès le début des mouvements du périgée et des nœuds. Il admet que les variations de l'inverse du rayon vec-

teur et de la tangente de la latitude peuvent s'exprimer en sinus et cosinus de fonctions linéaires de quatre arguments $2v - 2mv$, $cv - \varpi$, $c'mv - \varpi'$, $gv - \theta$, où m est le rapport du moyen mouvement du Soleil à celui de la Lune, g le mouvement du nœud, c et c' ceux des périgées lunaire et solaire. Le calcul du temps lui donne une de ses plus belles découvertes, l'inégalité séculaire du moyen mouvement.

A la fin du Chapitre, Tisserand compare les coefficients des théories de Damoiseau, Plana, Pontécoulant, Hansen et Delaunay.

Le Chapitre IX est tout d'actualité et renferme l'exposé des perfectionnements apportés à la Théorie de la Lune. C'est M. Gyldén qui a donné le signal en conservant, dès la première approximation, dans les équations différentielles, les termes les plus importants. M. Gyldén les intègre alors en les ramenant au type nommé par Tisserand *équation de Gyldén-Lindstedt*. L'intégration complète se fait par les fonctions elliptiques. Tisserand parvient, sans employer ces fonctions, par une méthode très simple qu'il a exposée d'abord dans les *Annales de Toulouse,* à une solution approchée qui donne, avec une précision très satisfaisante, les mouvements du périgée et des nœuds, l'équation du centre, la réduction à l'écliptique, l'évection, la variation, l'équation annuelle. S'aidant d'un Mémoire d'Adams, il calcule, en terminant, l'influence de l'inégalité séculaire de l'écliptique sur la latitude de la Lune.

Au Chapitre IX, Tisserand expose la marche suivie par Poisson, qui a appliqué à la Lune la méthode de la variation des constantes arbitraires en supposant, dès la première approximation, que les longitudes du nœud, du périgée et de l'époque varient proportionnellement au temps. Tisserand montre que cette méthode ne serait pas applicable à une théorie complète, mais peut être précieuse pour le calcul d'inégalités à longue période; il l'applique à la recherche de l'inégalité séculaire et de l'influence de l'aplatissement de la Terre. Il calcule aussi, d'après Puiseux, les inégalités séculaires de l'excentricité et de l'inclinaison et, d'après M. Radau, l'influence du déplacement de l'écliptique.

Les théories de Lubbock et de Pontécoulant (Chap. X) sont fondées sur les mêmes principes; elles introduisent l'anomalie moyenne et non plus l'anomalie vraie. La première approximation

y revient à représenter le mouvement par une ellipse mobile tournant uniformément dans son plan, ce plan tournant lui-même autour de l'axe de l'écliptique. Tisserand s'étend surtout sur le travail de Pontécoulant, plus complet que celui de Lubbock, et trouve que la méthode serait beaucoup plus rapide que celle de la variation des constantes arbitraires.

Delaunay (Chap. XI et XII) a appliqué la variation des constantes arbitraires en remplaçant les constantes ordinaires par un système canonique. Il introduit les coordonnées du Soleil rapportées au centre de gravité de la Terre et de la Lune. Dans le développement en série, il emploie l'anomalie moyenne de la Lune. Le fond même de sa méthode consiste en ceci : « Si l'on réduit la force perturbatrice R à sa partie non périodique et à un seul terme périodique, les équations dont dépendent les dérivées des éléments peuvent être intégrées rigoureusement. Si, après avoir effectué les intégrations, on regarde comme de nouvelles variables les constantes arbitraires introduites, ces nouvelles variables dépendent d'équations de même forme que les premières. On est donc ramené à une question pareille, mais dans laquelle on a extrait un terme de la fonction perturbatrice. »

Tisserand fait l'intégration, comme il l'a indiqué dans sa Thèse de doctorat, par la méthode de Jacobi. Il montre quel changement il faut faire subir aux constantes pour qu'elles forment encore un système canonique. Outre sa propre méthode, il expose, à ce sujet, celle qu'a donnée M. Radau au Tome IX du *Bulletin astronomique*.

En faisant disparaître un terme, on en peut introduire d'autres, et même retrouver un terme de même argument qu'un terme supprimé, mais d'ordre plus élevé. Tisserand expose les deux premières opérations. Delaunay en a fait cinquante-sept, suivies d'une opération abrégée pour faire disparaître les termes restants. Les coefficients ayant été développés suivant les puissances de m, quelques-uns, notamment celui du périgée, ne sont pas suffisamment exacts. Delaunay a donné, par extrapolation, à plusieurs de ces termes des compléments probables. Airy, dans un travail qui n'a pas duré moins de dix ans, a essayé de déterminer ces compléments en les regardant comme des inconnues de façon à satisfaire

aux équations du mouvement de la Lune. Mais cette tentative n'a pas eu un complet succès.

« Aujourd'hui, dit Tisserand, la théorie de Delaunay est incontestablement la plus complète. Celle de Hansen lui est équivalente en précision, mais elle ne donne pas les expressions analytiques des coefficients : elle n'en donne que les valeurs numériques. »

Après avoir rappelé les comparaisons des deux théories par Newcomb et Wilding, qui ont trouvé un accord très satisfaisant, Tisserand termine en indiquant, d'après M. Poincaré, le moyen d'introduire des éléments canoniques susceptibles de servir à la fois à l'intégration et au développement de la fonction perturbatrice.

Les Chapitres XIII à XVI se rapportent à des points particuliers de la théorie et, tout d'abord, à l'accélération séculaire découverte par Halley, en 1693, et dont Laplace, qui en avait trouvé la valeur, et après lui Plana et Damoiseau, avait fixé à 10″ le coefficient : c'est le coefficient du carré du temps dans l'expression de la longitude en siècles juliens. Tisserand indique les travaux d'Adams, qui diminua de 1″,66 ce coefficient, et reproduit le calcul de Delaunay qui le ramena à 6″,11, valeur théoriquement certaine, en tant que provenant de la cause indiquée par Laplace, l'inégalité séculaire de l'excentricité du Soleil, mais qu'il est impossible de faire concorder avec les anciennes observations d'éclipses. Les travaux de M. Hill sur la variation et sur les inégalités qui dépendent de la première puissance de l'excentricité font l'objet des Chapitres XIV et XV. On y trouve l'emploi de l'équation de Lindstedt généralisée. Il est à signaler que M. Hill a obtenu le mouvement du périgée avec treize décimales exactes. C'est en partant d'une des équations de M. Hill qu'Adams a trouvé les inégalités qui ont en facteur l'inclinaison, et obtenu le mouvement du nœud avec quinze décimales exactes. Tisserand expose ce travail dans le Chapitre XVI et démontre les théorèmes remarquables d'Adams sur la forme des termes non périodiques du développement de l'inverse du rayon vecteur, théorèmes qui rattachent à ces termes les développements de c et de g.

L'exposé de la formule de Hansen forme le Chapitre XVII. Hansen part des équations (a) employées par Tisserand dans

l'étude des travaux de Newton. Il compte la longitude du périgée à partir d'un point variable de l'orbite, fait tourner uniformément dans le plan de l'orbite une ellipse dont la vitesse de rotation correspond au mouvement séculaire du périgée, fait coïncider les longitudes dans l'ellipse auxiliaire et dans l'orbite vraie, introduit le rapport $1 + \nu$ des rayons vecteurs correspondants, remplace les longitudes du nœud dans l'écliptique et dans l'orbite par d'autres variables, de façon à tenir compte du mouvement du nœud. Dans le développement de la fonction perturbatrice, il n'emploie pas la méthode des coefficients indéterminés, mais celle des approximations successives. Tisserand explique avec détails ce qui concerne le développement et le mode d'intégration. Après l'exposé de la théorie, il se borne à indiquer certaines questions particulières traitées dans la *Darlegung*...; puis il insiste sur la comparaison faite par Newcomb des Tables de Hansen et de Delaunay.

Le Chapitre XVIII, fondé sur des travaux de M. Hill et de M. Radau, se rapporte aux inégalités de la Lune dues à l'action des planètes.

Le dernier Chapitre (XIX) du Tome III contient un examen minutieux et remarquablement clair de l'état actuel de la théorie. Il concerne surtout la comparaison des Tables de Hansen aux observations. Newcomb a montré que ces Tables concordent assez bien avec les observations de 1750 à 1850, mais s'en écartent notablement avant 1750 et après 1850. Les écarts varient de 50″ à 7″ de 1625 à 1725, et atteignent — 8″ en 1875. Tisserand estime que la cause ne se trouve pas dans les inégalités solaires de la Lune. Une modification de l'inégalité séculaire ne peut établir la concordance entre les observations modernes et les anciennes. Tisserand reproduit les tentatives faites par Newcomb pour représenter les différences par une formule empirique et propose lui-même la suivante

$$-0'',12 - 31'',80\,t - 6'',00\,t^2 - V_2 + 14'',54 \sin(132^\circ t + 85^\circ,54'),$$

où V_2 est une inégalité introduite empiriquement par Hansen, et où le temps t est compté en siècles à partir de 1800. Il est impossible de démêler la cause du dernier terme introduit. « Il reste, dit l'auteur en terminant, à faire une belle découverte. »

Les cinq premiers Chapitres du Tome IV renferment la théorie

des quatre satellites anciens de Jupiter, le cinquième ayant une masse trop faible et étant trop près de la planète pour troubler les autres ou être troublé par eux. Cette théorie est une des parties les plus remarquables de l'Ouvrage de Laplace, mais aussi une de celles dont la lecture offre le plus de difficultés. L'exposition lumineuse de Tisserand rendra les plus grands services aux astronomes. Il adopte dès le début, à l'exemple de M. Souillart, la méthode de la variation des constantes arbitraires et détermine successivement les diverses sortes d'inégalités. En particulier, la recherche des compléments apportés par M. Souillart aux inégalités périodiques est faite par un procédé simple et rapide que M. Souillart, à qui Tisserand l'avait communiqué, a trouvé applicable à d'autres termes encore. Les coefficients trouvés par Tisserand ne diffèrent pas de plus de 2″ de ceux de M. Souillart, dont l'un diffère de plus de 123″ du coefficient correspondant de Laplace. Tisserand signale l'intérêt qu'offrent encore les mesures micrométriques, soit pour la détermination de la masse de Jupiter, soit pour le quatrième satellite, dont les éclipses sont rares. Il étudie la figure de l'ombre de Jupiter, en partant de ce théorème de Chasles que la développable circonscrite à deux ellipsoïdes est du huitième ordre et se basant sur la Thèse de M. Saint-Germain, et rappelle les travaux analogues de Asaph Hall et Souillart. Il insiste sur la détermination des constantes des quatre satellites et sur l'importance qu'aurait une discussion complète des observations, celle de Delambre ayant été perdue.

La théorie des satellites de Saturne, très imparfaite à l'époque de Laplace, à cause de l'insuffisance des observations, a fait, dans le siècle actuel, d'importants progrès grâce aux observations faites à Washington, Poulkovo, Toulouse, etc. En formant les équations différentielles du mouvement de l'un d'entre eux, Tisserand tient compte de l'aplatissement de Saturne, de l'action de l'anneau, de celle du Soleil et des attractions des autres satellites. Il ne conserve, dans la fonction perturbatrice, que les parties séculaires et néglige les carrés des excentricités. Dans l'application à Japet, la variation des constantes arbitraires donne les perturbations du nœud et des inclinaisons. Tisserand, d'après un de ses Mémoires de Toulouse, prouve, sans intégration, que le pôle de l'orbite décrit une ellipse sphérique. Le mouvement, sur cette

ellipse, s'exprime par des fonctions elliptiques que Tisserand développe en séries : le nœud a une précession et une nutation. La comparaison des observations de Japet a donné à H. Struve une relation entre les masses des satellites et une constante dépendant de la constitution de Saturne : le mouvement du périsaturne de Titan en a donné une autre. En regardant la masse de Titan comme prépondérante, H. Struve la trouve égale à $\frac{1}{4700}$; il trouve celle de l'anneau égale à $\frac{1}{1000}$, celle de Saturne étant prise pour unité. Tisserand remarque qu'il ne faut pas compter absolument sur ces nombres. Le mouvement d'Hypérion est particulièrement intéressant à cause de sa proximité de Titan dont le moyen mouvement est les $\frac{4}{3}$ de celui d'Hypérion. A la suite de la découverte, par Asaph Hall, d'un mouvement rétrograde (une révolution en dix-huit ans) du périsaturne d'Hypérion, Newcomb a donné de ce satellite une théorie fondée essentiellement sur ce que $4n' - 3n$ diffère peu du mouvement annuel du périsaturne, de sorte que les conjonctions ont toujours lieu dans le voisinage du périsaturne d'Hypérion. Tisserand expose d'autres travaux de Hill et Stone sur ce même satellite et exprime le vœu que la théorie en soit encore reprise. Au Chapitre VIII, il donne un théorème remarquable de Newcomb, relatif à deux orbites primitivement circulaires, où le mouvement du point de conjonction serait faible par rapport à celui des satellites; puis il analyse les travaux de H. Struve sur Mimas et Téthys d'une part, Encelade et Dione d'autre part.

Les satellites de Neptune, de Mars et d'Uranus font l'objet du Chapitre IX. Tisserand reproduit l'explication qu'il a donnée du mouvement direct du nœud et de la diminution de l'inclinaison de l'orbite du premier, variations qui sont dues à l'aplatissement de Neptune, aplatissement trop faible d'ailleurs pour être mesuré. Avec Adams, il a prouvé que les orbites des deux satellites de Mars s'écarteront toujours très peu de l'équateur de la planète. Il signale enfin l'intérêt qu'offrirait la détermination du périurane d'Ariel, périurane dont le mouvement nous renseignerait sur l'aplatissement d'Uranus.

Le reste du Tome IV est consacré aux méthodes modernes employées pour la détermination des orbites des planètes et des comètes. Dans les Chapitres X et XI, l'auteur expose les théories

de l'interpolation, fondées soit sur l'algorithme des différences, soit sur les développements en séries trigonométriques. A propos de cette dernière méthode, il explique le procédé ingénieux imaginé par Le Verrier pour augmenter le nombre des points de division de la circonférence, sans avoir à recommencer tous les calculs. Il expose aussi le parti que Le Verrier a tiré de l'interpolation dans la théorie de Saturne. A propos de l'algorithme des différences, il donne les formules pour le calcul des intégrales simples et doubles. Pour le calcul numérique des perturbations, la méthode expliquée est celle de la variation des constantes arbitraires.

Le calcul numérique des perturbations des comètes devient très difficile quand ces astres s'approchent beaucoup de la planète perturbatrice. Le procédé indiqué par d'Alembert dans ses Opuscules mathématiques et développé par Laplace et par Le Verrier est fondé sur la considération de la surface presque sphérique qui sépare la région où il est avantageux de regarder le mouvement héliocentrique comme troublé par la planète de celle où il vaut mieux regarder le mouvement planétocentrique comme troublé par le Soleil. Tisserand a fondé sur l'intégrale de Jacobi, en négligeant l'exentricité de Jupiter, un criterium permettant de reconnaître *a priori* si deux systèmes d'éléments peuvent correspondre à une même comète troublée par Jupiter. M. Callandreau a montré comment, dans l'application de ce criterium, on peut tenir compte de la première puissance de l'excentricité de la planète. Le Chapitre XII, qui renferme ces beaux travaux, se termine par l'exposé des importantes recherches de Tisserand sur la capture des comètes paraboliques par Jupiter et l'indication du principe d'un Mémoire de M. A. Newton sur le même sujet.

Le mouvement des comètes, notamment de la comète d'Encke, fait encore l'objet du Chapitre XIII. L'observation a révélé une accélération du moyen mouvement de cette comète que l'on a cru longtemps ne pouvoir attribuer qu'à l'action, variable d'ailleurs, d'un milieu résistant. Tisserand attire l'attention sur les modifications constatées dans la forme et la grandeur du noyau, qui pourraient peut-être expliquer la variation de la résistance. Le Chapitre se termine par l'étude des effets que produirait un

milieu résistant répandu dans tout l'espace, dans lequel se déplacerait le système solaire tout entier.

Les 44 pages des Chapitres XIV, XV, XVI sont consacrées à la figure des atmosphères du Soleil et des planètes, à la démonstration de ce fait que la première ne s'étend pas à la moitié de la distance de Mercure au Soleil et ne se confond pas avec la lumière zodiacale, à un résumé du système cosmogonique de Laplace, aux recherches de Roche, Schiaparelli, Bessel, Bredichin, Charlier et Luc Picart sur la forme des queues de comètes.

Tisserand revient ensuite au calcul des perturbations par l'exposé de la méthode de Cauchy pour le calcul des inégalités à longue période provenant des termes où figurent des multiples élevés des anomalies moyennes. On sait que Cauchy imagina cette méthode pour vérifier la valeur, obtenue par interpolation par Le Verrier, de la grande inégalité de Pallas. M. Callandreau a montré que la série de Legendre, sur laquelle la méthode est fondée, représentant le coefficient de z^n dans le développement de $(1-\alpha z)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\alpha}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}$, convergente si $2\alpha^2$ est moindre que 1, est semi-convergente et numériquement utilisable dans le cas contraire.

Le Chapitre XVIII donne la substance d'un Mémoire de Jacobi fondé sur l'expression du carré de la distance de la planète troublée et de la planète perturbatrice en fonction des anomalies excentriques, la séparation de cette expression en deux parties dont l'une est du second ordre, et la décomposition en facteurs de la partie principale. Tisserand démontre ce théorème de Jacobi que les coefficients du développement de l'inverse de la distance, suivant les sinus et cosinus de l'anomalie excentrique, peuvent s'exprimer au moyen de quinze d'entre eux.

L'emploi des anomalies excentriques est encore la base du développement analytique de la fonction perturbatrice donné par Newcomb. Ce développement converge plus vite que celui de Le Verrier, parce que le premier coefficient de l'expression de l'anomalie vraie en fonction de l'anomalie excentrique est e, tandis qu'il est $2e$ quand on introduit l'anomalie moyenne. L'emploi des fonctions de Bessel permet de substituer finalement les anomalies moyennes aux anomalies excentriques.

Les méthodes de Hansen et de Gyldén pour le calcul des perturbations des petites planètes sont exposées dans les Chapitres XX à XXIV. La première repose encore sur l'introduction des anomalies excentriques. Gyldén emploie les anomalies vraies. Hansen utilise la méthode des quadratures pour tenir compte de toutes les puissances des excentricités de la planète troublée, et fonde sa théorie sur les mêmes principes que sa Théorie de la Lune. L'exposé rapide (p. 323 à 375) qu'en donne Tisserand rendra les plus grands services aux astronomes. Il est d'ailleurs limité aux perturbations du premier ordre. A la fin, Tisserand signale l'application à Jupiter et à Saturne, faite par Hill, de la méthode de Hansen, en tenant compte des termes du second et du troisième ordre par rapport aux masses.

Gyldén, comme Clairaut, d'Alembert, Laplace, Damoiseau l'ont fait pour la Lune, prend pour variable indépendante l'anomalie vraie. Il cherche surtout à éviter les termes qui renfermeraient le temps en dehors des signes trigonométriques et, à cet effet, il représente les inégalités séculaires des planètes perturbatrices, non par des séries ordonnées suivant les puissances du temps, mais par les termes périodiques que donne l'intégration des équations des inégalités séculaires des planètes principales, termes dont les périodes dépassent 50000 ans. Les orbites ainsi obtenues sont appelées par Gyldén *orbites absolues,* parce qu'elles doivent servir, en quelque sorte, indéfiniment, et donnent des positions qui ne différeront des positions vraies que par de petits termes à courte période. Cette méthode paraît appelée à rendre de grands services en présence du nombre très grand des astéroïdes. Cependant, la démonstration, par M. Poincaré, que les séries ne sont pas absolument convergentes vient en diminuer quelque peu sinon l'intérêt pratique, du moins la portée absolue. Tisserand analyse divers travaux, en particulier un Mémoire de M. Brendel sur la planète Hestia; en présence des coefficients énormes (plus de 20°) des termes périodiques qui correspondent aux inégalités séculaires, il estime qu'il vaudrait peut-être mieux développer ces termes suivant les puissances du temps; il suffirait généralement de se borner à la première puissance, de sorte que ces termes n'ont pas d'autre effet actuel que de modifier la longitude moyenne de l'époque et la valeur du moyen mouve-

ment. Gyldén annonçait dans la Préface du *Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales* l'intention d'appliquer effectivement sa méthode aux astres principaux du système solaire. Pourquoi faut-il qu'une mort prématurée, survenue quelques jours après celle de Tisserand, laisse inachevée une des œuvres les plus importantes de l'Astronomie mathématique.

La méthode de Gyldén paraît surtout avantageuse dans le cas où il y a un rapport presque commensurable entre le moyen mouvement de la planète troublée et celui de la planète perturbatrice. Tisserand consacre à l'étude de ce cas le Chapitre XXV. Kirkwood a attiré, dès 1866, l'attention des astronomes sur les lacunes que présente l'anneau des astéroïdes dans les régions où leur moyen mouvement serait double ou triple de celui de Jupiter. Tisserand étudie d'abord, par une méthode empruntée en partie à Laplace, ce qui arriverait à une planète qui satisferait à cette condition; puis il développe une méthode qu'il a indiquée au tome CIV des *Comptes rendus*, et où il applique la méthode d'intégration de Delaunay, en introduisant des fonctions elliptiques. Dans l'un des cas il trouve un exemple des solutions asymptotiques de M. Poincaré.

Le Chapitre XXVI est encore entièrement l'œuvre de Tisserand; il se rapporte à la forme générale des développements des coordonnées dans le problème des trois corps; l'auteur, par une analyse qui a sa base dans le Mémoire de Jacobi sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps, et en s'appuyant sur un important Mémoire de M. Radau, parvient au célèbre théorème de Lindstedt : « *Dans le problème des trois corps, les distances mutuelles de ces corps s'expriment, en général, sous forme de séries périodiques; sous les signes* sin *et* cos, *il n'entre que des multiples entiers, positifs ou négatifs de quatre arguments qui varient chacun proportionnellement au temps,* » et à cet autre théorème : « *Par rapport à certains axes mobiles situés dans le plan invariable et animés d'un mouvement de rotation uniforme, et par rapport à l'axe du plan invariable, les coordonnées des deux astres sont des fonctions périodiques des mêmes arguments.* »

Au Chapitre XXVII, Tisserand, après avoir reproduit l'analyse

écrite par M. Poincaré de son Mémoire couronné par le roi de Suède en 1891, renonçant à donner, en peu de pages, une idée des travaux contenus dans les deux Volumes publiés par M. Poincaré sous le titre : *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste,* présente des indications assez complètes sur les solutions périodiques.

Le Chapitre XXVIII contient l'exposé des tentatives faites par Laplace et, en 1884, par M. Lehmann Filhès pour tenir compte de la vitesse de propagation de l'attraction et chercher à la mettre en évidence et de celles qui ont eu pour objet l'introduction des diverses lois électrodynamiques données par Weber, par Riemann, par Gauss, par Clausius, introduction qui avait fait, dès 1872, l'objet des recherches de Tisserand.

L'Ouvrage se termine par un beau Chapitre intitulé : *Confrontation de la loi de Newton avec les observations : Le Verrier et Newcomb.* L'auteur rapporte d'abord la discussion par Le Verrier de 8911 observations du Soleil et celle des passages de Mercure qui révèlent, dans le périhélie de cet astre, un excès de déplacement de 38″ par siècle, que Le Verrier a essayé d'expliquer par la présence d'une planète intramercurielle dont l'existence est aujourd'hui bien improbable. D'autre part, les théories de Mars et de Vénus ont conduit Le Verrier à la pensée qu'il faudrait augmenter d'environ $\frac{1}{10}$ la valeur qu'il avait adoptée pour la masse de la Terre ; cette masse était, en effet, inexacte, et l'erreur venait de la valeur de la parallaxe (8″, 58) déduite par Encke des passages de Vénus observés au XVIIIe siècle, la parallaxe et la masse de la Terre étant liées par la relation $\pi = 609'', 49 \sqrt[3]{m''}$. En employant des valeurs exactes, Newcomb a réussi à faire concorder presque entièrement la théorie de Mars avec les observations. La théorie de Jupiter de Le Verrier représente les observations à 1″ près, celle de Saturne à 5″. M. Hill a réduit à 3″ les écarts de cette dernière ; mais ils conservent un caractère systématique. Newcomb, par une discussion dont les résultats sont rassemblés dans l'Ouvrage intitulé : *The Elements of the four inner Planets, and the fundamental constants of Astronomy* (1895), montre qu'il ne reste d'écart notable que pour le périhélie de Mercure, le nœud de Vénus et le périhélie de Mars, ces deux derniers étant d'ailleurs très faibles. Tisserand passe en revue les

diverses hypothèses faites pour expliquer ces écarts et termine ainsi : « La loi de Newton représente en somme, avec une très grande précision, les mouvements de translation de tous les corps célestes.... Sans doute, il reste quelque chose : en deux siècles et demi la Lune s'écarte peu à peu de la position calculée jusqu'à un maximum de 15″...; les positions des planètes sont représentées à moins de 2″ près : il y a une exception, Mercure peut être en avance ou en retard d'une quantité qui peut s'élever à 8″.

» On éprouve, en fin de compte, un sentiment d'admiration profonde pour le génie de Newton et de ses successeurs, pour les immenses travaux de Le Verrier poursuivant, pendant plus de trente ans, son enquête méthodique dans toute l'étendue du système planétaire, travaux si habilement continués et développés par M. Newcomb. »

C'est aussi l'impression que laisse la lecture du *Traité de Mécanique céleste*, couronnement d'une existence brusquement interrompue à 51 ans, après trente années de brillants travaux; parvenu au terme de l'Ouvrage, le lecteur ne sait s'il doit plus admirer la variété et la profondeur des recherches propres à l'auteur, ou l'art merveilleux avec lequel il rend claires les théories réputées les plus difficiles. B. BAILLAUD.

E. GOURSAT. — LEÇONS SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE A DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES. Tome I : *Problème de Cauchy. — Caractéristiques. — Intégrales intermédiaires.* 1 vol. in-8°, VIII-226 p. Paris, Hermann, 1896.

Les Leçons que M. Goursat a publiées en 1891 (1) renferment, d'une manière très complète, les résultats actuellement acquis à l'égard de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Cette remarquable exposition, où, à une parfaite rigueur, se joignent une grande clarté et une élégance toute par-

(1) E. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des equations aux dérivées partielles du premier ordre*, rédigées par *C. Bourlet*. 1 vol. in-8°, 354 p. Paris, Hermann, 1891. Voir *Bulletin*, XV, p. 5-10.

ticulière, faisait vivement souhaiter la publication d'un Ouvrage analogue sur les équations du second ordre; mais il n'était pas sans difficulté de présenter, sous une forme didactique aussi heureuse, les travaux de Monge et d'Ampère, et les beaux résultats obtenus depuis par MM. Darboux, Lie et Bäcklund. M. Goursat y a pleinement réussi dans le nouveau Livre dont il vient de faire paraître la première Partie.

Cette première Partie renferme quatre Chapitres. Les trois premiers sont relatifs aux méthodes de Monge et d'Ampère; le quatrième, constitué pour la plus grande part par les recherches de M. Bäcklund et de M. Goursat, contient la théorie des caractéristiques et celle des intégrales intermédiaires pour des équations du second ordre de forme quelconque.

L'intégrale générale d'une équation linéaire du premier ordre s'obtient en prenant une suite, simplement infinie, de courbes d'une congruence; celle d'une équation non linéaire s'obtient en prenant l'enveloppe d'une suite, simplement infinie, de surfaces qui dépendent de deux paramètres. En considérant des courbes ou des surfaces dépendant de trois paramètres, on est conduit à des équations aux dérivées partielles, du second ordre, *particulières,* dont la théorie, qui offre la plus grande analogie avec celle des équations du premier ordre, forme le commencement du Chapitre I.

Si l'on considère d'abord un complexe de courbes C, toutes ses surfaces satisfont à une même équation aux dérivées partielles du second ordre, qui est de la forme

$$(1) \qquad L^2 r + 2LMs + M^2 t + N = 0,$$

ou qui se décompose en équations de cette forme, L, M, N désignant des fonctions de x, y, z, p, q qui satisfont à certaines conditions. Toutes les intégrales de l'équation (1) ainsi obtenue sont des surfaces du complexe ou des intégrales de l'équation du premier ordre qui admet les courbes C pour courbes intégrales, et qui est dite une intégrale singulière du premier ordre; il peut arriver que ce soit cette intégrale singulière qui donne la véritable solution d'un problème conduisant à l'équation considérée de la forme (1).

Si l'on considère maintenant un complexe de surfaces, les en-

veloppes d'une suite, simplement infinie, de surfaces de ce complexe, satisfont à une même équation aux dérivées partielles du second ordre qui est de la forme

$$(2) \qquad \mathrm{H}r + 2\mathrm{K}s - \mathrm{L}t + \mathrm{M} + \mathrm{N}(rt - s^2) = 0.$$

ou qui se décompose en équations de cette forme, H, K, L, M, N désignant des fonctions de x, y, z, p, q, qui satisfont à certaines conditions. Toutes les intégrales de l'équation (2) ainsi obtenue sont des surfaces enveloppes d'une suite, simplement infinie, de surfaces du complexe, ou des intégrales d'une équation du premier ordre qui est dite une intégrale singulière du premier ordre.

Les équations aux dérivées partielles du second ordre dont il vient d'être question, ne forment qu'une catégorie particulière parmi les équations linéaires en r, s, t, $rt - s^2$; elles peuvent toutes se ramener, par une transformation de contact convenable, à une forme canonique simple, $rt - s^2 = 0$, par exemple.

Pour chacune des équations précédentes, il existe un ou plusieurs systèmes de formules représentant toutes les intégrales; mais rien ne prouve, *a priori*, qu'il en soit de même pour une équation quelconque du second ordre. Afin de donner un sens précis à l'expression d'*intégrale générale*, M. Goursat adopte la définition que M. Darboux a déduite des travaux de Cauchy : une intégrale est générale si l'on peut disposer des arbitraires qui y figurent, de manière à retrouver les solutions dont le théorème de Cauchy démontre l'existence; les intégrales singulières sont celles qui échappent au théorème de Cauchy. Ces définitions concordent avec celles données pour les équations considérées au début du Chapitre.

Dans le cours de son Ouvrage, M. Goursat aura surtout en vue la recherche des intégrales d'une équation du second ordre, dont le théorème de Cauchy démontre l'existence, et la question sera considérée comme résolue, toutes les fois qu'on aura réussi a en ramener la solution à l'intégration d'un ou de plusieurs systèmes d'équations différentielles ordinaires.

On dit souvent que l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes dépend de deux fonctions arbitraires d'une variable; après avoir montré, sur un exemple classique bien connu, que

cette expression ne doit pas être prise à la lettre, M. Goursat termine ce premier Chapitre par quelques remarques sur la méthode de la variation des constantes arbitraires.

Le Chapitre II est relatif aux équations du second ordre (2), linéaires en r, s, t, $rt - s^2$. L'étude du problème de Cauchy, pour ces équations, conduit immédiatement à la notion fondamentale, qui est la base des travaux de Monge et d'Ampère, celle des multiplicités caractéristiques, c'est-à-dire des multiplicités M_1 pour lesquelles l'équation (2) et les équations

$$(3) \qquad dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy,$$

considérées comme déterminant trois inconnues r, s, t, se réduisent à deux équations distinctes.

Toute équation de la forme (2) admet, en général, deux systèmes de multiplicités caractéristiques dont le rôle capital dans la théorie de cette équation, tient à ce que la multiplicité M_2, formée par une surface intégrale et l'ensemble de ses plans tangents, peut être considérée comme un lieu de multiplicités caractéristiques, et inversement. Après avoir indiqué comment on forme les équations qui définissent les deux systèmes de multiplicités caractéristiques, M. Goursat, en suivant la voie ouverte par M. Lie pour les équations du premier ordre, montre que l'on peut utilement élargir la définition ordinaire de l'intégrale. Dans cette nouvelle définition, l'équation du second ordre elle-même ne joue qu'un rôle secondaire; ce qu'il y a d'essentiel à considérer, ce sont les équations linéaires en dx, dy, dp, dq qui définissent les multiplicités caractéristiques; l'application à l'équation d'une transformation de contact arbitraire conduit à une équation de même forme, et change les caractéristiques en de nouvelles caractéristiques.

Après avoir appliqué les considérations précédentes à divers exemples, M. Goursat aborde la méthode d'intégration de Monge qui consiste essentiellement à rechercher s'il existe des combinaisons intégrables des équations qui définissent un des systèmes de caractéristiques de l'équation (2); cette recherche s'identifie avec celle des intégrales intermédiaires du premier ordre qui renferment une constante arbitraire.

Deux intégrales intermédiaires de (2) appartenant à deux sys-

tèmes de caractéristiques différents, sont toujours en involution, et il en est de même de deux intégrales intermédiaires quelconques lorsque les deux systèmes de caractéristiques sont confondus. Cette importante proposition facilite l'examen des différentes circonstances qui se présentent dans la recherche des intégrales intermédiaires. Si l'un des systèmes de caractéristiques admet trois combinaisons intégrables, les deux systèmes de caractéristiques sont confondus, et l'on retrouve les équations considérées au début du Chapitre I. Dans le cas où les deux systèmes de caractéristiques sont confondus, il ne peut pas y avoir deux combinaisons intégrables seulement; s'il n'y en a qu'une, le résultat péniblement obtenu par Ampère, que l'on peut alors ramener l'équation à une autre ne contenant que r comme dérivée du second ordre, s'établit aisément au moyen de la théorie des transformations de contact. M. Goursat, dans le cas où les deux systèmes de caractéristiques sont distincts, et où chacun de ces systèmes admet deux combinaisons intégrables, établit plusieurs propositions importantes et, en particulier, le théorème de MM. Lie et Darboux; c'est pour lui l'occasion de donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (2) puisse, par une transformation de contact, être ramenée à une autre équation ne renfermant que s comme dérivée du second ordre. Après l'examen des autres cas qui peuvent se présenter, et après avoir montré que la proposition à laquelle Imschenetsky attachait la plus grande importance correspond, de même que celles d'Ampère, à l'emploi des transformations de contact, M. Goursat termine le Chapitre II par une exposition lumineuse de la méthode d'Ampère, à certains égards plus générale que celle de Monge, et qui se rattache aussi à la théorie des caractéristiques. L'application remarquable, faite par Ampère, de sa méthode à l'équation des surfaces minima, est reprise puis généralisée, et donne lieu à des développements intéressants.

Le Chapitre III renferme un choix très heureux d'applications des procédés généraux d'intégration précédents, empruntées, pour la plupart, à la théorie des surfaces.

Dans le Chapitre IV, M. Goursat étend la notion de caractéristiques à des équations du second ordre de forme quelconque; pour une telle équation, une multiplicité caractéristique est formée

d'un système simplement infini d'éléments du second ordre satisfaisant à des relations que l'on est amené à poser après avoir complété les résultats obtenus au Chapitre I, à propos du problème de Cauchy. On a, en général, deux systèmes distincts de caractéristiques. Tous les éléments d'une caractéristique appartiennent, en général, à une infinité de surfaces intégrales, dépendant d'une infinité de constantes arbitraires.

Les équations de Monge et d'Ampère présentent une particularité intéressante; les multiplicités caractéristiques du Chapitre II étant dites du premier ordre et celles qui viennent d'être définies pour le cas le plus général étant dites du second ordre, une multiplicité caractéristique du premier ordre appartient, en général, à une infinité de multiplicités caractéristiques du second ordre dépendant d'une constante arbitraire et, par suite, à une infinité de surfaces intégrales, dépendant d'une infinité de constantes arbitraires qui n'ont ainsi qu'un contact du premier ordre.

Les équations de Monge et d'Ampère jouissent ainsi de cette propriété particulière qu'étant donnée une surface intégrale et une caractéristique sur cette surface, il existe une infinité de surfaces intégrales, ayant un contact du premier ordre avec la première tout le long de cette courbe. Cette propriété appartient à d'autres équations du second ordre qui admettent pareillement des caractéristiques du premier ordre. Les deux ordres de caractéristiques conduisent à quatre grandes classes d'équations du second ordre.

A la théorie des caractéristiques du premier ordre se rattache la recherche des intégrales intermédiaires. Une étude spéciale est faite du cas où les équations qui déterminent ces intégrales intermédiaires forment un système en involution, et elle conduit à une classe nouvelle et étendue d'équations intégrables, pour lesquelles les deux systèmes de caractéristiques sont confondus.

Le Chapitre IV se termine par un aperçu du Mémoire d'Ampère où se trouvait déjà contenue implicitement la distinction fondamentale entre les systèmes de caractéristiques du premier et du second ordre. Cette fin de l'Ouvrage présente une grande originalité et jette une vive lumière sur les travaux d'Ampère.

Nous n'avons pu, dans cette brève analyse, que donner une idée bien imparfaite du Livre de M. Goursat. En présentant

d'une manière aussi claire et aussi complète l'état auquel a été amenée une théorie dont l'abord était quelquefois difficile dans les Mémoires originaux, M. Goursat aura contribué puissamment aux progrès que l'on peut encore espérer dans cette partie si intéressante de la Science. E. Cosserat.

MINKOWSKI (H.). — Geometrie der Zahlen. Erste Lieferung. 240 p. in-8°. Leipzig. Teubner, 1896.

L'Ouvrage dont nous analysons ici le premier fascicule a pour but principal la démonstration de principes généraux et féconds, relatifs à l'approximation des nombres quelconques par des séries de nombres entiers.

Comme le titre de l'Ouvrage l'indique, c'est par des considérations géométriques que l'auteur arrive à ses théorèmes; mais ce sont des considérations géométriques d'une espèce particulière. D'abord il s'agit de Géométrie à n dimensions. L'auteur avait essayé primitivement de s'en tenir à trois dimensions, mais cette méthode lui parut impraticable.

Ensuite, l'auteur emploie une notion nouvelle et ingénieuse, une généralisation de la distance que nous allons expliquer en peu de mots.

Bornons-nous pour cette explication à la considération de l'espace à trois dimensions, qui nous permet d'abréger par une représentation géométrique réelle.

Considérons une surface S telle que toute demi-droite issue de l'origine ne la rencontre qu'en un point. Soient alors A et B deux points. Menons OM parallèle à AB et de même sens. On appelle distance AB le quotient $\frac{AB}{OM}$.

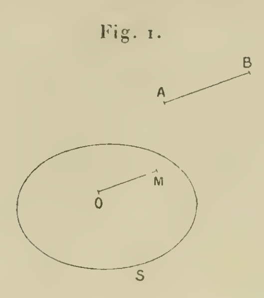
Quelle est la condition pour que la distance ainsi définie jouisse de la propriété fondamentale

$$\text{distance AB} < \text{distance AC} + \text{distance CB},$$

en supposant les trois points A, B, C non en ligne droite?

Cette condition, c'est que la surface S soit convexe, ou tout au moins nulle part concave. (Une surface nulle part concave est une surface qui, outre la propriété plus haut mentionnée, à savoir que toute demi-droite issue de O ne la coupe qu'en un point, jouit

Fig. 1.



encore de la suivante : par chacun de ses points, passe au moins un plan qui ne coupe pas la surface).

Telles sont en peu de mots les considérations fondamentales que l'auteur étend à l'espace à n dimensions, et qui font l'objet du premier Chapitre.

Dans le second Chapitre, l'auteur traite du volume des corps. Comme dans la Géométrie ordinaire, il décompose un corps en cubes infiniment petits et montre que la somme $\Sigma\delta^n$, où δ représente l'arête d'un de ces cubes, et n le nombre de dimensions de l'espace considéré, tend vers une limite. C'est cette limite qui est le volume du corps. Les considérations sur lesquelles s'appuie l'auteur se rapportent à la théorie des ensembles qui se trouve ainsi en rapport avec la propriété des nombres que l'auteur se propose d'établir.

Le troisième Chapitre est intitulé : *Des corps qui dans leurs volumes contiennent plus d'un point à coordonnées entières.* C'est le plus important de l'Ouvrage et, pour ainsi dire, le chapitre fondamental.

Que l'on considère d'une part le réseau formé par tous les points à coordonnées entières (c'est-à-dire dont les coordonnées sont des nombres entiers) et d'autre part un corps limité par une surface nulle part concave. Dans le cas particulier de $n=3$, la représentation géométrique rend intuitif ce fait qu'il doit y avoir une relation entre le volume du corps et le nombre maximum ou

minimum de points du réseau qu'il contient. Les principaux résultats établis à ce propos par l'auteur sont les suivants :

Un corps limité par une surface nulle part concave et ayant pour centre un point du réseau, et d'un volume égal à 2^n, *contient au moins deux points du réseau autres que son centre, soit à son intérieur soit sur sa surface.*

Un tel corps, d'un volume quelconque, s'il ne contient pas de point du réseau autre que son centre, dans son intérieur, n'en contient pas plus de $3^n - 1$ *sur sa surface.*

Un tel corps, s'il a un volume égal à 2^n, *et s'il ne contient aucun point du réseau dans son intérieur, en possède au moins* $2^{n+1} - 2$ *sur sa surface.*

On peut donner à ces théorèmes une forme analytique, d'où par exemple l'énoncé suivant.

I. *Soit* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *une fonction de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *qui pour* $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ *prend la valeur zéro, qui pour toutes les autres valeurs de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *est positive, qui satisfait aux conditions*

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = tf(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad t > 0,$$
$$f(y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_n + z_n) \leqq f(y_1, \ldots, y_n) + f(z_1, \ldots, z_n),$$
$$f(-x_1, \ldots, -x_n) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

(Cette fonction représente la distance à l'origine du point x_1, $x_2, \ldots, x_n$.)

L'intégrale $\int dx, dx_2, \ldots, dx_n$, *étendue au domaine*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1,$$

a une valeur déterminée J. *Alors il y a au moins un système de nombres entiers* $l_1, l_2, \ldots, l_n$ *pour lequel on a*

$$0 < f(l_1, \ldots, l_n) \leqq \frac{2}{\sqrt[n]{J}}.$$

Ces principes fondamentaux établis, l'auteur aborde dans le Chapitre suivant les applications arithmétiques de ces principes. Il prend comme surface S celle formée par ν plans parallèles deux

à deux $\nu \geqq n$ (parallélépipède pour $\nu = n$); puis, donnant aux résultats une forme analytique, il arrive au théorème suivant :

Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ *des formes linéaires à* n *variables, à coefficients réels dont* n *soient indépendantes. Soit* J *l'intégrale* $\int dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ *étendue au domaine*

$$-1 \leqq \xi_1 \leqq 1, \quad \ldots, \quad -1 \leqq \xi_\nu \leqq 1.$$

Il y a toujours au moins un système de nombres entiers, non tous nuls, pour lesquels on a

$$\text{valeur absolue de } \xi_1 \leqq \frac{2}{\sqrt[n]{J}}, \quad \ldots \quad \text{valeur absolue de } \xi_\nu \leqq \frac{2}{\sqrt[n]{J}},$$

ce qui est un cas particulier du Théorème I.

Pour $\nu = n$

$$J = \frac{2^n}{\text{valeur absolue } \Delta},$$

Δ étant le déterminant des formes et le théorème se simplifie.

On trouve des théorèmes analogues, mais plus compliqués, en supposant que certaines des fonctions ξ soient à coefficients imaginaires.

L'auteur applique à la démonstration du théorème, qui est le premier se rattachant à l'ordre d'idées principalement en vue :

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, *des grandeurs réelles. On peut trouver des nombres entiers* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sans diviseur commun,* $x_n > 0$, *et tels que*

$$\text{valeur absolue}\left(\frac{x_1}{x_n} - a_1\right), \quad \ldots \quad \text{valeur absolue}\left(\frac{x_{n-1}}{x_n} - a_{n-1}\right),$$

soient plus petites qu'une quantité positive donnée et plus petites aussi que $\dfrac{n-1}{n x_n^{\frac{n}{n-1}}}$.

On voit que, pour $n = 2$, on retombe sur des théorèmes de la théorie des fractions continues.

L'auteur applique ensuite ses recherches à un sujet très intéressant, celui des nombres entiers algébriques.

Soit θ un nombre algébrique entier de degré n, c'est-à-dire la

racine d'une équation algébrique de degré n irréductible à coefficients entiers dont le premier égale 1,

$$f(\theta) = 0.$$

Soient $A_1(\theta)$, $A_2(\theta)$, ..., $A_n(\theta)$, n fonctions rationnelles à coefficients rationnels de θ qui soient aussi des nombres entiers. L'expression

$$x_1 A_1(\theta) + x_2 A_2(\theta) + \ldots + x_n A_n(\theta),$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ représentent des nombres rationnels entiers, est évidemment aussi un nombre algébrique entier. La réciproque n'est pas vraie, quels que soient $A_1(\theta)$, $A_2(\theta)$, ..., $A_n(\theta)$, c'est-à-dire que cette expression peut représenter un nombre algébrique entier, sans que les coefficients x_1, x_2, ..., x_n soient entiers. Mais on peut choisir $A_1(\theta)$, $A_2(\theta)$, ..., $A_n(\theta)$, de façon que cette réciproque soit vraie. Les A étant ainsi choisis, considérons leur discriminant, c'est-à-dire l'expression

$$D = \begin{vmatrix} A_1(\theta) & A_2(\theta) & \ldots & A_n(\theta) \\ A_1(\theta_1) & A_2(\theta_1) & \ldots & A_n(\theta_1) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ A_1(\theta_{n-1}) & A_2(\theta_{n-1}) & \ldots & A_n(\theta_{n-1}) \end{vmatrix}^2,$$

θ, θ_1, θ_2, ..., θ_{n-1} désignant toutes les racines de l'équation $f(\theta) = 0$.

D'après sa forme, D est un nombre entier rationnel, il est le même quel que soit le système d'A choisi; on l'appelle *nombre fondamental* du système de rationnalité défini par θ, et tout facteur premier de D s'appelle un *nombre premier critique* de ce système. Ces nombres jouent dans la théorie des nombres algébriques un rôle important, analogue à celui des points critiques dans la théorie des fonctions algébriques.

Ceci posé, le théorème que l'auteur a en vue est le suivant :

Pour tout système de rationalité algébrique il existe au moins un nombre premier critique. Autrement dit le discriminant D n'est égal ni à $+1$ ni à -1. La démonstration se fait en considérant n fonctions linéaires en x_1, x_2, ..., x_n, dont les coefficients

soient justement à un facteur près

$$A_1(\theta_h), \quad A_2(\theta_h), \quad \ldots, \quad A_n(\theta_h), \qquad h = 0, 1, 2, \ldots, (n-1).$$

et en leur appliquant les théorèmes précédents.

L'auteur démontre aussi par les mêmes méthodes un théorème de Dirichlet relatif aux unités. On sait qu'on appelle unité un nombre entier $A(\theta)$ tel que sa norme, c'est-à-dire le produit $A(\theta), A(\theta_1), \ldots, A(\theta_{n-1})$, soit égal à ± 1. Le théorème en question, c'est qu'il existe une infinité d'unités, excepté si l'équation en θ est du second degré et a ses deux racines imaginaires. Enfin, ces théories se lient étroitement à celle des fractions continues et des irrationnelles quadratiques.

Le cinquième Chapitre contient une généralisation du théorème I, à savoir :

Considérons la même fonction f et la même intégrale J. *Il existe au moins un système de n^2 nombres entiers p_h^k tel que le déterminant $|p_h^k|$ soit différent de zéro et tel que*

$$f(p_1^1, \ldots, p_n^1), \quad f(p_1^2, \ldots, p_n^2), \quad \ldots, \quad f(p_1^n, \ldots, p_n^n) < \frac{2^n}{J}.$$

On y arrive par la considération des différentes directions qu'on peut concevoir dans un réseau. Cette théorie, comme on le voit immédiatement, se rattache intimement à celle des groupes finis de substitutions linéaires. Chemin faisant, on arrive au théorème suivant :

L'ordre d'un groupe fini de transformations entières, homogènes réversibles, à n variables, est inférieur ou égal à $(2^{n+1} - 2)^n$.

D'où un théorème analogue pour la transformation en elles-mêmes des formes quadratiques entières à n variables.

On arrive aussi à la démonstration du fait qu'il y a un nombre fini de classes de formes quadratiques entières positives de déterminant donné.

CAHEN.

MÉLANGES.

SUR UNE INTÉGRALE MULTIPLE;

Par M. STÆCKEL.

Dans ses Leçons sur la Théorie des intégrales simples et multiples Kronecker a traité le problème de déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int \ldots \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant assujetties aux conditions de limite

$$c_{\lambda 0} + c_{\lambda 1} x_1 + \ldots + c_{\lambda n} x_n \geqq 0 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Après avoir montré que ce problème se réduit à l'évaluation de la même intégrale, avec les conditions plus simples

$$x_1 \geqq 0, \qquad x_2 \geqq 0, \qquad \ldots, \qquad x_n \geqq 0, \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqq 1,$$

Kronecker trouve la valeur de cette intégrale en considérant l'intégrale plus générale

$$\int \ldots \int e^{-p \sum\limits_{k=1}^{n} z_k} \prod_{k=1}^{n} (z_k^{q_k - 1} dz_k), \qquad \left(z_k \geqq 0, \quad \sum z_k \leqq 1, \quad p, q_k > 0\right),$$

qui avait été déjà l'objet des recherches de Dirichlet. Cette méthode, tout intéressante qu'elle est, manque de simplicité et peut être remplacée par un procédé direct et élémentaire.

Faisons la substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= y, \\ x_2 &= y_1 y_2 - y_1, \\ x_3 &= y_1 y_2 y_3 - y_1 y_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ x_n &= y_1 y_2 \ldots y_{n-1} y_n - y_1 y_2 \ldots y_{n-1}. \end{aligned}$$

Alors les conditions de limite deviennent

$$y_1 \geqq 0, \qquad y_2 \geqq 1, \qquad \ldots, \qquad y_n \geqq 1, \qquad y_1 y_2 \ldots y_n \leqq 1,$$

ou

$$y_1 = \left(0 \ldots \frac{1}{y_2 \ldots y_n}\right), \qquad y_2 = (1 \ldots +\infty), \qquad \ldots, \qquad y_n = (1 \ldots +\infty),$$

et le déterminant fonctionnel étant

$$\underset{(\lambda,\,\mu = 1, 2, \ldots, n)}{\left|\frac{\partial x_\lambda}{\partial y_\mu}\right|} = y_1^{n-1} y_2^{n-2} \ldots y_{n-2}^{2}\, y_{n-1},$$

on aura

$$\int \ldots \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \int_1^\infty dy_n \int_1^\infty dy_{n-1} \ldots \int_1^\infty dy_2 \int_0^{\frac{1}{y_2 \ldots y_n}} y_{n-1} y_{n-2}^2 \ldots y_2^{n-2} y_1^{n-1}\, dy_1$$

$$= \frac{1}{n} \int_1^\infty \frac{dy_n}{y_n^n} \int_1^\infty \frac{dy_{n-1}}{y_{n-1}^{n-1}} \ldots \int_1^\infty \frac{dy_2}{y_2^2}$$

$$= \frac{1}{n(n-1)(n-2)\ldots 2.1} = \frac{1}{n!}.$$

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ZERMELO (E.). — UNTERSUCHUNGEN ZUR VARIATIONS-RECHNUNG. Inaugural Dissertation. In-8°, 98 p. Berlin, Mayer et Müller, 1894.

La recherche des maxima et minima des intégrales simples comprend deux problèmes distincts : on doit écrire d'abord que la première variation de l'intégrale est nulle ; on obtient ainsi un système d'équations différentielles (A), que l'on doit chercher à intégrer ; si l'on suppose ce premier problème résolu, au moins en partie, c'est-à-dire si l'on connaît une solution des équations (A), le deuxième problème consiste à rechercher si cette solution fournit effectivement un maximum ou un minimum. L'intégration du système (A) a donné lieu, depuis Lagrange, à de nombreux travaux ; de tels systèmes se rencontrent d'ailleurs dans bien d'autres questions, de sorte que le problème de leur intégration ne doit pas être considéré comme faisant partie du calcul des variations dont l'objet propre est le deuxième problème dont nous venons de parler ; c'est de ce deuxième problème que s'occupe M. Zermelo. Une des *Thèses* qui terminent son travail nous indique le point de vue auquel il s'est placé : *In der Variations Rechnung ist auf eine genaue Definition des Maximums oder Minimums grösserer Wert als bisher zu legen.* C'est M. Weierstrass qui semble avoir, le premier, insisté sur l'importance qu'a, en pareille matière, la précision des définitions ; dans son préambule, M. Zermelo nous apprend que ses recherches ont été inspirées par les Leçons de l'éminent professeur de Berlin ; c'est d'ailleurs M. Schwarz qui lui a d'abord fait connaître les méthodes de M. Weierstrass, et l'a engagé dans la voie où nous allons essayer de le suivre.

Le but est la recherche du minimum de l'intégrale

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt, \tag{1}$$

F étant une fonction des deux variables réelles x et y et de leurs dérivées par rapport à t jusqu'à l'ordre n inclusivement. On suppose essentiellement que la valeur de l'intégrale ne dépend que

de la *courbe* décrite par le point (x, y) lorsque t varie de t_1 à t_2. Il est clair que, dès lors, l'intégrale J ne change pas de valeur lorsqu'on remplace t par une fonction de t. En particulier, on peut la mettre sous l'une des deux formes

$$(2) \qquad J = \int_{x_1}^{x_2} f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) dx.$$

$$(3) \qquad J = \int_{s_1}^{s_2} \varphi\left(x, y, \alpha, \frac{d\alpha}{ds}, \dots, \frac{d^{n-1}\alpha}{ds_{n-1}}\right) ds,$$

s désignant l'arc de la courbe et α l'angle de la tangente avec une direction fixe. L'étude des relations qui existent entre les formes (1), (2), (3) fait l'objet du premier Chapitre; en particulier, on recherche à quelles conditions doit satisfaire la fonction F pour que l'intégrale (1) puisse être mise sous la forme (2) ou (3). A chacune des formes de l'intégrale correspond d'ailleurs une manière différente d'exprimer *les conditions aux limites*, dont nous parlerons tout à l'heure : les relations entre ces expressions diverses sont étudiées avec soin.

Cette étude comparative des trois formes de l'intégrale, qui aurait peut-être pu être abrégée, rendra de grands services dans la suite, en permettant, par un choix convenable des variables indépendantes, de simplifier beaucoup la comparaison entre deux intégrales voisines J. De plus, en écrivant toutes les formules importantes pour les trois formes de J, M. Zermelo épargne bien des calculs à ceux qui voudront appliquer ses méthodes à des cas particuliers.

Dans le second Chapitre, M. Zermelo donne d'abord la définition du minimum : on compare entre elles les intégrales sur des courbes ayant d'abord mêmes extrémités, et ensuite un contact d'ordre $n-1$, à chacune de ces extrémités avec des courbes données : ce sont là les *conditions aux limites* (*Grenzbedingungen*). Mais ces courbes doivent vérifier de plus certaines *conditions de continuité* (*Stetigkeitsbedingungen*); et l'on montre, en effet (théorème IV), qu'il n'y a pas de minimum possible si l'on n'exclut pas les courbes pour lesquelles les dérivées de x et de y ne seraient pas continues [1] jusqu'à l'ordre r,

---

[1] Il faut tout au moins qu'elles puissent être rendues continues par un choix

r étant égal au moins à $n-1$. Cette condition pouvait, d'ailleurs, semble-t-il, être regardée comme nécessaire *a priori*, car si les dérivées d'ordre $n-1$ ne sont pas continues en un point, les dérivées d'ordre n peuvent être considérées comme infinies en ce point, et l'intégrale où elles figurent est alors analogue à ces intégrales que Cauchy appelait *singulières* et dans lesquelles un élément unique apporte à lui seul une somme finie.

Indépendamment de ces conditions de continuité propres à chaque courbe, il est une autre catégorie de conditions très importantes pour la recherche du minimum et sur lesquelles nous allons nous étendre un peu, parce qu'elles donnent lieu à des difficultés sérieuses, se rattachant à la définition même du but du calcul des variations. On est généralement d'accord pour reconnaître que ce but est la recherche des courbes sur lesquelles l'intégrale est plus petite que sur les *courbes infiniment voisines*; la comparaison des intégrales sur des courbes qui ne sont pas infiniment voisines peut se faire parfois, mais par des méthodes tout à fait différentes. Par exemple, pour les lignes géodésiques, on déduit [1] de formules de Gauss des propriétés de *minimum absolu*, mais le calcul des variations n'intervient en rien. Cela étant, que doit-on entendre par courbes infiniment voisines? M. Zermelo définit l'ordre de voisinage m. Étant donnée une courbe fixe et une courbe variable dépendant d'un paramètre ε, on suppose que l'on peut faire correspondre leurs points un à un, de manière qu'aux points correspondants la différence des ordonnées y, *ainsi que de leurs dérivées* [2] *par rapport à x jusqu'à l'ordre m inclusivement*, soit infiniment petite avec ε. Cette définition donnée, M. Zermelo montre, par un exemple, que l'on ne peut pas assigner au nombre m de *minimum nécessaire*, comme on l'a fait pour le nombre r, dans le théorème IV, signalé

---

convenable de la variable indépendante; il est clair, en effet que si, sur deux arcs consécutifs d'un même cercle, par exemple, on exprime x et y au moyen de deux variables différentes, auxquelles on donne le même nom, les dérivées ne sont pas continues au point de suture.

[1] DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. II. M. Darboux a pu, en étudiant la méthode de Gauss, obtenir des propriétés de minimum absolu dans des problèmes très généraux.

[2] Il y aurait des modifications faciles à faire dans le cas où l'une des dérivées de y deviendrait infinie.

tout à l'heure. En d'autres termes, quel que soit le nombre m, il existe des intégrales telles que certaines courbes les rendent *minima* dans un voisinage d'ordre m, c'est-à-dire les rendent plus petites que ne le feraient toutes les courbes satisfaisant aux conditions aux limites et aux conditions de continuité, et infiniment voisines d'ordre m de la courbe considérée. Cependant, les méthodes de M. Zermelo ne lui permettent d'énoncer des résultats généraux que moyennant l'hypothèse $m \geqq r$, et il indique, comme sujets de recherche à la fin de son Travail, l'étude des cas suivants (¹) : $r = n - 1$, $m < n - 1$: $r = n$, $m = n - 1$. Je voudrais indiquer pour quelles raisons ces sujets de recherche, d'ailleurs très intéressants, ne paraissent pas rentrer dans le cadre du calcul des variations, c'est-à-dire pouvoir être traités par ses méthodes.

Rappelons que r désigne l'ordre jusque auquel les conditions de continuité sont vérifiées et m l'ordre de voisinage. Désignons par y l'ordonnée de la courbe donnée, par Y l'ordonnée de la courbe voisine. Par hypothèse, y et Y sont continues ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre r inclusivement; il en est de même de $Y - y$. Supposons maintenant que la fonction Y dépende d'un paramètre ε et que $Y - y$ soit infiniment petit avec ε; s'il en est de même pour les m premières dérivées de $Y - y$, l'ordre de voisinage des deux courbes est m. Cela posé, si m est inférieur à r, on voit que la dérivée d'ordre r de $Y - y$ est, *quel que soit* ε, une fonction continue de x, mais ne devient pas infiniment petite avec ε. Si l'on suppose, par exemple, $m = r - 1$, cette dérivée d'ordre r est la dérivée d'une fonction infiniment petite avec ε; comme elle n'est pas elle-même infiniment petite, on voit aisément qu'elle a des oscillations de plus en plus fréquentes, dont la fréquence est de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\varepsilon}$. En d'autres termes, cette dérivée d'ordre r de $Y - y$ et, par suite, la dérivée d'ordre r de Y n'est pas *uniformément continue* lorsque ε tend vers zéro. Si donc on considère la fonction Y comme infiniment voisine de la fonction y, on pourra dire que la dérivée d'ordre r de Y est une fonction continue, dont la continuité disparaîtrait au moment

(¹) Il ne semble pas y avoir avantage à supposer $r > n$.

où Y se confondrait avec y; de sorte que, *en tant que fonction infiniment voisine de* y, la fonction Y n'admet des dérivées continues que jusqu'à l'ordre m inclusivement.

On en conclut que la comparaison de l'intégrale sur deux courbes, dont l'ordre de voisinage m est inférieur à r, est un problème analogue à la comparaison de l'intégrale sur deux courbes qui ne seraient pas infiniment voisines; puisque, en considérant les deux courbes comme infiniment voisines, c'est-à-dire en faisant tendre ε vers zéro, on fait disparaître la continuité jusqu'à l'ordre r, contrairement aux hypothèses.

Ces remarques, d'ailleurs, ne diminuent en rien l'intérêt qu'il y a à considérer les nombres m et r qu'introduit M. Zermelo. En particulier, la distinction qui s'établit entre les cas $m = r = n - 1$ et $m = r = n$, pour lesquels les conditions du minimum effectif ne sont pas les mêmes, paraît être des plus intéressantes. Nous la signalons ici, ne pouvant énoncer, en détail, tous les résultats où elle intervient.

Indépendamment des définitions précises dont nous venons de voir l'importance, le Chapitre II renferme la formation de l'équation différentielle du problème, et l'énoncé précis et rigoureux des conditions nécessaires qui résultent de sa considération. Signalons, en particulier, dans chaque démonstration du fait qu'une courbe donnée ne fournit pas un minimum, la *formation effective* d'une courbe donnant une plus grande valeur à l'intégrale, et satisfaisant aux conditions exigées. On arrive même, par l'emploi d'un artifice dont le principe est dû à M. Weierstrass, à n'introduire que des courbes sur lesquelles toutes les dérivées de y sont continues et même que des courbes formées d'un seul arc analytique. Cet artifice consiste essentiellement dans l'emploi de *variations* telle que la suivante

$$\xi(t) = (t - t_1)^n (t_2 - t)^n e^{-\rho^2 (t - t_0)^2},$$

où l'on suppose t_0 compris entre t_1 et t_2, et où ρ est un nombre que l'on choisira aussi grand que l'on veut. Dès lors, la fonction $\xi(t)$ sera négligeable, sauf dans un voisinage aussi restreint que l'on voudra de $t = t_0$, et c'est ce fait qui assure le succès de ces démonstrations ingénieuses, sur lesquelles nous ne pouvons nous étendre davantage.

Dans le Chapitre III, M. Zermelo aborde la question de savoir si une solution de l'équation différentielle fournit une véritable solution du problème, les conditions de continuité reconnues nécessaires étant remplies. Il fait toujours usage de *variations* bien précises et bien déterminées. Le rôle essentiel est joué par une fonction E, déjà introduite par M. Weierstrass dans le cas où $n = 1$, et généralisée par M. Zermelo. Cette fonction E dépend de x, y, et de toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre n; mais il y a avantage à mettre en évidence les dérivées d'ordre n de x et y par rapport à t, que M. Zermelo désigne par p et q, et ces mêmes dérivées pour la courbe voisine, désignées alors par $\bar{p}$ et $\bar{q}$; de sorte que l'on considère la fonction

$$\mathrm{E}(p, q; \bar{p}, \bar{q}) = \mathrm{E}(t, \bar{p}, \bar{q}).$$

Cela étant, on a notamment le résultat suivant (théorème V): En supposant $r = m = n - 1$, *une courbe ne fournit un minimum que si la fonction* $\mathrm{E}(t; \bar{p}, \bar{q})$ *ne peut devenir négative sur cette courbe, quels que soient* $\bar{p}$ *et* $\bar{q}$. D'autres propositions sont encore indiquées, pour lesquelles nous renvoyons au Mémoire de M. Zermelo.

Dans le quatrième Chapitre on se propose de rechercher des conditions *suffisantes* pour l'existence du minimum. La méthode employée repose essentiellement sur la connaissance d'un *faisceau simplement infini* de courbes, solutions de l'équation différentielle du problème. Ces courbes sont supposées avoir entre elles, en un point fixe, un contact d'ordre $n - 1$ et, de plus, avoir chacune un contact d'ordre $n - 1$ avec la courbe définie par la solution particulière que l'on étudie; il en passe d'ailleurs une par chaque point de cette courbe. On arrive à définir, pour chaque solution particulière de l'équation différentielle, une fonction de deux variables $\Theta(t_0, t)$; si cette fonction est nulle pour $t_0 = t_1$ et $t = t_2$, les points t_1 et t_2 sont dits *conjugués* sur la courbe considérée; on suppose, de plus, que l'équation $\Theta(t_1, t) = 0$, dans laquelle t est l'inconnue, n'a pas de racine entre t_1 et t_2. Les points conjugués jouent un rôle essentiel dans la limitation des portions de la courbe qui fournissent effectivement un minimum.

Enfin, en terminant, M. Zermelo indique comment, dans cer-

tains cas, la considération d'une courbe, qu'il appelle *enveloppe*, permettrait de généraliser la discussion bien connue, relative à la chaînette considérée comme méridienne de la surface de révolution d'aire minimum. Malheureusement, on ne peut encore indiquer de criterium simple de l'existence d'une telle *enveloppe*. C'est là un desideratum à ajouter à ceux dont la liste clôt le travail que nous venons d'analyser brièvement.

On voit que M. Zermelo soulève bien des questions intéressantes et indique la solution complète de quelques-unes. Peut-être pourrait-on lui reprocher de ne pas avoir suffisamment dit lesquels de ces résultats étaient véritablement nouveaux; ou plutôt de ne pas avoir montré les relations qu'il y a entre certaines de ses formules et les formules obtenues par les auteurs qui s'étaient précédemment occupés de la variation seconde des intégrales; l'étude de ces relations serait certainement très intéressante; mais M. Zermelo pourrait répondre qu'elle aurait allongé démesurément son Travail.

Tel qu'il est, celui-ci sera lu avec fruit par tous ceux qu'intéresse le Calcul des Variations; ceux à qui il est déjà familier seront heureux de connaître les méthodes nouvelles et les résultats nouveaux dont nous avons essayé de donner un aperçu; ceux qui désirent l'apprendre auront, en M. Zermelo, un guide sûr. En effet, nous l'avons déjà dit, il apporte, dans ces questions délicates, toute la précision et tout le souci de la rigueur qu'on était en droit d'attendre d'un élève de M. Schwarz.

ÉMILE BOREL.

SOPHUS LIE. — GEOMETRIE DER BERUEHRUNGSTRANSFORMATIONEN, dargestellt von *Sophus Lie* und *Georg Scheffers*. Erster Band, mit Figuren im Text. Leipzig, Druck und Verlag von B.-G. Teubner. 1896.

La *Géométrie des transformations de contact* de M. Sophus Lie, dont nous allons analyser le premier Volume, est un exposé détaillé et systématique des travaux géométriques qui ont fondé la gloire de l'illustre savant norwégien. Cette publication sera précieuse aux géomètres qui regrettaient que ces recherches de M. Lie fussent éparses dans des recueils souvent difficiles à con-

sulter, et rédigées parfois avec une concision presque mystérieuse. Elles forment bien, comme l'indique le titre significatif choisi par l'auteur, sinon une Géométrie nouvelle, du moins un singulier prolongement de la Géométrie, caractérisé par l'introduction des *éléments de contact :* éléments linéaires des courbes, éléments plans des surfaces, et qui est aussi intimement lié à la théorie des équations différentielles que la Géométrie de Descartes à l'étude des équations algébriques. Les résultats les plus remarquables y ont leur principe dans cette méthode de la *transformation* des figures, qui, déjà si féconde dans la Géométrie élémentaire, prend ici une merveilleuse extension, dont la célèbre transformation des droites en sphères est peut-être le plus bel exemple. J'ajoute, pour traduire fidèlement toute la pensée de M. Lie, qu'il a voulu que cette exposition de ces recherches fût une preuve, en quelque sorte vivante, de ce que peuvent gagner la Géométrie et l'Analyse à se prêter un mutuel appui, enrichissant ainsi toutes deux leurs domaines de nouveaux objets de recherches, d'idées nouvelles et de nouvelles et fécondes méthodes.

Quelques lecteurs trouveront peut-être que le nouvel Ouvrage de MM. Lie et Scheffers n'aurait rien perdu à ce que l'exposition y fût souvent plus condensée et le style plus concis. Mais il est juste d'observer que les auteurs ont tenu à en rendre la lecture facile aux étudiants, et il faut reconnaître qu'avec sa rédaction si claire, ses divisions si nettes, ses exemples intéressants et nombreux, ses figures ingénieuses et expressives, leur *Géométrie des transformations de contact* est, non seulement une œuvre d'un grand intérêt scientifique, mais encore un excellent livre d'enseignement.

I. Le Volume est divisé en trois sections. La première est consacrée aux éléments linéaires du plan. Dans le Chapitre I, qui lui sert d'Introduction, les auteurs, après avoir rappelé les propriétés et l'importance des transformations ponctuelles les plus simples (projection orthogonale, transformation projective, transformation par rayons vecteurs réciproques), montrent qu'elles sont, à un certain point de vue, de même nature que d'autres opérations également bien connues : la dilatation, qui consiste à remplacer les courbes d'un plan par des courbes parallèles, l'opération par

laquelle on les transforme en leurs podaires par rapport à un même point, enfin la transformation par polaires réciproques. Les unes et les autres sont en effet des transformations des éléments linéaires du plan laissant invariante l'équation $dy - y' dx = 0$, où x, y, y' sont les coordonnées d'un élément linéaire quelconque. Que de telles opérations, en dehors de leur intérêt géométrique, puissent être de la plus grande importance dans l'étude des équations différentielles, c'est ce que montre, entre autres, l'exemple de l'équation de Clairaut, qui s'intègre si élégamment au moyen de la transformation exprimant le passage des coordonnées ponctuelles aux coordonnées tangentielles.

Les notions ainsi introduites sont précisées et présentées avec toute leur généralité dans le Chapitre II. Ce sont d'abord celles d'*éléments linéaires*, d'éléments linéaires *unis*, d'*association d'éléments* [1], qui permettent d'énoncer de la manière la plus satisfaisante le problème de l'intégration des équations différentielles du premier ordre; puis celle des *transformations de contact du plan*. MM. Lie et Scheffers montrent que chacune d'elles est définie par une relation entre les coordonnées des points des deux plans correspondants, résultat analytique auquel correspond le mode de génération, également bien connu, de ces transformations, qui repose sur la théorie des enveloppes.

La condition pour qu'une transformation des élément linéaires d'un plan

$$x_1 = X(x, y, y'), \qquad y_1 = Y(x, y, y'), \qquad y'_1 = P(x, y, y')$$

soit une transformation de contact s'exprime, comme l'on sait, par les identités

$$[X, Y] = 0, \qquad [P, X] = \rho, \qquad [P, Y] = \rho P.$$

Ce résultat fait l'objet du Chapitre III, qui contient en outre d'intéressantes interprétations géométriques de la relation d'involution $[X, Y] = 0$, avec application à la formation de types généraux d'équations différentielles du premier ordre intégrables par élimination. On y trouvera encore les principes fondamentaux de

(1) Nous traduisons ainsi le mot *Elementverein*, que M. Lie substitue à celui de *Element-mannigfaltigkeit* employé dans ses précédents Ouvrages.

la transformation des équations différentielles du second ordre par des transformations de contact, et enfin des remarques historiques sur certains résultats de Lagrange et de Plücker, incidemment retrouvés dans l'exposé précédent.

Le Chapitre IV contient la théorie des transformations de contact infinitésimales. Signalons-y l'interprétation mécanique de toute transformation comme la propagation d'un mouvement ondulatoire, ce qui conduit à considérer le principe d'Huyghens, en Optique, comme identique à ce fait que certaines transformations de contact, dépendant du temps comme paramètre, forment un groupe. La recherche des invariants différentiels d'une transformation infinitésimale de contact, la détermination des équations différentielles qu'elle laisse invariantes, enfin l'étude des transformations de contact infinitésimales échangeables entre elles complètent cette étude.

Les développements du Chapitre V sont destinés à montrer, sur un exemple étendu et intéressant, l'importance des notions précédentes. M. Lie y a repris l'exposé de ses belles recherches sur les cercles géodésiques (¹), dont les résultats ont une si remarquable analogie avec certains théorèmes bien connus de Beltrami, Dini et Lie dans la théorie des lignes géodésiques. La recherche de tous les ds^2 pour lesquels l'équation différentielle du troisième ordre des cercles géodésiques admet des transformations infinitésimales de contact conduit uniquement, d'abord aux surfaces à courbure constante, pour lesquels on trouve 10 transformations indépendantes, puis à des surfaces applicables sur certaines surfaces de révolution, enfin aux surfaces applicables sur les surfaces spirales. Dans le premier cas apparaît le groupe important des transformations de contact du plan qui changent tout cercle en cercle. On conclut, en plus, de cette étude que les surfaces à courbure constante sont les seules pour lesquelles l'équation générale des cercles géodésiques puisse se ramener à la forme

$$(x-a)^2+(y-b)^2-c^2=0.$$

M. Lie cherche ensuite dans quel cas deux surfaces peuvent se correspondre point par point de manière que leurs cercles géodé-

(¹) *Archiv for Math. og. Naturwiss.* Kristiania, 1884.

siques se correspondent aussi, et trouve, en laissant de côté les solutions évidentes, que les ds^2 des deux surfaces doivent être de révolution, et que l'un des deux détermine l'autre. On a ainsi, pour certains couples de surfaces de révolution, une généralisation bien curieuse de la transformation stéréographique, dans laquelle les méridiens et les parallèles se correspondent, les zones homologues se transformant projectivement.

II. La seconde section est intitulée : *Géométrie des éléments linéaires de l'espace* (¹). C'est, au fond, l'étude des questions géométriques se rattachant aux *équations de Monge*, c'est-à-dire aux relations entre les coordonnées d'un élément linéaire de l'espace, dont la forme générale est

$$\Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

Φ étant homogène en dx, dy, dz. Celles de ces équations qui sont linéaires, les *équations de Pfaff*, forment l'objet du Chapitre VI. La plus simple d'entre elles, l'équation

$$dy - z\,dx = 0, \tag{1}$$

permet de considérer la Géométrie des éléments linéaires du plan comme un cas particulier de cette étude : elle donne en effet naissance à une correspondance entre les points de l'espace et les éléments linéaires du plan, dans laquelle aux courbes intégrales de l'équation (1) correspondent les associations d'éléments du plan ; intégrer une équation différentielle du premier ordre revient ainsi à trouver les courbes intégrales de l'équation (1) situées sur une surface donnée, et cette idée si simple suffit à éclairer entièrement la théorie si délicate des intégrales singulières. Après ces remarques, les auteurs s'occupent de la réduction des équations de Pfaff à leur forme canonique, et donnent ensuite une exposition très élégante des propriétés des complexes linéaires, dont l'étude rentre dans celle des équations de Pfaff de la forme

$$\begin{aligned} &A(y\,dz - z\,dy) + B(z\,dx - x\,dz) \\ &\quad + C(x\,dy - y\,dx) + D\,dx + E\,dy + G\,dz = 0. \end{aligned}$$

(¹) Presque tous les résultats géométriques de cette section et de la suivante sont empruntés au célèbre Mémoire de M. Lie « Sur les complexes » (*Math. Annalen*, t. V).

qui sont les équations différentielles de ces complexes. Par des transformations projectives, on ramène ces équations à l'équation unique

$$x\,dy - y\,dx + dz = 0, \tag{2}$$

en exceptant le cas des complexes spéciaux. Les courbes intégrales, ou *courbes du complexe,* jouissent de ces propriétés bien remarquables d'avoir, en un même point, même plan osculateur et, de plus, même torsion, dès qu'elles y ont la même tangente; la détermination des asymptotiques des surfaces réglées formées de droites du complexe, ainsi que les formules donnant toutes les courbes du complexe, en résultent. Le Chapitre se termine par la réduction de l'équation (2) à la forme (1), qui conduit à une transformation remarquable des points de l'espace en les éléments linéaires du plan, dans laquelle aux droites du complexe linéaire correspondent les paraboles du plan, d'axes parallèles à une même direction.

Le Chapitre VII est consacré aux équations de Monge générales, dont la théorie est intimement liée à celle des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Celles qui admettent, comme courbes intégrales, ∞^3 droites méritent une attention spéciale, car leur étude contient celle des complexes de droites. Après un historique très intéressant sur la Géométrie réglée, les auteurs en reprennent, dans une remarquable exposition, les principes fondamentaux et, en particulier, les propriétés des faisceaux et réseaux de complexes linéaires. Ils passent ensuite à l'étude des *courbes du complexe,* par laquelle M. Lie a donné à la théorie des complexes une si merveilleuse extension : les résultats du Chapitre précédent, relatifs au plan osculateur et à la torsion, sont encore vrais ici, et l'on en conclut ce beau théorème que : *Sur les* surfaces intégrales, *les caractéristiques sont des lignes asymptotiques*, *et que, trouver les surfaces intégrales, c'est trouver les surfaces dont une famille d'asymptotiques est formée de courbes du complexe.*

Le Chapitre VIII contient, comme exemple des théories précédentes, une étude approfondie du *complexe tétraédral,* c'est-à-dire du complexe des droites qui sont coupées suivant un rapport anharmonique constant par les quatre faces d'un tétraèdre. C'est, en dehors des généralités préliminaires et d'un aperçu

historique sur les complexes tétraédraux les plus connus, l'exposition de recherches déjà anciennes de M. Lie [1] : elle contient d'abord la détermination des courbes du complexe, et la classification de ces courbes et de leurs éléments linéaires par la considération des transformations projectives qui laissent invariant le tétraèdre et, par suite, le complexe considéré. L'équation de Monge de ce complexe est, de plus, invariante par toute transformation de la forme

$$x_1 = x^m, \qquad y_1 = y^m, \qquad z_1 = z^m;$$

et ce fait si simple conduit à nombre de conséquences importantes, entre autres à la détermination des asymptotiques des surfaces tétraédrales symétriques, aux propriétés anharmoniques des cordes des cubiques gauches et des droites des quadriques, enfin au théorème fondamental sur les sections tangentes de la surface de Steiner. Enfin une nouvelle transformation

$$x_1 = \log x, \qquad y_1 = \log y, \qquad z_1 = \log z$$

rattache le complexe tétraédral à celui des sécantes d'une conique, et fournit en particulier des surfaces curieuses, qui sont engendrées de quatre manières, et d'une infinité de manières par la translation d'une courbe.

La recherche de ces *surfaces de translation* vient se rattacher d'une autre manière à l'étude des complexes, envisagée au point de vue si étendu de M. Lie. Aux problèmes d'intégration qui s'y rapportent et qui ont été examinés dans les précédents Chapitres (détermination des courbes et des surfaces intégrales) peut en effet se joindre le suivant, auquel est consacré le Chapitre IX : *Déterminer les* surfaces conjuguées au complexes, *c'est-à-dire dont un réseau conjugué est formé de courbes du complexe*. La solution en revient à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, linéaire en r, s, t, et comprend, dans le cas particulier où le complexe est celui des sécantes d'une courbe plane, la détermination des surfaces minima. Par des considérations géométriques des plus ingénieuses, M. Lie parvient, dans ce cas, aux formules définitives. Une méthode analogue fournit les surfaces conjuguées à un complexe tétraédral, pour lesquelles M. Lie donne

---

[1] *Göttinger Nachrichten*, janvier 1870.

en outre la détermination de leurs lignes asymptotiques au moyen de quadratures. Si l'on cherche maintenant les surfaces conjuguées de deux manières au complexe des sécantes d'une courbe plane, on est conduit à un système de deux équations linéaires de la forme précédente : M. Lie a prouvé, dans ses recherches sur les surfaces de translation, que la condition d'intégrabilité du système exprime que la courbe considérée doit être une courbe algébrique plane du quatrième ordre. Les auteurs se bornent à montrer ici la relation si curieuse qui existe entre ce résultat et le théorème d'Abel sur les intégrales algébriques de première espèce. Ils examinent ensuite avec quelques détails les cas où la courbe du quatrième degré se décompose, et cette discussion conduit en particulier aux surfaces de translation du Chapitre précédent, à la surface minima de Scherck, à l'hélicoïde minima, enfin à la surface réglée du troisième ordre, dite *surface de Cayley*.

Dans le Chapitre X, l'un des plus intéressants du Volume, M. Lie donne une détermination géométrique très élégante des transformations conformes de l'espace, et développe ensuite la série des considérations qui conduisent à sa célèbre correspondance entre droites et sphères. Le point de départ est dans la transformation bien connue qui fait correspondre à tout cercle du plan des x, y

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 + Z^2 = 0$$

le point de l'espace, de coordonnées X, Y, Z. On peut la considérer comme établissant une correspondance entre les droites minima de l'espace et les éléments linéaires du plan, dans laquelle en particulier les transformations conformes de l'espace se trouvent correspondre aux transformations de contact du plan qui changent tout cercle en cercle. Si l'on prend alors, pour coordonnées d'une droite minima

$$(1 - s^2)X + i(1 + s^2)Y + 2sZ + F = 0,$$
$$2sX - 2isY - 2Z - F' = 0,$$

les quantités s, F, F′, on constate, d'abord, que toute transformation conforme de l'espace transforme ces coordonnées en laissant invariante l'équation

$$dF - F'\,ds = 0,$$

et d'autre part que les droites minima passant par un même point

sont définies par une relation de la forme

$$F = a + bs + cs^2.$$

De sorte que, si l'on interprète s, F, F′ comme les coordonnées d'un élément linéaire d'un nouveau plan, aux transformations conformes de l'espace correspondent maintenant les transformations de contact de ce plan qui laissent invariante la famille des paraboles d'axes parallèles à une même direction; d'où résulte la transformation de contact donnée *a priori* au Chapitre VI, qui change ces paraboles dans les cercles du plan. Mais on obtient des résultats plus importants encore en combinant la correspondance actuelle des droites minima et des éléments linéaires (s, F, F′) d'un plan, avec la transformation, établie au Chapitre VI, des éléments linéaires d'un plan dans les points de l'espace. On obtient ainsi une correspondance de deux espaces, définie au fond par les deux relations

$$X + iY + xZ + z = 0,$$
$$x(X - iY) - Z - y = 0,$$

dans laquelle aux points du premier correspondent, d'une manière univoque, les droites minima du second, et aux points du second, dans le premier, les droites du complexe linéaire (2). Et l'on peut l'interpréter comme transformation de contact d'un des espaces dans l'autre, car elle fait correspondre à chaque *élément de surface* du second espace un couple de deux éléments de surface du premier, conjugués par rapport au complexe linéaire (2), et cela de telle manière qu'à une sphère correspond un couple de droites conjuguées. On sait que l'une des plus belles propriétés de cette transformation est de changer toute ligne de courbure d'une surface en une ligne asymptotique de la surface transformée : par des considérations de Géométrie infinitésimale, M. Lie rend presque intuitif ce résultat si remarquable.

Les auteurs terminent cette seconde section en définissant, pour l'espace, les *associations d'éléments linéaires,* et en démontrant que les transformations ponctuelles sont les seules transformations d'éléments linéaires qui changent toute association d'éléments en une autre association d'éléments.

III. Les deux premiers Chapitres de la troisième section (*Introduction à la Géométrie des éléments de surface*) contiennent

une exposition tout à fait remarquable, à cause de sa forme géométrique si expressive et si simple, des principes fondamentaux de la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. C'est d'abord au Chapitre XI, en quelque sorte préparatoire, après une étude spéciale des équations linéaires, un exposé des idées de Lagrange et surtout de Monge. La notion des intégrales complètes et la génération des surfaces intégrales par la méthode des enveloppes conduisent à la définition des caractéristiques et à leurs propriétés essentielles; la remarque que ce sont, au point de vue de la détermination des surfaces intégrales par une de leurs courbes, des courbes d'indétermination, fournit leurs équations différentielles; et la solution s'achève alors par la construction, au moyen de caractéristiques, de la surface intégrale qui passe par une courbe donnée. Une étude historique très intéressante termine ce Chapitre.

Dans le suivant, la question est reprise sous sa forme définitive, au moyen de l'introduction des *associations d'éléments de surface* (surfaces, courbes, points; cônes élémentaires, bandes d'éléments); on peut ainsi énoncer le problème de l'intégration sous une forme tout à fait générale, et l'on est conduit à généraliser la la notion d'intégrale complète et à remplacer les courbes caractéristiques de Monge par les *bandes caractéristiques* correspondantes. Celles-ci sont d'abord définies en admettant l'existence d'une intégrale complète, ce qui conduit de deux manières à la représentation si féconde des intégrales par les associations d'éléments d'un plan, et des bandes caractéristiques par les éléments linéaires de ce plan. M. Lie reprend ensuite la question synthétiquement, en partant des équations différentielles des bandes caractéristiques, et démontre, par un procédé rigoureux, qui évite la célèbre objection faite à la méthode de Cauchy, que l'intégration de ce système d'équations différentielles ordinaires permet la construction effective d'une intégrale complète de l'équation donnée. Incidemment est donnée la solution générale du problème de la détermination des courbes intégrales d'une équation de Monge quelconque. Les auteurs rattachent ensuite la méthode des caractéristiques aux autres méthodes, en étudiant le système des équations des caractéristiques, ou mieux l'équation linéaire aux dérivées partielles qui lui est équivalente. La relation d'involution, dont la signification géométrique est si importante, joue ici

un rôle fondamental. Un dernier paragraphe est consacré à la transformation des équations aux dérivées partielles du premier ordre : la représentation des caractéristiques par les éléments linéaires du plan y conduit à ce beau résultat qu'à toute transformation ponctuelle de l'espace, qui laisse invariante l'équation considérée, correspond une transformation de contact du plan.

Le Chapitre XIII traite des équations aux dérivées partielles du premier ordre qui admettent des transformations infinitésimales connues. Les cas d'une et de deux transformations sont examinés successivement et accompagnés d'intéressants exemples ; les simplifications correspondantes y sont rattachées à la méthode d'intégration du système des caractéristiques développée dans le précédent Chapitre.

Enfin un dernier Chapitre contient la détermination et l'étude de quelques classes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre qui présentent un intérêt géométrique particulier. Ce sont d'abord celles dont les caractéristiques sont des lignes asymptotiques des surfaces intégrales et pour lesquelles il n'y a qu'à compléter les résultats du Chapitre VII. Les équations pour lesquelles les caractéristiques sont des lignes de courbure des surfaces intégrales s'en déduisent par la transformation des droites en sphères, ce qui conduit les auteurs à exposer ici les propriétés fondamentales des transformations de contact, et des systèmes et complexes de sphères. Ils recherchent ensuite directement celles de ces équations qui sont linéaires et celles pour lesquelles les caractéristiques sont à la fois lignes de courbure et asymptotiques des surfaces intégrales. Par la considération des propriétés des surfaces des centres de courbure, on déduit des équations précédentes une classe étendue d'autres équations pour lesquelles les caractéristiques sont, sur les surfaces intégrales, des lignes géodésiques. La forme générale des équations de cette classe est ensuite déduite de considérations géométriques ingénieuses. Un dernier paragraphe est enfin consacré aux surfaces dont les normales appartiennent à un complexe de droites donné, surfaces considérées d'abord par Transon; la détermination de ces surfaces fournit aussi celle des surfaces dont ∞^1 lignes géodésiques appartiennent à un complexe de droites donné.

En terminant cette analyse, nous espérons avoir donné à nos

lecteurs une idée du nombre et de l'importance des questions traitées par MM. Lie et Scheffers; mais nous craignons de n'avoir que bien imparfaitement fait sentir ce qui ajoute à leur Livre un tel attrait, je veux dire cet art si personnel de M. Lie de donner aux notions et aux combinaisons les plus abstraites de l'Analyse mathématique une forme géométrique saisissante, et, pour ainsi parler, de les faire vivre sous nos yeux; en un mot, cette merveilleuse puissance de représentation concrète, qui fait le charme de l'enseignement de ce grand géomètre et constitue sans doute le fond même de son génie mathématique. E. VESSIOT.

APPELL et (P.) LACOUR (E.). — PRINCIPES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET APPLICATIONS. Un vol in-8, 421 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1897.

Il n'est guère de théorie qui soit plus riche que celle des fonctions elliptiques; cette richesse même et la multiplicité des éléments dont elle se compose effrayent parfois l'étudiant modeste et qui entend borner ses désirs. MM. Appell et Lacour ont voulu rassurer les timides. Nul ne pouvait le faire mieux qu'eux, ni dominer assez le sujet pour choisir un chemin plus attrayant, ni rendre ce chemin plus facile, grâce à une admirable maîtrise dans l'art d'enseigner, ni élever plus rapidement le lecteur jusqu'à une région où, devant les perspectives qu'il découvre, il s'émerveille d'être monté sans effort.

Nous devons nous résigner à analyser sèchement le petit Livre qu'ils ont bien voulu donner aux étudiants, et nous ne pouvons avoir la prétention de rendre, en aucune façon, l'art avec lequel il est composé et écrit.

Les auteurs rappellent d'abord quelques propositions élémentaires de la théorie des fonctions, dont les unes sont indispensables pour l'intelligence de ce qui suit, dont les autres préparent l'introduction des fonctions elliptiques; telles sont, par exemple, les propositions relatives aux fonctions rationnelles, à la définition de leur ordre, à leur décomposition en éléments simples, à la représentation du sinus par un produit infini, aux fonctions ration-

nelles de $\cot u$, ... Ils adoptent la définition suivante des fonctions elliptiques :

On appelle *fonction elliptique* une fonction uniforme n'ayant à distance finie, d'autres singularités que des pôles et admettant des périodes qui peuvent être toutes composées par addition et soustraction avec deux périodes primitives 2ω, $2\omega'$.

Après quelques remarques sur le parallélogramme des périodes, ils établissent le théorème de Liouville sur les fonctions elliptiques qui n'ont point de pôle à distance finie : ce sera, avec la considération *a priori* de la fonction σu, leur point de départ essentiel. Cette fonction σu, définie au moyen du produit infini, à double entrée, engendre par différentiation les fonctions ζu, pu ; la périodicité de cette dernière apparaît sur la série même, et l'on obtient immédiatement par intégration les formules relatives à l'addition d'une période pour les fonctions σu, ζu ; le théorème de Liouville fournit ensuite une démonstration simple et naturelle du théorème de M. Hermite sur la décomposition en éléments simples : ce théorème à son tour conduit rapidement aux propositions les plus essentielles de la théorie des fonctions elliptiques et, en particulier, à l'équation différentielle que vérifie pu, ainsi qu'aux développements de pu, ζu, σu suivant les puissances ascendantes de u.

Si l'on admet, comme le font les auteurs, que, à chaque système de valeurs g_2, g_3 pour lesquelles l'équation

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 0$$

n'a pas de racines égales, correspond un système de périodes 2ω, $2\omega'$ propre à engendrer une fonction pu, il sera alors démontré qu'il existe une fonction elliptique $p(u; g_2, g_3)$ dont on a le développement en série procédant des puissances de u qui vérifie cette équation : le calcul de 2ω, $2\omega'$ est renvoyé à plus tard et ne sera fait que dans le cas des invariants réels. Les théorèmes classiques sur la représentation d'une fonction elliptique comme quotient de produits de fonctions σ, sur les zéros et les pôles, le théorème d'addition de la fonction pu, ..., s'établissent alors très aisément. Le cas où ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont réels et positifs et, en particulier, dans ce même cas, la variation de pu, $p'u$ quand u décrit les côtés du rectangle dont les sommets sont les points 0, ω,

$\omega + \omega'$, ω' sont naturellement l'objet d'une étude spéciale. Au bout de soixante-dix pages environ, d'une lecture aisée, le lecteur est ainsi conduit à un point où il peut déjà faire d'intéressantes applications : la cubique gauche semble faite pour *illustrer* la fonction pu et les cas particuliers du théorème d'Abel, qu'elle offre comme d'elle-même, ne pourront manquer d'intéresser vivement l'étudiant, en lui faisant deviner des perspectives plus vastes. Le pendule sphérique, le corps pesant de révolution suspendu par un point de son axe, l'élastique gauche fournissent d'autres exemples, qui sont traités avec autant de simplicité que d'élégance.

La fonction Zu a été définie au moyen d'une série à double entrée qui met en évidence les pôles de cette fonction ; les auteurs évitent la transformation de cette série dans la série simple

$$\frac{\pi}{2\omega}\cot\frac{\pi u}{2\omega} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(u+2n\omega')+i\right] + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(u-2n\omega')-i\right],$$

en justifiant, par la considération des pôles, l'introduction de cette dernière série pour représenter Zu et en vérifiant l'égalité par le théorème de Liouville. L'intégration conduit ensuite à l'expression de $H(u)$ comme produit infini simple. Le développement de $H(u)$ en série trigonométrique s'obtient ensuite par la méthode des coefficients indéterminés, au moyen de la relation

$$H(u+2iK') = -\frac{1}{q}e^{-\frac{i\pi u}{K}}H(u).$$

Dès lors l'introduction des quatre fonctions de Jacobi, puis des fonctions sn, cn, dn et l'établissement de leurs propriétés élémentaires ne souffrent aucune difficulté.

Les formules relatives à l'échange de K, K′ dans les fonctions H, H_1, Θ, Θ_1 sont encore déduites du théorème de Liouville. La façon dont se comportent les fonctions sn, cn, dn lorsque K et K′ sont réels et lorsque la variable est réelle ou purement imaginaire est ensuite étudiée avec soin. De nombreuses applications suivent : c'est d'abord la biquadratique gauche, puis la surface des ondes, dont les formes et les propriétés apparaissent comme une consé-

quence immédiate des théories que l'on vient d'établir. Viennent ensuite le pendule simple, l'élastique plane sans pression, la corde à sauter, enfin l'étude des mouvements à la Poinsot, avec le calcul des angles d'Euler et la détermination de l'herpolodie.

Jusqu'à présent on a supposé, dans les applications, que le discriminant $g_2^3 - 27 g_3^2$ était positif, ou, si l'on veut, que les périodes primitives sont réelles et positives. Il reste à examiner le cas où l'on construit les fonctions σu, ζu avec des périodes imaginaires conjuguées

$$2\omega_1 = \omega_2 - \omega_2', \qquad 2\omega_3 = \omega_2 + \omega_2',$$

où ω_2 est réel et positif et où ω_2' est une quantité purement imaginaire à coefficient positif; les invariants sont encore réels, mais deux des racines de l'équation du troisième degré sont imaginaires conjuguées, et le discriminant est négatif. Inversement, quand on se donne g_2 et g_3, les quantités ω_2, ω_2' se calculent au moyen d'intégrales définies qui se ramènent aisément à la forme de Legendre, par une transformation du second ordre. Ces propositions sont immédiatement appliquées à l'étude de la courbe définie par les équations

$$x = \wp u, \qquad y = \wp' u,$$

puis au mouvement d'un projectile dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au cube de la vitesse (d'après M. Greenhill).

Les auteurs traitent ensuite des intégrales elliptiques. Supposant d'abord que le radical soit sous la forme normale de Legendre, ils montrent comment le calcul des intégrales elliptiques se ramène au calcul d'intégrales de la forme

$$\int \mathrm{sn}^{2n} u\, du, \quad \int \frac{du}{(\mathrm{sn}^2 u - \alpha)^n},$$

et comment s'obtiennent ces diverses intégrales. Ils montrent ensuite comment, le radical étant supposé porter sur un polynome bicarré, on peut le ramener à la forme normale, et enfin comment on peut ramener à un polynome bicarré un polynome général du quatrième degré. Passant ensuite à la méthode de M. Weierstrass,

ils établissent que la fonction de u

$$t = \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

où v est une constante, vérifie l'équation

$$\left(\frac{dt}{du}\right)^2 = f(t),$$

où $f(t) = (t^2 - 3pv)^2 - 2(p''v - 2tp'v)$ est un polynome du quatrième degré dont les racines sont les moitiés des coefficients angulaires des tangentes menées du point P à la cubique que définissent les équations

$$x = pu, \qquad y = p'u.$$

Il est dès lors aisé de ramener à la forme normale de M. Weierstrass une intégrale elliptique où figure un polynome du quatrième degré quelconque, et cette méthode fournit, en même temps que l'expression transcendante des racines de ce polynome, le moyen de discuter la réalité des racines. Enfin le sujet est repris rapidement par la méthode que l'on doit à M. Hermite. Les applications suivantes sont ensuite traitées avec les notations de M. Weierstrass : courbe élastique plane et sans pression, prisme droit chargé debout, courbe élastique plane sous pression normale, surfaces homofocales et coordonnées elliptiques, surfaces homofocales à un ellipsoïde comme surfaces isothermes et signification thermométrique des arguments, etc.

La transformation de Landen est l'objet d'un Chapitre spécial, dont l'objet essentiel est de montrer l'usage de cette transformation pour les calculs numériques.

MM. Appell et Lacour développent ensuite la théorie des fonctions doublement périodiques de seconde espèce. La formule de décomposition en éléments est déduite, par un procédé semblable à celui qui a été employé pour les fonctions doublement périodiques ordinaires, de ce qu'une fonction de seconde espèce qui n'admet pas de pôle à distance finie est identiquement nulle. L'équation de Lamé, les équations de M. Picard fournissent de belles applications.

Pour ce qui est des fonctions doublement périodiques de

troisième espèce, les auteurs, après avoir donné l'expression de ces fonctions au moyen d'un produit de facteurs, introduisent l'élément simple

$$\chi_m(x, y) = \frac{\pi i}{2\omega} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi yi}{\omega}} q^{mn(n-1)} \frac{e^{\frac{\pi(x-y)i}{\omega}} + q^{2n}}{e^{\frac{\pi(x-y)i}{\omega}} - q^{2n}},$$

dont la considération est, comme on sait, due à M. Appell, et montrent le rôle de cette fonction $\chi_m(x, y)$ dans la décomposition en éléments simples d'une fonction doublement périodique de troisième espèce, soit que le nombre de zéros l'emporte sur le nombre de pôles, soit qu'il lui soit inférieur.

Un dernier Chapitre est destiné à faire pénétrer le lecteur dans la théorie des fonctions modulaires; les auteurs définissent les périodes équivalentes, la fonction $J(\tau)$, le groupe modulaire; ils donnent quelques indications rapides sur la décomposition du plan en cases telles que, le point τ décrivant l'une de ces cases, les points

$$\frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

(où a, b, c, d sont des entiers liés par la relation $ad - bc = 1$) décrivent les autres cases, et terminent en montrant quel est, pour la fonction H de Jacobi, l'effet du remplacement des deux périodes qui ont servi à la construire par deux périodes équivalentes.

Deux Notes sont consacrées à établir l'impossibilité de l'existence d'une fonction continue avec deux périodes dont le rapport est réel, l'impossibilité d'une fonction uniforme et continue avec trois périodes, et la convergence du produit doublement infini qui sert à la définition de σu.

Enfin un Tableau de quelques pages résume les formules les plus usuelles de la théorie.

Presque tous les Chapitres sont suivis d'exercices, parfaitement choisis pour habituer le lecteur au maniement des formules ou pour le faire pénétrer plus avant dans les belles théories auxquelles MM. Appell et Lacour ont voulu l'initier. J. T.

RAFFY (L.). — Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse (Éléments de la théorie des courbes et des surfaces). Un vol. in-8; VI-251 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1897.

Voici un petit Livre qui rendra d'incontestables services aux étudiants, par l'ordre, la précision, la clarté qui y règnent : il constitue une excellente Introduction à l'étude des parties élevées de la Géométrie infinitésimale; celui qui l'aura étudié, outre qu'il aura acquis sur les points fondamentaux des notions précises, aura tout ce qu'il faut pour pénétrer dans cette étude, ou, plutôt, il y sera déjà entré.

Le Livre de M. Raffy correspond exactement à son titre : il s'adresse aux jeunes gens qui sont déjà en possession des méthodes analytiques, qui savent ce que c'est qu'une série entière, qui connaissent les propositions fondamentales relatives aux intégrales, simples ou multiples, aux équations différentielles, ordinaires, ou aux dérivées partielles. A la vérité, les lecteurs de cette catégorie, étant données les habitudes de notre enseignement, savent déjà une partie des matières qu'ils trouveront développées dans les *Leçons* de M. Raffy et qui leur ont déjà été enseignées avec le Calcul différentiel sous le titre d'*Applications géométriques*; il ne leur sera pas moins avantageux de reprendre toutes ces théories à leur début, de manière à préciser quelques notions sur lesquelles il n'a pas toujours été possible d'insister; ils n'y trouveront pas d'ailleurs que des choses qu'ils savent, ou qu'ils croient savoir; l'auteur a pu développer quelques théories qui ne figurent point dans l'ancien programme de la Licence ès Sciences mathématiques : il l'a fait avec une ampleur suffisante, mais en sachant toujours se borner comme il convient dans un livre élémentaire; cela est, souvent, plus difficile qu'on ne croit. Le Livre de M. Raffy ne s'adresse pas d'ailleurs uniquement à la catégorie de lecteurs qui vient d'être désignée : les emprunts aux parties élevées de l'Analyse sont rares et discrets; ils n'ont rien qui puissent effrayer même un débutant qui, sauf à sauter ici et là quelques pages, sur lesquelles il reviendra plus tard, peut très bien commencer ses études dans ces *Leçons*.

Le premier Chapitre (*Représentation analytique des courbes*

et des surfaces) est particulièrement intéressant. Sans doute, on doit reconnaître, et l'auteur n'y manque pas dans sa Préface, que toutes les restrictions apportées aux définitions ne sont pas indispensables pour établir certaines propriétés des courbes et des surfaces; mais il est certain que ces restrictions, qui, pratiquement, n'ont pas d'inconvénient, mettent dans les énoncés et les démonstrations une clarté, une précision, une unité qui sont parfaites. Elles consistent, au fond, à ne considérer que des courbes et des surfaces analytiques.

Ainsi, une courbe plane sera, par définition, le lieu des points du plan dont les coordonnées cartésiennes (x, y) satisfont à une équation $F(x, y) = 0$, la fonction F étant développable par la formule de Taylor aux environs de tous points x_0, y_0 où elle est nulle, sauf de certains points exceptionnels isolés.

Un point (x_0, y_0) est dit *point simple* d'une telle courbe s'il n'est pas exceptionnel, et si les dérivées partielles du premier ordre de F ne sont pas nulles toutes les deux en ce point. Il en résulte que, aux environs de tout point simple, une des coordonnées est une fonction continue de l'autre. Une courbe peut être définie comme le lieu des positions successives d'un point dont les deux coordonnées sont des fonctions d'un paramètre u, fonctions développables en série de Taylor aux environs de toute valeur de u comprise dans un certain intervalle, sauf de certaines valeurs isolées. On a alors une *représentation paramétrique* de la courbe. Un point (x_0, y_0) est dit *simple* si les coordonnées de tout point de la courbe, situé à l'intérieur d'un cercle décrit de ce point comme centre avec un rayon déterminé, peuvent être représentées par *un seul et même système* de deux fonctions $f_1(u)$, $f_2(u)$ qui, prenant respectivement les valeurs x_0 et y_0 pour $u = u_0$, soient, pour des valeurs suffisamment voisines de u_0, développables en séries entières procédant des puissances de $u - u_0$. M. Raffy montre la concordance de ces deux définitions du point simple. Après avoir défini les points multiples, il insiste avec raison sur la convenance qu'il y a de ne considérer que des représentations paramétriques *normales*, c'est-à-dire des représentations paramétriques telles qu'à chaque point de la courbe (sauf des points isolés) ne corresponde qu'une seule valeur u du paramètre. Des définitions de la même nature sont données pour les courbes dans l'espace et pour les surfaces : par leur

précision même, elles entraînent quelques obligations; l'auteur, par exemple, se trouve amené à établir que *les points communs à deux surfaces forment une courbe ou un système de courbes,* proposition dont la signification analytique est bien claire.

Les indications qui précèdent suffiront, sans doute, à montrer dans quel esprit de rigueur est écrit le Livre de M. Raffy. Nous nous bornerons, pour le reste, à dire brièvement quelles matières y sont traitées et dans quel ordre.

Après avoir défini ce qu'il faut entendre par *éléments du* $n^{\text{ième}}$ *ordre* d'une courbe ou d'une surface, l'auteur traite des tangentes, du plan tangent, etc.; le problème de déterminer une courbe ou une surface par des propriétés données du premier ordre lui fournit l'occasion de faire revoir aux lecteurs, sur des exemples bien choisis, les propriétés essentielles des équations différentielles du premier ordre et des équations linéaires aux dérivées partielles. Il introduit de bonne heure la notion de l'élément linéaire des surfaces, qui joue, dans toute la Géométrie, un rôle si essentiel. La théorie des enveloppes, des trajectoires, des surfaces développables est présentée avec détail. L'enveloppe est définie comme étant tangente aux enveloppées. L'auteur s'occupe ensuite de la courbure, de la torsion, des équations intrinsèques; on notera le soin qu'il a mis à préciser la signification du signe de la torsion. Il est à peine utile de dire que M. Raffy n'a omis aucune des applications essentielles, de celles qu'il faut nécessairement avoir faites, et qu'il en a ajouté diverses autres, fort intéressantes. Le contact des courbes ou d'une courbe et d'une surface est traité simplement, dans le même ordre d'idées où s'est placé M. Jordan. Les propriétés essentielles des lignes de courbure, des lignes asymptotiques, des réseaux conjugués sont développées, soit en regardant z comme une fonction de x, y, soit en regardant x, y, z comme des fonctions de deux paramètres u, v. Notons les applications aux surfaces spirales, aux surfaces de Monge, aux surfaces de Joachimstal. Un intéressant Chapitre est consacré aux surfaces réglées : signalons en particulier le soin qu'a mis l'auteur à définir nettement le signe du paramètre de distribution. Le dernier Chapitre se rapporte à l'évaluation des arcs, des aires et des volumes.

MÉLANGES.

SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES PASSANT PAR L'INTERSECTION DE PLUSIEURS SURFACES ALGÉBRIQUES;

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS,
Professeur au Lycée de Douai.

Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences ([1]), j'ai montré que le procédé que j'avais précédemment indiqué, pour l'étude des systèmes différentiels, s'appliquait immédiatement aux systèmes algébriques et conduisait à retrouver une méthode imaginée par Kronecker.

La forme nouvelle, sous laquelle se présente alors cette méthode, permet de résoudre simplement la question suivante :

Étant donné, dans l'espace à m dimensions, un nombre quelconque de surfaces algébriques ayant une intersection I, *et un nombre entier* μ, *trouver l'équation générale des surfaces algébriques de degré* μ *passant par* I.

La solution repose sur les remarques suivantes :

Les surfaces données étant écrites en coordonnées homogènes, faisons la transformation homographique la plus générale et mettons le système sous forme canonique Σ^n. Les équations d'ordre ν seront résolues par rapport à un ensemble canonique E_ν et l'on aura

$$(E_\nu)' < E_{\nu+1} \qquad (\nu < n),$$
$$(E_\nu)' = E_{\nu+1} \qquad (\nu \geq n).$$

L'intersection I est complètement définie par les équations d'ordre n de Σ^n et les indices de E^n ont, relativement à I, une signification géométrique précise : ces indices sont les degrés des multiplicités des divers ordres qui composent I.

Au système Σ^n ajoutons une équation d'ordre $\mu < n$, telle que ses déduites de degré n ne soient pas toutes des combinaisons

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, octobre 1896.

linéaires des équations d'ordre n de Σ^n, et cherchons à mettre le nouveau système sous sa forme canonique Σ^{n_1}. Désignons en général par E^1_ν les ensembles canoniques de ce nouveau système. On aura

$$E_n < E^1_n.$$

Si donc $n_1 < n$, on aura

$$(E^1_{n_1})' = E_{n_1+1}, \qquad (E^1_{n_1+1})' = E_{n_1+2}, \qquad \ldots, \qquad (E^1_{n-1})' = E^1_n > E_n.$$

Si $n_1 = n$

$$E^1_{n_1} > E_n$$

et si $n_1 > n$

$$E_n < E^1_n, \qquad (E^1_{n+1})' < E^1_{n+1}, \qquad \ldots, \qquad (E^1_{n_1-1})' < E^1_{n_1},$$

ce qui montre que E_n et $E^1_{n_1}$ ne pourront jamais avoir les mêmes indices puisqu'il ne pourra jamais arriver qu'ils soient égaux ou que l'un d'eux soit un ensemble dérivé de l'autre.

Supposons maintenant que l'équation qu'on ajoute à Σ^n soit de degré $\mu \geqq n$ et ne soit pas une combinaison linéaire des équations d'ordre μ de Σ^n. On aura $n_1 \geqq \mu$ et

$$(E_n)' = E_{n+1}, \qquad \ldots, \qquad (E_{\mu-1})' = E_\mu,$$
$$E_\mu < E^1_\mu, \qquad (E^1_\mu)' < E^1_{\mu+1}, \qquad \ldots, \qquad (E^1_{n_1-1})' < E^1_{n_1},$$

ce qui montre encore que E_n et $E^1_{n_1}$ ne pourront jamais avoir les mêmes indices.

Dire qu'une surface S passe par l'intersection des surfaces s, c'est dire que l'on ne modifie pas l'intersection quand, au lieu des surfaces s, on considère l'ensemble de la surface S et des surfaces s. Si $F = 0$ est l'équation de S et Σ^n le système canonique formé par les équations des surfaces s, en ajoutant l'équation $F = 0$ au système Σ^n on devra trouver un nouveau système canonique ayant les mêmes indices que le premier, car ces indices seront, dans les deux cas, les degrés des diverses multiplicités composant la même intersection.

Si le degré μ de F est au moins égal à n, il faudra, d'après ce qui a été dit précédemment, que $F = 0$ soit une combinaison linéaire des équations d'ordre μ de Σ^n. Alors Σ^{n_1} sera confondu avec Σ^n, ce qui montre la réciproque, c'est-à-dire que S passera bien par l'intersection des s.

Si μ est inférieur à n, il faudra que toutes les déduites de de-

gré n de F = o soient des combinaisons linéaires des équations de degré n de Σ^n. On aura alors $n_1 \leqq n$ et

$$(E^1_{n_1})' = E^1_{n_1+1}, \quad \ldots, \quad (E^1_{n-1})' = E_n,$$

ce qui montre que les équations d'ordre n de Σ^n sont formées en prenant toutes les déduites des équations d'ordre n_1 de Σ^{n_1} et définissent par conséquent la même intersection. Les conditions imposées à F sont donc suffisantes.

On est alors conduit à la marche suivante, dans laquelle nous n'emploierons pas les formes canoniques, indispensables pour la théorie, mais incommodes dans la pratique à cause du changement linéaire de variable qu'elles exigent.

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots$$

étant les équations des surfaces s en coordonnées homogènes, formons les équations des degrés successifs. Désignons, en général, par

$$\varphi^1_\nu = 0, \quad \varphi^2_\nu = 0, \quad \ldots, \quad \varphi^{p_\nu}_\nu = 0,$$

les équations d'ordre ν qui sont linéairement indépendantes, et convenons de représenter par

$$p'_\nu$$

le nombre des termes de l'ensemble canonique d'ordre $\nu + 1$ dérivé de l'ensemble canonique d'ordre ν ayant p_ν termes.

Il y aura un nombre n pour lequel on aura

$$p'_\nu < p_{\nu+1} \quad (\nu < n).$$
$$p'_\nu = p_{\nu+1} \quad (\nu \geqq n),$$

n sera l'ordre canonique du système.

Nous obtiendrons immédiatement :

Si $\mu \geqq n$, l'équation générale des surfaces de degré μ passant par l'intersection des surfaces données est

$$\lambda_1 \varphi^1_\mu + \lambda_2 \varphi^2_\mu + \ldots + \lambda_{p_\mu} \varphi^{p_\mu}_\mu = 0.$$

Elles dépendent de $p_\mu - 1$ paramètres indépendants.

On peut remarquer que si aucune des équations $f = 0$ n'est une conséquence algébrique des autres, les équation $\varphi = 0$ sont

des déduites ou des combinaisons linéaires de déduites des équations $f=0$, de sorte que l'équation générale des surfaces cherchées est de la forme

$$\Sigma P_i f_i = 0,$$

les P_i étant des polynomes entiers homogènes arbitraires de degrés tels que chaque produit $P_i f_i$ soit de degré μ. Mais, sous cette forme, les paramètres que contiendrait l'équation générale ne seraient pas tous essentiels.

Arrivons maintenant au cas de $\mu < n$.

Considérons une équation d'ordre $n-1$ à coefficients indéterminés et écrivons que toutes ses déduites sont des combinaisons linéaires des équations d'ordre n de Σ^n. Nous obtiendrons, pour déterminer ces coefficients, un certain nombre d'équations homogènes qui sont certainement compatibles puisque les fonction φ_{n-1} satisfont aux conditions imposées.

Ces équations nous fourniront, par conséquent, un certain nombre d'équations de degré $n-1$, linéairement distinctes, parmi lesquelles nous trouverons φ_{n-1} et d'autres. Soient

$$\varphi_{n-1}^1 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1}^{p_{n-1}} = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1}^{q_{n-1}} = 0,$$

leur ensemble. On aura forcément $(q_{n-1})' \leqq p_n$, et toute équation d'ordre $n-1$ dont toutes les déduites seront des combinaisons linéaires des équations d'ordre n de Σ^n, sera de la forme

$$\lambda_1 \varphi_{n-1}^1 + \ldots + \lambda_{p_{n-1}} \varphi_{n-1}^{p_{n-1}} + \ldots + \lambda_{q_{n-1}} \varphi_{n-1}^{q_{n-1}} = 0.$$

Cherchons maintenant les équations d'ordre $n-2$ satisfaisant aux mêmes conditions. Leurs secondes déduites devant être des combinaisons linéaires des équations d'ordre n, leurs premières déduites devront être des combinaisons linéaires des équations

$$\varphi_{n-1}^1 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1}^{p_{n-1}} = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1}^{q_{n-1}} = 0.$$

En l'exprimant sur une équation à coefficients indéterminés on arrivera à trouver un certain nombre d'équations linéairement indépendantes parmi lesquelles figureront forcément les φ_{n-2}. Soient

$$\varphi_{n-2}^1 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-2}^{p_{n-2}} = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-2}^{q_{n-2}} = 0,$$

et toute équation d'ordre $n-2$ satisfaisant aux conditions im-

posées sera de la forme

$$\lambda_1 \varphi^1_{n-2} + \ldots + \lambda_{p_{n-2}} \varphi^{p_{n-2}}_{n-2} + \ldots + \lambda_{q_{n-2}} \varphi^{q_{n-2}}_{n-2} = 0.$$

On devra ainsi continuer et ne s'arrêter que lorsqu'on arrivera à un ordre α inférieur au plus petit degré des équations de Σ^n et ne donnant pas d'équations complémentaires car les degrés inférieurs à α ne pourront certainement plus en donner.

Nous dirons alors que nous avons *complété* le système Σ^n et nous obtenons :

Si $\mu < n$, l'équation générale des surfaces de degré μ passant par l'intersection des surfaces données est

$$\lambda_1 \Psi^1_\mu + \lambda_2 \Psi^2_\mu + \ldots + \lambda_{q_\mu} \Psi^{q_\mu}_\mu = 0,$$

les équations $\Psi_\mu = 0$ étant les équations de degré μ du système Σ^n complété.

La méthode que nous venons d'indiquer permet de résoudre la question plus générale suivante :

Soient $S_1, S_2, \ldots, S_p$, p systèmes de surfaces et $I_1, I_2, \ldots, I_p$ les intersections de chacun de ces systèmes, trouver l'équation générale des surfaces de degré μ passant par I_1, par I_2, ..., par I_p.

Formons l'équation générale des surfaces de degré μ passant par I_1, ce sera

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots = 0,$$

puis l'équation générale des surfaces de degré μ passant par I_2,

$$b_1 B_1 + b_2 B_2 + \ldots = 0, \qquad \ldots$$

et enfin l'équation générale des surfaces de degré μ passant par I_p

$$l_1 L_1 + l_2 L_2 + \ldots = 0,$$

les a, les b, ..., les l étant des constantes arbitraires, et les A, les B, ..., les L des polynomes déterminés de degré μ.

En écrivant que toutes ces équations représentent la même surface, nous aurons entre les a, les b, ..., les l un certain nombre d'équations linéaires et homogènes.

Si ces équations n'admettent que la solution banale où toutes les inconnues sont nulles, cela veut dire que les surfaces cherchées n'existent pas.

Si elles admettent d'autres solutions, on obtiendra la solution générale par les procédés connus et les a, les b, ..., les l, seront des fonctions linéaires et homogènes d'un certain nombre de paramètres m_1, m_2, ... En remplaçant dans la première équation, les a par les valeurs ainsi trouvées, on aura l'équation générale cherchée qui sera de la forme

$$m_1 M_1 + m_2 M_2 + \ldots = 0.$$

En particulier, donnons-nous arbitrairement des multiplicités I^{m-1}, I^{m-2}, ..., I^1, I^0 ayant respectivement $m-1$, $m-2$, ..., 1, 0 dimensions, et cherchons l'équation générale des surfaces de degré μ passant par toutes ces multiplicités. Chacune de ces multiplicités sera définie comme intersection d'un certain système S de surfaces, de sorte qu'on sera dans un cas particulier du problème que nous venons de traiter précédemment.

De là on tire un résultat général :

I *étant un ensemble quelconque de multiplicités, on peut toujours, par des résolutions d'équations linéaires, trouver l'équation générale des surfaces de degré* μ *passant par* I *et cette équation générale contient toujours linéairement des paramètres essentiels dont elle dépend.*

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LUDWIG OTTO HESSE'S GESAMMELTE WERKE, herausgegeben von der Mathematisch-physikalischen Classe der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften. In-4°, VIII-732 p. Munich, 1897. Verlag der K. Academie.

En 1892, l'Académie des Sciences de Bavière a décidé, sur la proposition de MM. W. Dyck, Luroth et Nœther, de publier, à ses frais, une édition complète des Mémoires d'Otto Hesse ; et elle a confié la direction de cette publication aux auteurs de la proposition, auxquels est venu s'adjoindre M. le professeur Gundelfinger qui, déjà, avait eu à s'occuper des manuscrits laissés par Hesse. L'édition projetée devait comprendre non seulement les Mémoires imprimés du vivant de l'illustre analyste ou publiés après sa mort, mais encore tous ceux qui, dans les manuscrits qu'il a laissés, paraîtraient dignes de voir le jour. En revanche elle devait laisser de côté les Ouvrages parus séparément, qui ont tous d'ailleurs le caractère de livres destinés à l'enseignement.

Ces intentions de l'Académie de Bavière ont été fidèlement suivies, et l'édition que nous avons sous les yeux a été exécutée avec un soin et un talent que nous ne saurions trop louer. Elle comprend, en deux parties séparées, rangés dans l'une et dans l'autre par ordre chronologique, tant les Mémoires publiés du vivant même de Hesse que ceux qui auront vu le jour après sa mort. Tous ont été soigneusement revus, datés, reproduits textuellement, enrichis de Notes et de Remarques par les savants directeurs de la publication. Un aperçu de la vie de Hesse, une liste de ses Œuvres publiées en Volumes, des indications assez complètes sur les manuscrits scientifiques qu'il a laissés terminent ce Volume, orné d'un intéressant portrait qu'il ne nous est pas permis d'oublier. C'est vraiment là une édition complète et définitive, destinée à conserver le souvenir d'un géomètre dont les travaux sont tous empreints d'une simplicité, d'une élégance vraiment dignes d'admiration.

Ces qualités que Hesse a montrées dans tous les écrits sortis de sa plume, cette limpidité, ce fini deviennent de plus en plus rares dans les œuvres contemporaines. On est pressé, aujourd'hui,

de mettre au jour les moindres découvertes, on les publie souvent sans prendre le soin, soit de les approfondir, soit même de les mettre en pleine valeur. Les géomètres tels que Borchardt ou Hesse deviennent de plus en plus rares. L'édition actuelle rendrait un bien grand service à notre Science si elle pouvait décider quelques-uns de nos jeunes géomètres à imiter les excellents exemples qu'elle met à profusion à la disposition de tous les lecteurs. Il y aura toujours profit à lire et à admirer les Mémoires qui s'y trouvent réunis sur la théorie des courbes et des surfaces du second ordre, sur la théorie de l'élimination, sur les fonctions homogènes, sur les courbes du troisième et du quatrième ordre, sur les équations différentielles et sur le calcul des variations. Ils sont sans doute d'une lecture facile, mais ils contiennent des résultats essentiels et élevés. Quelques-uns de ces résultats sont devenus classiques: en lisant les Mémoires sur les formes homogènes, on n'éprouve qu'une surprise, celle de voir désigner sous le nom de *déterminant d'une fonction* cette formation à laquelle tous les géomètres attachent aujourd'hui, avec justice, le nom de *hessien*.

G. D.

CAYLEY (A.). — THE COLLECTED MATHEMATICAL PAPERS. Vol. XI. In-4°, XVI-643 p. Cambridge University Press; 1896.

Nous avons déjà appelé l'attention de nos lecteurs sur cette magnifique publication. Le présent Volume est accompagné d'une admirable reproduction d'une photographie, prise en 1885, de l'illustre géomètre. Il contient, sous les n°s 706 à 798, 93 Mémoires publiés dans les années 1878 à 1883, le discours prononcé en 1883 à Southport devant l'Association Britannique et plusieurs articles d'histoire des sciences publiés dans l'*Encyclopédie britannique* de 1878 à 1888. Ces travaux, comme les précédents, touchent aux sujets les plus divers : Géométrie analytique, théorie des formes, géométrie infinitésimale, théorie des fonctions thêta, équations différentielles, etc. Tous présentent le plus vif intérêt, presque tous introduisent dans la Science quelque idée originale, ingénieuse ou féconde; et c'est pour nous un devoir, qu'il

nous est agréable de remplir, de remercier les géomètres anglais du soin avec lequel ils ont réuni et rassemblé tant d'écrits dispersés dont la lecture et dont l'étude exerceront une influence bienfaisante sur le développement de toutes les branches de la Science mathématique. G. D.

P. PAINLEVÉ, Professeur adjoint à la Faculté des Sciences, professeur suppléant au Collège de France. — LEÇONS SUR LA THÉORIE ANALYTIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, professées à Stockholm (septembre, octobre, novembre 1895), sur l'invitation de S. M. le Roi de Suède et de Norwège. In-4° lith. 589 pages. Paris, Herrmann, 1897. Prix : 20fr.

INTRODUCTION.

1. Ces Leçons sont la reproduction du Cours que j'ai professé à Stockholm, durant le semestre d'automne 1895, sur l'invitation de S. M. le Roi Oscar II de Suède et de Norwège.

L'objet de ce Cours était d'exposer les progrès récents de la *Théorie analytique* des équations différentielles.

C'est Cauchy qui, dans son *Calcul des limites*, a jeté les fondements de cette théorie. Considérons un système d'équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

où les f_i sont des *fonctions algébriques* de $y_1, \ldots, y_m$, analytiques en x. Quand les f_i sont holomorphes pour $x = x_0$, $y_1 = y_1^0$, ..., $y_m = y_m^0$, Cauchy a montré que le système (1) admet une solution $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ holomorphe pour $x = x_0$ et satisfaisant aux conditions initiales $y_1(x_0) = y_1^0, \ldots, y_m(x_0) = y_m^0$. Quand les f_i ne sont pas holomorphes pour $x = x_0, y_1 = y_1^0, \ldots, y_m = y_m^0$, les circonstances très compliquées qui se présentent ont fait l'objet de nombreux travaux, dont les plus connus sont ceux de Briot et Bouquet, de MM. Picard, Poincaré, etc.

Mais lorsque x s'éloigne de x_0 pour varier d'une façon quelconque dans son plan, comment se comporte la solution $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$? C'est là un problème fondamental qui, jusque dans ces dernières années, n'a été abordé que pour une classe d'équations

très particulières, à savoir : les équations linéaires et les équations qui s'y rattachent immédiatement. Depuis les mémorables travaux de M. Fuchs, la théorie des équations linéaires a pris un développement considérable et constitue une des branches les plus importantes des Mathématiques modernes.

C'est aux systèmes différentiels (1) *les plus généraux,* à l'étude des fonctions analytiques $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ définies par un tel système, de leurs singularités, etc., que sont consacrées ces Leçons.

2. On conçoit que, dans ce genre de recherches, il soit indispensable d'approfondir le rôle des constantes arbitraires dont dépend l'intégrale de (1). Représentons par a une valeur numérique de x, par $b_1, \ldots, b_m$ des valeurs telles que les f soient holomorphes pour $x = a$, $y_1 = b_1$, $\ldots$, $y_m = b_m$. Il est aisé de voir, en complétant la démonstration de Cauchy, que la solution $y_1(x)$, $\ldots$, $y_m(x)$, définie par les conditions initiales $y_1(a) = y_1^0, \ldots, y_m(a) = y_m^0$, constitue un système de fonctions analytiques de $x, y_1^0, \ldots, y_m^0$, soit $y_1 = \varphi_1(x, y_1^0, \ldots, y_m^0, a), \ldots,$ $y_m = \varphi_m(x, y_1^0, \ldots, y_m^0, a)$, *holomorphes dans le domaine de* $x = a, y_1^0 = b_1, \ldots, y_m^0 = b_m$. Si maintenant x, y_1^0, $\ldots$, y_m^0 varient d'une façon quelconque, qu'advient-il des fonctions $y_1 = \varphi_1, \ldots, y_m = \varphi_m$? Tel est, sous sa forme la plus étendue, le problème que nous nous posons ici.

Mais, en étudiant ce problème, j'ai eu surtout en vue une catégorie remarquable de systèmes différentiels, à savoir les systèmes (1) dont l'intégrale générale est *uniforme*. L'importance de ces systèmes tient à deux raisons : d'une part, un tel système peut être regardé comme *intégré,* en ce sens que les modes de développement des fonctions uniformes permettront de représenter une intégrale quelconque et de la *suivre* dans tout son domaine d'existence; d'autre part, la plupart des transcendantes usuelles introduites jusqu'ici vérifient des équations différentielles très simples, en sorte que les équations différentielles algébriques à intégrale uniforme apparaissent comme la source des transcendantes les plus naturelles. A ces équations (et pour les mêmes motifs) il convient d'adjoindre celles dont l'intégrale n'admet qu'un nombre fini de branches. Enfin, l'étude même de ces équa-

tions met en évidence le rôle tout différent que jouent, pour un système (1) quelconque, les points critiques ([1]) *fixes* d'une solution $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ (j'entends les points critiques indépendants de la solution considérée) et les points critiques *mobiles* (variables avec les constantes d'intégration); on est amené ainsi à considérer les systèmes (1) plus généraux, dont l'intégrale $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ n'acquiert que n déterminations quand x tourne autour des points critiques mobiles, sans tourner autour des points critiques fixes. Parmi ces systèmes, les systèmes (1) *à points critiques fixes* offrent un intérêt particulier et constituent une extension naturelle des équations différentielles linéaires.

En définitive, nous établirons, dans ces Leçons, certaines propriétés des fonctions $y_i = \varphi_i(x, y_1^0, \ldots, y_m^0, x_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, qui définissent l'intégrale d'un système (1) *quelconque*, mais la principale application de ces généralités portera sur *les systèmes* (1) *dont l'intégrale* $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ *ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles.*

3. Il est nécessaire, avant tout, de se rendre compte avec précision des *singularités* qui peuvent affecter les fonctions $y_i = \varphi_i(x, y_1^0, \ldots, y_m^0, x_0)$.

Soit $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ un système de m fonctions analytiques de x, qui admettent le point $x = \bar{a}$ comme point singulier non algébrique ([2]), et soit l un chemin qui *tend* vers $\bar{a}$ sans rencontrer aucune singularité des fonctions $y_i(x)$; s'il existe des chemins l tels qu'une au moins des fonctions $y(x)$ ne tende vers aucune limite (finie ou infinie) quand x tend vers $\bar{a}$ sur l, nous convenons de dire que $x = \bar{a}$ est *un point essentiel* des fonctions $y_i(x)$; sinon, $x = \bar{a}$ est dit *un point transcendant ordinaire*, ou simplement un point *transcendant* des $y_i(x)$.

Cette définition admise, soient $x_0, y_1^0, \ldots, y_m^0$ des valeurs pour

---

([1]) Nous réservons exclusivement le nom de *pointe critiques* aux points autour desquels plusieurs déterminations de l'intégrale se permutent (ou aux points qui font partie d'une ligne singulière autour de laquelle plusieurs déterminations se permutent).

([2]) Le point a n'est pas nécessairement isolé, mais, par exemple, peut faire partie d'une coupure.

lesquelles les coefficients différentiels $f_i(x, y_1, \ldots, y_m)$ du système (1) sont holomorphes; l'intégrale $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ de (1), définie par les conditions initiales x_0, $y_1^0, \ldots, y_m^0$, reste holomorphe, quand x varie à partir de x_0 sur un chemin L, tant que x ne dépasse pas un certain point $\overline{a}$; ce point $\overline{a}$ est un point singulier, soit *algébrique*, soit *transcendant*, soit *essentiel* des fonctions $y_i(x)$. Le premier cas se traite élémentairement; le second cas conduit à l'étude des intégrales de (1) dans le voisinage de conditions initiales *singulières* $x = a, y_1 = b_1, \ldots, y_m = b_m$; le troisième cas semble, *a priori*, échapper à toute méthode. Aussi l'existence de *singularités essentielles mobiles*, que rien ne fait prévoir sur les équations, constitue-t-elle une des plus graves difficultés qu'on rencontre dans la théorie analytique des systèmes différentiels.

Ces points essentiels mobiles peuvent affecter les distributions les plus diverses :

1° Ils peuvent être *isolés* ou limites de points isolés.

C'est ce qui a lieu, par exemple, pour l'équation algébrique du second ordre dont l'intégrale générale est

$$y = sn_{k^2}[a + \log(x + b)],$$

a et b désignant deux constantes arbitraires, k^2 une constante numérique.

2° Ils peuvent former (dans une certaine aire du plan des x) un ensemble *dont aucun point n'est isolé*, sans que cet ensemble constitue nulle part une *ligne*.

Un tel exemple est fourni par les équations du troisième ordre que vérifient les fonctions fuchsiennes de la troisième famille.

3° Ils peuvent former des *lignes* singulières mobiles.

C'est ce qui a lieu pour les équations du troisième ordre dont l'intégrale est soit une fonction fuchsienne existant seulement dans un cercle, soit une fonction kleinéenne, admettant comme coupure une ligne non analytique sans courbure.

4. Si maintenant on étudie l'intégrale (1)

$$y_1 = \varphi_1(x, y_1^0, \ldots, y_m^0, \overline{x_0}), \ldots, y_m = \varphi_m(x, y_1^0, \ldots, y_m^0, \overline{x_0})$$

(1) Étant donnée une fonction φ de plusieurs variables $x_1, \ldots, x_n$, nous repré-

comme fonction des constantes $y_1^0, \ldots, y_m^0$, il est clair que, dans les hypothèses 1°, 2° et 3°, les fonctions φ présentent (par rapport à une quelconque des variables y_i^0) des singularités transcendantes variables avec x et affectant des distributions analogues à celles que nous venons d'énumérer. Mais une nouvelle source de difficultés provient de ce fait que les fonctions φ peuvent admettre, dans le champ des variables y_i^0, des singularités essentielles indépendantes de x, comme le montre l'équation $y'' = \frac{y'^2}{y}$, dont l'intégrale est $y = y_0 e^{\frac{y'_0}{y_0}(x - x_0)}$.

Il est donc indispensable de prévoir, dans les raisonnements employés, l'existence de toutes ces espèces de singularités. On conçoit que les quelques théorèmes généraux connus sur les fonctions analytiques de plusieurs variables et leurs singularités ne soient pas ici d'un grand secours; car ces théorèmes (en dehors de quelques propositions tout élémentaires) supposent que les singularités satisfont à certaines conditions restrictives, conditions que rien ne nous autorise à croire remplies par les fonctions $\varphi_i(x, y_1^0, \ldots, y_m^0, \overline{x_0})$. Par exemple, nous ne savons pas si les singularités des φ_i sont définies par des relations *analytiques* entre les affixes des variables, et l'exemple des fonctions kleinéennes montre qu'il n'en est pas nécessairement ainsi. Tout ce que nous savons, c'est que, dans le plan d'une des variables, les singularités des φ_i sont fixes ou varient avec les autres variables d'une façon continue.

5. Ces remarques étaient nécessaires pour éclairer les résultats que je vais brièvement résumer. Ces résultats sont de nature bien différente suivant que le système (1) considéré est du premier ordre ou d'ordre supérieur. J'ai traité longuement, et d'une manière très élémentaire, le cas du premier ordre, qui comporte évidemment les théorèmes les plus précis. L'avantage, au point de vue de l'exposition, c'est que certains raisonnements, une fois

---

sentons, dans ce qui suit, par $\varphi(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_{i-1}}, x_i, \overline{x_{i+1}}, \ldots, \overline{x_n})$ la fonction de x_i obtenue en laissant à toutes les variables, sauf à x_i, des valeurs numériques $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$ quelconques.

développés sous leur forme la plus simple pour le premier ordre, s'étendent d'eux-mêmes aux ordres supérieurs, ce qui permet, par la suite, de réserver toute l'attention aux difficultés vraiment nouvelles qu'entraîne l'élévation de l'ordre.

6. *Équations du premier ordre.* — La théorie analytique des équations du premier ordre

$$F(y', y, x) = 0, \tag{A}$$

algébriques en y', y, analytiques en x, repose sur les deux propositions suivantes, dont aucune ne subsiste pour le second ordre :

Théorème I. — *Une intégrale $y(x)$ de* (A) *ne peut admettre, comme points singuliers non algébriques, que certains points fixes $x = \xi$ qui se mettent en évidence sur l'équation même.* Quand l'équation (A) est algébrique en x, ces points ξ sont en nombre fini et s'obtiennent algébriquement.

Théorème II. — *Soit y_0 la valeur de $y(x)$ pour $x = x_0$, et soit $y = \varphi(x, y_0, x_0)$ l'intégrale générale de* (A). *Si $\overline{x}$, $\overline{x_0}$ désignent deux valeurs numériques quelconques distinctes des valeurs ξ, la fonction $y = \varphi(\overline{x}, y_0, \overline{x_0})$ ne présente dans tout le plan des y_0 (à distance finie ou infinie) que des points singuliers algébriques* ([1]).

Ces propositions entraînent d'importantes conséquences pour une équation *quelconque*

$$F_1(y', y, x) = 0 \tag{A₁}$$

algébrique en y', y, x. Elles montrent, par exemple, qu'une transformation homographique à deux variables, effectuée sur x, y, ramène (A_1) à une équation dont aucune intégrale n'a de points *essentiels.* Elles permettent d'étendre aux intégrales d'une équation (A_1) *quelconque* le célèbre théorème de M. Picard *sur les*

([1]) La valeur $x = \xi$ peut être une singularité essentielle de $\varphi(x, y_0, x_0)$, quels que soient y_0, x_0. Quand il n'en est pas ainsi, la fonction $\varphi(\xi, y_0, \overline{x_0})$ peut admettre, dans le plan des y_0, des singularités transcendantes ou essentielles. Les mêmes remarques s'appliquent aux valeurs $x_0 = \xi$.

zéros des fonctions entières; supposons, pour simplifier l'énoncé, que (A_1) ne possède aucune solution de la forme $y =$ const.; si $y(x)$ est une transcendante quelconque (uniforme ou non) vérifiant (A_1), l'égalité

$$y(x) - b = 0$$

admet une infinité de racines, exception faite pour un nombre *fini* de valeurs de b qui sont *fixes* et mises en évidence par l'équation différentielle.

7. Passons aux équations (A) dont l'intégrale ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles. Il résulte aussitôt des théorèmes I et II que l'intégrale $y = \varphi(x, y_0, \overline{x_0})$ d'une telle équation est fonction algébrique de y_0. Inversement, si l'intégrale $y = \varphi(x, C)$ d'une équation (A) est une fonction algébrique de la constante arbitraire C, $y(x)$ n'acquiert autour des points critiques mobiles qu'un nombre fini de déterminations. La classe des équations (A) dont l'intégrale générale $y(x)$ est une fonction algébrique de la constante (convenablement choisie), et la classe des équations (A) dont l'intégrale $y(x)$ n'admet qu'un nombre fini de branches permutables autour des points critiques mobiles, se confondent donc. Il en est tout autrement pour les équations du second ordre : la première classe n'est qu'une catégorie de la seconde.

Les équations (A) *à points critiques fixes* sont les plus simples de la classe en question. Ces équations ont déjà fait l'objet des recherches de M. Fuchs et de M. Poincaré. M. Fuchs a formé les conditions nécessaires pour qu'une équation (A) ait ses points critiques fixes. M. Poincaré, par une belle méthode d'intégration, est parvenu à ce résultat bien remarquable que l'intégrale $y(x)$ d'une équation (A) à points critiques fixes s'obtient algébriquement, ou par quadratures, ou dépend d'une équation de Riccati.

Mais les travaux des deux illustres géomètres prêtaient à deux objections bien différentes que les théorèmes I et II permettent seuls de lever : M. Fuchs s'est borné à exprimer que toute solution $y(x)$ de (A), qui, pour $x = x_0$, prend une valeur *déterminée* y_0, est uniforme dans le domaine de x_0; on pouvait se demander si toutes les équations (A) répondant aux conditions

de M. Fuchs avaient vraiment leurs points critiques fixes; appliquées au second ordre, ces conditions conduisaient à regarder comme à points critiques fixes des équations dont l'intégrale possède, en réalité, des points mobiles à la fois essentiels et critiques; pour le premier ordre, il se trouve que les conditions de M. Fuchs sont suffisantes, mais c'est en vertu du théorème I. Quant à la méthode de M. Poincaré, elle s'appuie sur la correspondance *birationnelle* qui existe entre les valeurs $y(x)$, $y'(x)$ d'une solution et les valeurs initiales y_0, y'_0; mais la démonstration de M. Poincaré établit seulement que ladite correspondance est *biuniforme* ([1]); les équations intégrées par M. Poincaré avaient donc bien leurs points critiques fixes, mais il n'était pas certain qu'elles fussent les seules. Appliquée au second ordre, la méthode de M. Poincaré n'épuisait pas toutes les équations à points critiques fixes. Pour le premier ordre, l'objection s'évanouit si l'on tient compte du théorème II : la relation entre y, y' et y_0, y'_0 ne peut être biuniforme sans être birationnelle.

8. Considérons maintenant une équation (A) dont l'intégrale n'acquiert que n déterminations autour des points critiques mobiles. Les théorèmes I et II permettent d'établir *qu'une telle équation se ramène algébriquement à une équation* (A) *dont les points critiques sont fixes.*

J'insiste sur cette dernière proposition, qui peut sembler évidente au premier abord. Prenons, pour plus de simplicité, une équation (A) algébrique en y', y, x, soit

$$(A_1) \qquad F_1(y', y, x) = 0.$$

Si l'intégrale générale $y(x)$ de (A_1) prend exactement n valeurs autour des points critiques mobiles, il est clair qu'elle vérifie une relation (et une seule) de la forme

$$y^n + R_{n-1} y^{n-1} + \ldots + R_1 y + R_0 = 0,$$

([1]) On montre, il est vrai, bien aisément que toute correspondance *biuniforme* entre deux surfaces de Riemann qui n'admet, sur une de ces surfaces, que des points singuliers *isolés*, est nécessairement *birationnelle*. Mais la correspondance entre y', y et y'_0, y_0 pouvait, *a priori*, admettre des singularités plus compliquées, des lignes singulières par exemple, ainsi que cela a lieu pour le 3e ordre.

où les R sont des fonctions de x et d'une constante c, dont les points critiques dans le plan des x sont *fixes*. Si on élimine c entre les R_i, $\frac{dR_i}{dx}$, ces fonctions s'expriment à l'aide d'une d'entre elles (soit R_0) et de x. Mais, d'une part, il n'est pas évident que les fonctions

$$R_i = \psi_i(R_0, x), \qquad \frac{dR_i}{dx} = \psi'_i(R_0, x)$$

soient algébriques en R_0; si la chose est vraie, c'est à cause du théorème II, qui montre que les R_i sont algébriques en y_0. D'autre part, cette première condition remplie, il n'est pas évident que les coefficients $a(x)$ de ces fonctions algébriques ψ_i, ψ'_i de R_0 soient algébriques en x; si la chose est vraie, c'est à cause du théorème I, qui permet d'exprimer algébriquement qu'une équation (A_1) a ses points critiques fixes. Étendue *au second ordre*, la proposition analogue n'est plus exacte, en général, parce que les $R_i(x, y_0, y'_0)$ peuvent renfermer sous forme transcendante les constantes y_0, y'_0. Dans le cas même *du premier ordre*, la proposition étendue *à tous les points critiques tant fixes que mobiles* est en défaut. Je m'explique : supposons que l'intégrale générale $y(x)$ de (A_1) soit une fonction qui n'admette, dans tout le plan des x, que N branches; elle vérifie une relation (et une seule) de la forme

$$y^N + R_{N-1}(x, C)y^{N-1} + \ldots + R_1(x, C)y + R_0(x, C) = 0,$$

où les R_i sont des fonctions uniformes de x qui dépendent algébriquement d'une constante C. Si on élimine C entre les R_i, $\frac{dR_i}{dx}$, les fonctions

$$R_i = \psi_i(R_0, x), \qquad \frac{dR}{dx} = \psi'_i(R^0, x),$$

algébriques en R_0, ne sont pas en général algébriques en x; leurs coefficients sont des intégrales particulières, parfaitement déterminées, de certaines équations différentielles non intégrables; et cela tient à ce qu'on ne sait pas exprimer algébriquement que l'intégrale générale $y(x)$ d'une équation (A_1) est *uniforme*.

D'après ce qui précède, représentons par (E_n) une équation (A_1) quelconque dont l'intégrale $y(x)$ n'acquiert que n valeurs autour

des points critiques mobiles, par T_n une solution quelconque $y(x)$ d'une équation (E_n) : toute équation (E_n) se ramène algébriquement à une équation (E_1); *toute transcendante* T_n *s'exprime en fonction de x et d'une transcendante* T_1. Au contraire, soit $(\mathfrak{E}_n)$ une équation (A_1) quelconque dont l'intégrale générale $y(x)$ est une fonction à n branches, soit $\mathfrak{T}_n$ une solution quelconque d'une telle équation : *une transcendante $\mathfrak{T}_n$ n'est pas, en général, une combinaison algébrique de x et de transcendantes $\mathfrak{T}_1$.*

9. La nature de l'intégrale $y(x)$ se trouvant ainsi définie dans l'hypothèse où $y(x)$ n'acquiert qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, une question se pose d'elle-même : *Étant donnée une équation* (A), *comment reconnaître si elle rentre dans la catégorie étudiée?*

J'établis d'abord à ce sujet la proposition suivante : *On sait reconnaître, à l'aide d'un nombre fini d'opérations, si l'intégrale $y(x)$ d'une équation* (A) *donnée ne prend (autour des points critiques mobiles) qu'un nombre donné n de valeurs : quand il en est ainsi, l'équation s'intègre algébriquement, ou se ramène algébriquement soit à une équation de la forme*

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = h(x)\,dx,$$

soit à une équation de Riccati.

Mais est-il possible de traiter la même question sans se donner n ou une limite supérieure de n? Il n'y avait guère lieu de l'espérer d'après les essais infructueux tentés sur *le cas particulier le plus simple, celui où x ne figure pas explicitement dans* (A). Comme l'intégrale d'une équation

$$(\alpha) \qquad F(y', y) = 0$$

ne saurait admettre de points singuliers fixes, la question est, dans ce cas, de reconnaître si l'intégrale $y(x)$ de (α) est une fonction à un nombre fini de branches : quand il en est ainsi, $y(x)$ est une fonction algébrique de x, ou de $e^{\lambda x}$, ou de $sn_{k^2}\lambda x$, λ et k^2 étant numériques; dans la première hypothèse, le problème se traite élémentairement; dans la seconde, tout revient à déterminer si

une certaine intégrale abélienne, dont tous les infinis sont logarithmiques, n'a qu'une période : c'est là une question qu'on ne sait traiter que dans des cas très particuliers, par les méthodes *arithmétiques* de Tchebycheff et Zolotareff. Enfin, dans la troisième hypothèse, la difficulté est de savoir si une certaine intégrale abélienne de première espèce n'a que deux périodes : ce problème est encore à résoudre.

Il était donc naturel de penser que la question analogue, relative aux équations (A) où x figure explicitement, était plus inabordable encore. En approfondissant la forme de l'intégrale générale $y = \varphi(x, y_0, \overline{x_0})$ par rapport à la constante, je suis parvenu néanmoins au théorème suivant :

Étant donnée une équation

$$(A_1) \qquad F_1(y', y, x) = 0$$

algébrique en y', y, x, on sait (à l'aide d'un nombre fini d'opérations) reconnaître si l'intégrale $y(x)$ est une fonction transcendante *qui ne prend qu'un nombre fini* (non donné) *de valeurs autour des points critiques, ou ramener l'équation aux quadratures.*

De plus, dans les cas singuliers où l'on sait seulement ramener l'équation aux quadratures, il reste à déterminer si une certaine équation $G\left(\frac{du}{dx}, u\right) = 0$ admet comme intégrale une fonction à un nombre fini de branches : de sorte que *la question posée serait complètement résolue pour une équation* (A_1) *quelconque, si elle l'était pour les équations où x ne figure pas.* Ces dernières équations, les plus simples en apparence, constituent (au point de vue qui nous occupe) un type exceptionnel qui met en défaut la théorie des fonctions et exige des recherches *arithmétiques*.

10. Une autre circonstance bien remarquable, c'est que les mêmes méthodes, quand on les emploie à reconnaître si l'intégrale de (A_1) est *algébrique*, sont loin de conduire à des résultats aussi précis : le cas *algébrique* apparaît donc ici comme plus compliqué que le cas *transcendant*. J'ai consacré deux Leçons au problème de l'intégration algébrique des équations du premier

ordre. Ce problème, sur lequel M. Darboux a publié, en 1877, un Mémoire magistral, a été repris dans ces dernières années par M. Autonne, M. Poincaré et moi. Les méthodes proposées jusqu'ici, quand on les combine, permettent, dans des cas très étendus, de reconnaître si une équation donnée (A_1) s'intègre algébriquement ou de ramener l'équation aux quadratures. J'ai indiqué explicitement les cas pour lesquels ces méthodes sont sûrement insuffisantes, et j'ai montré que la question ne saurait faire aucun progrès essentiel si on n'introduit pas, d'une manière ou d'une autre, une condition, distincte de celles que nous possédons déjà, pour exprimer que l'intégrale algébrique est mise sous forme *irréductible*.

Ce qui m'a décidé à insister longuement sur ce point, ce n'est pas seulement l'importance intrinsèque d'un problème si naturel et, en apparence, si simple, c'est aussi la multitude de questions (intéressant les équations différentielles) dans lesquelles la même difficulté, relative à l'irréductibilité d'une relation algébrique, est l'obstacle principal et veut être surmontée par des procédés analogues. Nous serons amenés, par exemple, dans la suite de ces Leçons, à considérer les équations du second ordre qui admettent une intégrale première

$$\varphi(y', y, x, C) = 0,$$

où φ est un polynome en y', y, C. Quand on n'exprime d'aucune manière que la courbe $\varphi(y', \overline{x}, \overline{C}) = 0$ est irréductible, il est clair qu'on ne peut espérer reconnaître, en général, si une équation quelconque donnée possède une telle intégrale première.

11. *Systèmes différentiels du second ordre.* — Dès que l'ordre du système différentiel dépasse l'unité, des complications toutes nouvelles s'introduisent, dont la plus grave est l'existence possible de points essentiels mobiles (critiques ou non). Les types connus d'équations de second ordre dont l'intégrale présente cette singularité sont si simples qu'il ne semblait pas douteux qu'une équation de second ordre *prise au hasard* n'en fût affectée. C'est le contraire qui est vrai : *les systèmes* (1), *dont l'intégrale générale possède des points essentiels mobiles, forment une classe exceptionnelle.*

Considérons, pour fixer les idées, un système du second ordre

$$(1)' \qquad \frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z),$$

où f_1, f_2 sont rationnels en y, z. Si on remplace y par $\frac{y}{t}$, z par $\frac{z}{t}$, le système s'écrit

$$(2) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{t\,dy - y\,dt}{tA - yC} = \frac{t\,dz - z\,dt}{tB - zC},$$

où X, A, B, C sont des polynomes homogènes en y, z, t, le premier de degré q, les autres de degré $q+1$ (analytiques en x).

Dans l'étude analytique d'un tel système, les théorèmes suivants jouent un rôle fondamental :

Théorème I. — *Si les polynomes* X, A, B, C *sont les plus généraux de leur degré, l'intégrale générale*

$$(3) \qquad y = \varphi(x, y_0, z_0, \overline{x_0}), \qquad z = \psi(x, y_0, z_0, \overline{x_0}), \qquad t \equiv 1$$

du système donné ne peut admettre de singularités mobiles non algébriques.

Théorème II. — *Pour que l'intégrale générale* $y = \varphi$, $z = \psi$ *admette des singularités transcendantes mobiles, il faut (mais il ne suffit pas) que les égalités*

$$X = 0, \qquad tA - yC = 0, \qquad yB - zC = 0, \qquad zC - tB = 0$$

soient compatibles (quel que soit x*) pour des valeurs de* y, z, t, *qui ne soient pas toutes nulles.*

Théorème III. — *Pour que l'intégrale générale* $y = \varphi$, $z = \psi$ *admette des singularités essentielles mobiles, il faut (mais il ne suffit pas) que le polynome* $X(y, z, t, x)$ [*ou un de ses diviseurs* $X_1(y, z, t, x)$] *définisse une intégrale première particularisée du système* (2).

12. Quand il existe des singularités transcendantes ou essentielles mobiles, l'intégrale générale $y = \varphi$, $z = \psi$, considérée comme fonction des deux constantes y_0, z_0, est affectée de singularités transcendantes variables avec x. Mais peut-elle présenter

des singularités non algébriques *indépendantes* de x? A cette question répond ce nouveau théorème :

Théorème IV. — *Pour que les fonctions* $y = \varphi(\overline{x}, y_0, \overline{z_0}, \overline{x_0})$, $z = \psi(\overline{x}, y_0, \overline{z_0}, \overline{x_0})$ [ou $y = \varphi(\overline{x}, \overline{y_0}, z_0, \overline{x_0})$, $z = \psi(\overline{x}, \overline{y_0}, z_0, \overline{x_0})$] *présentent dans le plan des* y_0 (*ou dans le plan des* z_0) *des singularités non algébriques indépendantes de* x, il faut (mais il ne suffit pas) que la condition du théorème III soit remplie. De plus, les affixes d'une telle singularité rendus homogènes, soit $y_0 = \frac{Y_0}{T_0}$, $z_0 = \frac{Z_0}{T_0}$, vérifient la relation

$$X(Y_0, Z_0, T_0, x_0) = 0. \tag{4}$$

En particulier, quand l'intégrale générale $y(x)$, $z(x)$ n'admet, comme singularités mobiles, que des points algébriques, les fonctions $y = \varphi$, $z = \psi$, regardées comme fonctions d'une quelconque des deux constantes y_0, z_0, n'admettent que des singularités algébriques, *à moins que la condition du théorème III ne soit remplie*. Dans ce dernier cas, les affixes des singularités transcendantes (rendus homogènes) vérifient la relation (4).

13. Les propositions s'étendent à un système (1) *quelconque* où les $f_i(y_1, \ldots, y_m, x)$ sont algébriques en $y_1, \ldots, y_m$. Elles entraînent d'importantes conséquences : considérons, par exemple, un système

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}, \tag{1$''$}$$

où X, Y, Z sont algébriques en x, y, z et où x, y, z jouent un rôle *symétrique;* j'entends par là qu'on se propose d'étudier les relations entre x, y, z définies par (1)″ sans fixer la variable indépendante. On voit aussitôt qu'une transformation homographique à trois variables effectuée sur x, y, z ramène le système (1)″ à une forme telle que la nouvelle intégrale $y(x)$, $z(x)$ ne présente plus de singularités *essentielles*. On n'a plus dès lors à se préoccuper que des singularités *transcendantes*.

Quand la variable indépendante est, au contraire, *donnée*, notamment quand on veut étudier les systèmes dont l'intégrale générale $y(x)$, $z(x)$ n'acquiert qu'un nombre fini de valeurs autour

des points critiques mobiles, il est loisible seulement d'effectuer sur y, z une transformation algébrique (où x figure analytiquement) et de changer x en $\chi(x)$. Mais ces transformations ne font pas disparaître les singularités essentielles mobiles de l'intégrale, s'il en existe. Pour appliquer à la discussion de ces singularités les théorèmes I, II et III, j'ai dû préciser les propriétés d'une fonction uniforme (ou à n branches) dans le voisinage d'un point singulier.

14. Quand une fonction analytique $y(x)$, uniforme dans une certaine aire A, admet dans cette aire le point $x = \bar{a}$ comme point singulier (non polaire) *isolé*, on sait qu'elle est complètement indéterminée dans le domaine de $x = \bar{a}$; d'une façon plus précise, un théorème de M. Picard exprime qu'elle prend une infinité de fois toutes les valeurs $y = A$, sauf deux au plus. La même proposition subsiste évidemment si $\bar{a}$ est un point limite de points transcendants isolés. Mais *qu'arrive-t-il quand $\bar{a}$ appartient à un ensemble parfait* E *de points singuliers?* La seule chose qui soit certaine, *a priori*, c'est que les fonctions $y(x)$, $y'(x)$ ne peuvent être *toutes deux* continues dans un cercle de centre $\bar{a}$, si petit que soit le rayon de cercle. Deux cas sont à distinguer, suivant que $\bar{a}$ fait ou non partie d'une *coupure*, autrement dit suivant que l'ensemble parfait E est *bien enchaîné ou mal enchaîné*. Dans le premier cas, il est possible que $y(x)$, $y'(x)$ tendent vers une limite, quand x tend vers $\bar{a}$ sur un chemin quelconque sans rencontrer de points E. *Dans le second cas,* au contraire, je montre que $\bar{a}$ *ou bien est un point essentiel de $y(x)$* (j'entends que y est indéterminé quand x tend vers $\bar{a}$ sans rencontrer de points E) *ou bien est un point limite de points essentiels* (¹).

(¹) On peut préciser beaucoup ce théorème et montrer que $y(x)$ est *complètement indéterminé* pour $x = \bar{a}$; j'entends que (dans le domaine de $x = \bar{a}$) $y(x)$ s'approche autant que l'on veut de toute valeur donnée à l'avance. Mais j'ai seulement esquissé dans ces Leçons la démonstration assez délicate de cette dernière proposition à laquelle nous n'aurons pas recours par la suite. J'ai insisté, d'autre part (p. 440-441), sur la nécessité de séparer les transcendantes *uniformes* en trois grandes classes T, T′, T″, T représentant les transcendantes qui possèdent

De plus, soit A une aire attenant à une ligne (c'est-à-dire à un ensemble parfait bien enchaîné de points E); *si la fonction $y(x)$ est holomorphe dans* A *et s'annule en chaque point* E, *elle est identiquement nulle*.

15. Ces propositions, jointes aux théorèmes I, II, III, IV, conduisent à partager les systèmes du second ordre en deux catégories. Considérons une équation

$$(B) \qquad F(y'', y', y, x) = 0$$

algébrique en y'', y', y, analytique en x, et convenons d'appeler *transformée algébrique* de (B) toute équation du second ordre qui se déduit de (B) en remplaçant y par $z = \chi(y, y', x)$, où χ est algébrique en y, y', et analytique en x. Nous dirons que *l'équation* (B) *est de* la classe singulière, *si elle satisfait* (*ainsi que toutes ses transformées algébriques*) *aux deux conditions suivantes :*

1° Une branche au moins de la fonction $y''(y', \bar{y}, \bar{x})$ définie par (B) est telle que $\frac{y''}{y'^2}$ reste fini pour $y' = \infty$;

2° La fonction $y''(y', y, x)$ admet au moins un pôle $y = G(x)$ (d'ordre égal à 1 ou plus grand que 1) indépendant de y'. Ce pôle peut être d'ailleurs $y = \infty$: j'entends par là que, dans la trans-

---

au moins un point essentiel isolé, T' celles qui possèdent un ensemble parfait mal enchaîné de points singuliers, T'' celles qui n'ont d'autres singularités transcendantes que des coupures. Aux transcendantes T s'appliquent les deux théorèmes de M. Picard :

1° *L'égalité* $T(x) - A = 0$ *a une infinité de racines, sauf au plus pour deux valeurs de* A.

2° *Si deux fonctions* T *vérifient une relation algébrique, cette relation est de genre zéro ou* 1.

Ces deux théorèmes sont en défaut pour les fonctions T', comme pour les fonctions T'', ainsi qu'il résulte des travaux de M. Poincaré. Deux fonctions T' (ou deux fonctions T'') peuvent vérifier une relation algébrique de genre quelconque. Il existe des fonctions T' (ou T'') qui ne prennent pas q valeurs données à l'avance (si grand que soit q). Mais, tandis qu'une transcendante T' s'approche autant qu'on le veut de toute valeur A, le module d'une transcendante T'' peut, par exemple, rester inférieur à un nombre positif fini N.

formée de (B) en $y = \frac{1}{z}$, la fonction $z''(z', z, x)$ admet $z = 0$ comme pôle (d'ordre au moins égal à 1), quels que soient z' et x.

Toute équation (B) qui n'est pas de la classe singulière est dite de la *classe générale*. Pour qu'une équation (B) soit de la classe générale, il faut donc et il suffit qu'une de ses transformées algébriques échappe à une des deux conditions précédentes.

Cette définition admise, on établit le théorème suivant :

Soit E_n une équation (B) quelconque dont l'*intégrale générale* $y(x)$ n'acquiert qu'un nombre n de valeurs autour des points critiques mobiles. *Si* E_n *est de la classe* générale, $y(x)$ *est une fonction* algébrique *de deux constantes* y_0, y'_0.

Si E_n *est de la classe* singulière, *ou bien* $y(x)$ *a des singularités* essentielles mobiles, *ou bien* $y(x)$ *n'a d'autres singularités mobiles que des pôles. Dans ce dernier cas,* $y = \varphi(\overline{x}, y'_0, y_0, \overline{x_0})$ *est une fonction* transcendante (*à un nombre fini de branches de* y'_0, y_0, *et admet* $y'_0 = \infty$ *comme point essentiel ainsi qu'une au moins des valeurs* $y_0 = G(\overline{x_0})$; *en dehors des valeurs* $y'_0 = \infty$, $y_0 = G(\overline{x_0})$, *elle ne présente que des singularités algébriques*.

Sous une forme plus brève, on peut dire que *l'intégrale d'une équation* E_n *renferme les constantes* y_0, y'_0 *sous forme* algébrique *ou* transcendante, *suivant que* E_n *appartient à la classe* générale *ou à la classe* singulière.

Une classification et des théorèmes analogues s'appliquent à un système (1) quelconque.

16. D'après ce qui précède, ce sont les équations E_n de la classe *générale* dont l'étude est évidemment la plus simple. Tout d'abord, je montre que, pour ces équations, le cas de n quelconque se ramène au cas de $n = 1$; autrement dit, *toute équation dont l'intégrale est une fonction algébrique de deux constantes est réductible algébriquement à une équation dont l'intégrale* $y(x)$ *a ses points critiques fixes et renferme rationnellement les constantes* y_0, y'_0, y''_0 [liées par la relation $F(y''_0, y'_0, y_0, \overline{x_0}) = 0$]

Cette proposition comporte les mêmes remarques que la proposition analogue relativement au premier ordre (§ 8).

Tout revient donc à étudier les équations dont l'intégrale dépend rationnellement de y_0, y'_0, y''_0. C'est M. Picard, dans ses belles et profondes recherches sur les fonctions algébriques de deux variables, qui a considéré, le premier, cette catégorie d'équations, et les résultats auxquels il est parvenu constituent une des plus importantes applications de ses théorèmes bien connus sur les transformations birationnelles des surfaces algébriques. Ces résultats, et ceux que j'ai obtenus en prenant comme points de départ les recherches de M. Picard, *permettent d'élucider la nature de l'intégrale dans tous les cas où elle dépend algébriquement des constantes.* On trouve que toute équation E_n de la classe générale ou bien équivaut à une combinaison *de deux équations du premier ordre à points critiques fixes,* ou bien se ramène *algébriquement,* soit à une équation *linéaire,* soit *à un système hyperelliptique* (5) :

$$(5)\quad \frac{dy}{\sqrt{R(y)}}+\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}=h(x)dx, \qquad \frac{y\,dy}{\sqrt{R(y)}}+\frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}}=k(x)dx,$$

$$R(u)\equiv a_0+a_1u+a_2u^2+a_3u^3+a_4u^4+a_5u^5.$$

Pour établir ces résultats, j'ai dû faire une longue digression sur les transformations des surfaces algébriques. Les Leçons 15 et 16 renferment une théorie *complètement achevée* des surfaces qui admettent un groupe continu fini de transformations birationnelles. Cette théorie comporte beaucoup d'autres applications : elle permet, par exemple, de *former explicitement tous les groupes continus finis à deux variables qui sont algébriques.*

J'ai eu besoin aussi de m'appuyer sur le célèbre théorème qu'a *énoncé* (sans en indiquer de démonstration) M. Weierstrass *sur les fonctions de plusieurs variables qui possèdent un théorème d'addition*. La 16e Leçon contient une démonstration rigoureuse de ce théorème, démonstration qui présente de très profondes difficultés.

J'ajoute que les méthodes et les résultats indiqués dans ce paragraphe s'étendent sans modification *à un système différentiel quelconque dont l'intégrale ne dépend que d'un nombre* fini *de constantes qui y figurent* algébriquement.

17. Les propositions précédentes montrent que les transcen-

dantes à n branches définies par une équation E_n de la classe *générale* ne se distinguent pas de celles qu'introduisent les équations linéaires et les quadratures. La même conclusion s'applique-t-elle aux équations E_n de la classe *singulière?*

L'intégrale $y(x)$ d'une telle équation est nécessairement une fonction transcendante de y_0, y'_0. Mais deux cas sont à distinguer, suivant qu'il est ou non possible de choisir les constantes d'intégration *de façon que $y(x)$ soit une fonction algébrique d'une des constantes*. Je conviens de dire que l'intégrale est, dans le premier cas, une fonction *semi-transcendante*, dans le second cas une fonction *transcendante de deux constantes*.

Dans le premier cas, j'ai réussi à élucider la nature de l'intégrale, et j'ai montré que l'équation E_n équivaut à une combinaison de deux équations du premier ordre à points critiques fixes. Les seules équations E_n de la classe singulière qui ne soient pas nécessairement réductibles aux équations du premier ordre sont donc celles *dont l'intégrale renferme les deux constantes sous forme transcendante de quelque façon qu'on les choisisse.*

J'ai dû préciser, à ce sujet, le sens qu'il convient d'attacher ici au mot *irréductibilité*. Dans la plupart des travaux qui traitent de la réduction des équations différentielles, les variables qui figurent dans les équations jouent un rôle *symétrique*; on regarde, par exemple, l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = dx$$

comme définissant une relation entre x et y (relation qui dépend d'une constante). Au contraire, dans les problèmes qui font l'objet principal de ces Leçons, la variable indépendante est *donnée*; on se propose d'étudier les transcendantes $y(x)$ engendrées par l'équation

$$y'^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2),$$

ou les transcendantes $y(x)$ engendrées par l'équation

$$y'^2 = \frac{1}{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

et les deux problèmes sont distincts : le point de vue de Legendre

et celui d'Abel et de Jacobi, au lieu d'être confondus comme tout à l'heure, sont maintenant séparés.

En assujettissant la variable indépendante *à rester la même*, j'ai été conduit à une définition précise de l'irréductibilité, définition plus restreinte que celle qu'il faudrait adopter dans d'autres recherches, mais qui s'imposait ici ([1]). Une fois admise cette définition (qui se trouve développée dans la 21e Leçon), on peut établir ce théorème : *Pour qu'une équation* E_n *de la classe singulière (algébrique en* y'', y', y, x*) soit irréductible, il faut et il suffit que son intégrale soit une fonction transcendante (et non semi-transcendante) des deux constantes.*

18. La question est maintenant de savoir s'il existe de telles équations E_n. La réponse est affirmative, ainsi qu'on le montre en formant un type d'équations à points critiques fixes dont l'intégrale est une fonction uniforme de y_0, y'_0, qui reste transcendante par rapport aux deux constantes quelles que soient les constantes qu'on substitue à y_0, y'_0.

Quant à la formation de toutes les équations E_n irréductibles et de la classe singulière, c'est là un problème du plus haut intérêt, mais qui exige encore de longues recherches. Je me suis borné à donner un aperçu des principaux résultats que j'ai obtenus jusqu'ici, tels que *la détermination de toutes les équations à points critiques fixes de la forme*

$$y'' = R(y', y),$$

où R *est rationnel en* y', y *et indépendant de* x; *la détermination* [*en supposant le genre p de la surface* $F(y'', y', y, \overline{x}) = 0$ *supérieur à l'unité*] *de toutes les équations* $F(y'', y', y, x) = 0$, *dont l'intégrale générale* $y(x)$ *n'a comme singularités mobiles que des pôles,* etc. Dans ce dernier problème, la théorie des transformations *biuniformes* des surfaces algébriques joue un

---

([1]) C'est ainsi que l'équation algébrique $F(y''', y'', y', y) = 0$, qui engendre la fonction modulaire $y = \varphi(x)$, est *irréductible* au sens que nous adoptons, bien que cette équation se ramène par des quadratures à une équation de Riccati, quand on y regarde x comme une fonction de y.

rôle essentiel. Ces résultats, et d'autres encore incomplets, seront exposés en détail dans des Mémoires ultérieurs.

19. J'observe, enfin, qu'à un système de la forme (1) il est loisible de substituer un système différentiel quelconque (S) portant sur m fonctions $y_1, \ldots, y_m$ de q variables $x_1, \ldots, x_q$, algébrique par rapport aux y et à leurs dérivées, et dont l'intégrale générale ne dépend que d'un nombre *fini* de constantes. Toutes les propositions énoncées plus haut pour un système (1) s'étendent à un tel système (S).

Appliquées, en particulier, aux systèmes (S) de la forme

$$P_{1,i}(y_1, \ldots, y_m)\,dy_1 + \ldots + P_{m,i}(y_1, \ldots, y_m)\,dy_m = dx_i,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m),$$

où les premiers membres sont des différentielles totales exactes, ces généralités permettent d'édifier toute une théorie des fonctions méromorphes $2m$ fois périodiques de m variables, sans rien emprunter à la doctrine des courbes algébriques. Elles permettent encore de *déterminer toutes les fonctions uniformes* $x(u, v)$, $y(u, v)$ *définies par l'inversion de deux différentielles totales algébriques*

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = du, \qquad P_1(x, y)\,dx + Q_1(x, y)\,dy = dv;$$

ces couples de fonctions $x(u, v), y(u, v)$ renferment notamment un type *quadruplement périodique et non méromorphe*. Mais le développement de ces indications m'eût entraîné trop loin.

20. C'est au point de vue de la théorie des fonctions analytiques que je me suis placé jusqu'ici. Mais il est clair que les méthodes précédentes s'appliquent aussi bien, et même se simplifient, quand, au lieu d'embrasser le domaine complexe de la variable, on se restreint *aux valeurs réelles*. Dans une dernière Leçon, j'ai exposé quelques-unes des principales conséquences qu'entraînent ces méthodes pour les systèmes différentiels *où la variable et les fonctions sont réelles*, et notamment pour les équations de la *Dynamique*.

Soit S un système matériel à n degrés de liberté, dont les liaisons sont indépendantes du temps, et qui est soumis à des forces

fonctions seulement de la position de S. Le problème général de la Dynamique consiste à calculer la position de S à un instant t *quelconque,* connaissant ses conditions initiales pour $t = 0$. Théoriquement la chose est-elle toujours possible? C'est la première question qui se pose. Quand S passe par certaines positions *singulières*, on sait que les équations de la Mécanique ne suffisent plus nécessairement à déterminer le mouvement ultérieur du système. Mais une singularité beaucoup plus inattendue peut arrêter l'étude du mouvement : il arrive (ainsi qu'on le voit sur des exemples extrêmement simples) que S ne tende vers aucune position limite ni vers l'infini quand t tend vers un certain instant t_1.

On serait, il est vrai, porté à croire que de telles singularités ne se présentent jamais dans les problèmes naturels, puisqu'un système matériel occupe toujours à un instant donné une position déterminée. L'argument ne serait fondé que si les formules de la Dynamique correspondaient *rigoureusement* à la réalité. A ce compte, deux points matériels s'attirant suivant les lois de Newton ne devraient jamais se rencontrer, parce que la vitesse d'un élément de matière ne saurait devenir infinie. Dans ce dernier cas, le paradoxe se lève aussitôt quand on observe que les deux éléments matériels, ayant toujours des dimensions finies, se choqueront avant que leurs vitesses soient infinies; mais leurs vitesses, au moment du choc, seront d'autant plus grandes que leurs dimensions seront plus petites. C'est une explication du même genre qui rend compte de la singularité que je signale : si, pour $t = t_1$, les fonctions $x_i(t)$ qui définissent la position de S deviennent indéterminées, c'est que S, *avant l'instant* t_1, passe par un état où les hypothèses et lois de forces, qui ont permis de mettre le problème en équations, cessent d'être suffisamment exactes; mais S n'atteint cet état qu'après une période d'*affolement* d'autant plus accentuée que ces hypothèses et lois sont plus voisines de la réalité.

Il y a donc le plus grand intérêt à savoir reconnaître, sur un système d'équations de Lagrange donné, si les singularités de cette nature existent ou non. Quand on montre qu'elles existent, on met en évidence la particularité la plus remarquable du mouvement : quand on montre qu'elles n'existent pas, on est certain

de pouvoir suivre indéfiniment le mouvement de S, au moins tant que S ne passera pas par une position singulière.

L'application *au domaine réel* des théorèmes énoncés plus haut sur les singularités essentielles mobiles conduit à d'importantes propositions, parmi lesquelles je cite la suivante :

Théorème. — *Admettons qu'il n'existe pas de positions singulières de* S *à distance finie et que les forces dérivent d'un potentiel* $U(x_1, \ldots, x_n)$ *qui soit, ainsi que les coefficients de la force vive* $2T$, *une fonction de* $x_1, \ldots, x_n$ *à un nombre fini de branches.*

Admettons de plus que, K *désignant le moment d'inertie de* S *relativement à l'origine,* $\frac{U}{K^2}$ *reste moindre qu'une quantité finie* A *pour toute position de* S. *Quand* t *tend vers* t_1 (*quels que soient* t_1 *et les conditions initiales*), *les* x_i, x'_i *tendent vers des valeurs finies déterminées* [1]; *les* $x_i(t)$ *se laissent développer en séries de polynomes*

$$x_i(t) = \sum_{r=0}^{r=\infty} P_r^{(i)}(t) \tag{7}$$

convergentes pour t *quelconque, séries dont les coefficients successifs se calculent en fonctions des conditions initiales* par de simples différentiations, *comme ceux d'une série de Taylor, et qui jouissent, par rapport à la convergence, la différentiation, etc., des principales propriétés d'une série de Taylor.*

On peut dire que les séries (7) *intègrent* les équations du mouvement, au sens moderne de ce mot. C'est dans le type que je viens de définir que rentrent les problèmes intéressant *le corps solide fixé par un de ses points* [2].

---

[1] On suppose (ce qui est toujours possible) les x_i choisis de façon qu'ils restent finis tant que tous les points de S sont à distance finie.

[2] En appliquant au mouvement d'un corps solide pesant fixé par un point sa méthode d'approximations successives, M. Picard a déjà obtenu une représentation analytique de ce mouvement (*Traité d'Analyse*, t. III, p. 246-248). Dans cette méthode, les paramètres et le temps t sont exprimés en fonction d'une variable auxiliaire τ par des séries qui convergent quel que soit τ, et quand τ croît de $-\infty$ à $+\infty$, il en est de même de t.

Le problème des n corps ne rentre pas dans la catégorie en question; mais à ce problème s'applique la proposition suivante :

Si, t tendant vers t_1, certains des n corps ne tendent vers aucune position limite à distance finie, il existe au moins quatre corps $M_1, \ldots, M_\nu (\nu \geqq 4)$, *qui ne tendent vers aucune position limite, et qui satisfont à la condition que le minimum* $\rho(t)$ *des distances mutuelles* r_{ij} *de ces points* $M_1, \ldots, M_\nu$ *tende vers zéro avec* $t - t_1$, *sans qu'aucune des quantités* r_{ij} *tende constamment vers zéro.*

La singularité en question ne saurait donc se produire que par suite de croisements de ν astres entre eux ($\nu \geqq 4$), croisements de plus en plus fréquents quand t tend vers t_1 et de plus en plus semblables à des chocs. Ces *pseudo-chocs* ont déjà été signalés par M. Poincaré comme pouvant donner naissance (pour $n > 3$) à des solutions périodiques d'une nature particulière.

Pour $n = 3$, la proposition énoncée montre que les trois corps tendent nécessairement vers des positions limites à distance finie quand t tend vers t_1. Il suit de là que, dans le cas des trois corps, les coordonnées x_i, y_i, z_i des trois astres se laissent développer en séries de la forme (7), convergentes quel que soit t, exception étant faite pour les conditions initiales telles qu'au bout d'un temps fini t_1 deux des astres se choquent en un point déterminé de l'espace.

Ces considérations suffisent, je crois, à montrer l'intérêt que présente, *au point de vue du réel,* la théorie analytique des équations différentielles.

MERRIMAN (M.) and WOODWARD (R.). — HIGHER MATHEMATICS. A Text-Book for classical and engineering colleges. 1 vol. in-8°; XI-576 p. New-York; John Wiley and Sons, 1896.

Il est vraiment curieux de constater combien, d'un pays à l'autre, diffèrent les livres destinés à l'enseignement; même dans ces Mathématiques où l'on dit que les développements s'enchaînent d'une façon si étroite : ici et là, ce n'est ni le même point

de départ, ni le même point d'arrivée, ni le même ordre dans les matières, ni la même importance attribuée à ces matières. Voici un *Text-Book* qui nous vient d'Amérique, et qui est intéressant par lui-même, par le plan qu'ont adopté les éditeurs, et dont on ne saurait dire, chez nous, à qui il s'adresse. Les divers Chapitres, rédigés séparément par des auteurs différents, forment chacun un tout complet. Tel Chapitre serait lu par nos élèves de la classe de Mathématiques spéciales; nos licenciés en Mathématiques n'ont pas entendu parler des sujets qui sont exposés dans tel autre. Comme il n'y a pas de lien entre les divers Chapitres, chaque sujet est pris à son commencement et traité de manière à être compris par des étudiants qui ont une forte éducation mathématique élémentaire : la préoccupation d'être utile aux étudiants est d'ailleurs toujours visible, et les auteurs ont eu soin d'indiquer de nombreux exemples et exercices.

Au surplus, voici le titre des divers Chapitres avec les noms des auteurs :

I. Résolution des équations, *Mansfield Merriman*.
II. Déterminants, *L. Gifford Weld*.
III. Géométrie projective, *G. Bruce Halsted*.
IV. Fonctions hyperboliques, *J. Mac Mahon*.
V. Fonctions harmoniques, *W.-E. Bierly*.
VI. Fonctions d'une variable complexe, *T.-S. Fiske*.
VII. Équations différentielles, *Woolsey Johnson*.
VIII. Analyse spatiale de Grassmann, *E.-W. Hyde*.
IX. Analyse des vecteurs et quaternions, *A. Macfarlane*.
X. Calcul des probabilités et théorie des erreurs. *R.-S. Woodward*.
XI. Histoire des Mathématiques modernes, *D.-E. Smith*.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ball (W.-W.-R.). — *Mathematical Recreations and Problems of Past and Present Times.* 3e édition, in-8°, 288 p. London, Macmillan. 7 sh.

Bianchi (L.). — *Vorlesungen über Differentialgeometrie.* Édition allemande par *M. Lukat.* En 2 livraisons. 1re livraison, gr. in-8°, IV-336 p. Leipzig, Teubner. 12 M.

Binder (W.). — *Theorie der unicursalen Plancurven 4 bis 3. Ordnund in synthetischer Behandlung.* Avec 65 fig. Gr. in-8°, XII-396 p. Leipzig, Teubner. 12 M.

Cranz (C.). — *Compendium der theoretischen äusseren Ballistik.* Gr. in-8°, XII-511 p. avec 110 fig. Leipzig, Teubner. 20 M.

Hagen (J.-G.). — *Index operum Leonardi Euleri.* Gr. in-8°, VIII-90 p. Berlin, Dames.

Handwörterbuch der Astronomie. Herausgeg. von W. Valentiner. 6e livraison, gr. in-8° avec fig. Breslau, Trewendt. 3 M. 60 Pf.

Hegemann (E.). — *Uebungsbuch für die Anwendung der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate auf die praktische Geometrie.* Gr. in-8°, IV-156 p. avec 37 figures. Berlin, Parey. Relié, 5 M.

Lilienthal (R. von). — *Grundlagen einer Krümmungslehre der Curvenscharen.* Gr. in-8°, VII-114 p. Leipzig, Teubner. 5 M.

Netto (E.). — *Vorlesungen über Algebra.* En 2 volumes. 1er Volume, gr. in-8°, x-388 p. avec figures sur bois. Leipzig, Teubner. 12 M.

Stahl (H.). — *Theorie der Abel'schen Functionen.* Gr. in-8°, x-354 p. Leipzig, Teubner. 12 M.

Staude (O.). — *Die Focaleigenschaften der Flächen 2. Ordnung.* Ein neues Capitel zu den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes. Gr. in-8°, VIII-185 p. avec 49 fig. Leipzig, Teubner. 7 M.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

WEBER (H.). — Lehrbuch von Algebra in zwei Bänden. Zweiter Band, in-8°: xiv-796 p. Braunschweig. Vieweg und Sohn, 1896.

Nous avons dit récemment (¹) l'intérêt que présente le premier Volume du *Lehrbuch* de M. Weber pour ceux qui veulent étudier l'Algèbre; dans ce second Volume, l'intérêt s'accroît encore s'il est possible, en raison de l'élévation et de l'actualité des sujets traités.

Le lecteur est maintenant familiarisé, par la théorie de Galois, avec la notion de groupe. C'est avec des groupes particuliers, concrets, pour ainsi dire, qu'il a acquis cette habitude : il est maintenant en mesure de s'élever à la théorie générale des groupes *finis*, qui ouvre le premier Volume. M. Weber étudie d'abord les propriétés qui résultent de la définition seule, qui ne dépendent ni de la nature des éléments du groupe, ni du mode spécial de composition de ses éléments : il introduit les notions de diviseur (sous-groupe) et en particulier de diviseur normal (sous-groupe distingué ou invariant), de parties associées (*Nebengruppen*) à un diviseur, puis d'isomorphisme. Si l'on considère deux parties A, B d'un groupe, le résultat AB de la composition de ces parties est l'ensemble des éléments obtenus en composant, par le mode spécial au groupe, chaque élément de A avec chaque élément de B. Les parties associées à un diviseur normal Q du groupe P forment, par une telle composition, un groupe, complémentaire du groupe constitué par le diviseur normal, lequel joue, dans le groupe complémentaire, le rôle d'unité. Cette notion donne naissance à la notion de l'isomorphisme à plusieurs dimensions (mehrstüfig), désigné comme *méroédrique* par M. Jordan, et conduit à la démonstration du beau théorème de M. Jordan sur l'invariance, abstraction faite de l'ordre des termes, de la suite des indices de chaque sous-groupe par rapport à celui qui le précède, dans une décomposition $P, P_1, P_2, \ldots, 1$ d'un groupe P en sous-groupes

(¹) Voir *Bulletin*, XIX_1, p. 161; 1896.

tels que chacun d'eux soit un plus grand diviseur normal du précédent. C'est ce théorème qui permettra de montrer plus tard que les degrés des résolvantes qu'il faut adjoindre à une équation pour la résoudre forment un ensemble invariable. La notion de la suite des indices étant acquise, un groupe métacyclique peut être défini comme un groupe dans lequel cette suite se compose de nombres premiers, et cette définition suffit à prouver qu'un groupe métacyclique possède un diviseur normal commutatif.

Passant ensuite aux groupes abéliens, M. Weber montre comment on peut les représenter au moyen d'une *base*, chaque élément du groupe étant mis sous la forme $A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ldots A_\nu^{\alpha_\nu}$, où α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ prennent respectivement les valeurs d'un système complet de résidus par rapport aux degrés $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$, des éléments de la base $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$. Dans cette représentation, qui est possible de diverses façons, les plus hautes puissances des facteurs premiers qui entrent dans $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ restent les mêmes : ce sont les *invariants* du groupe. Si l'on désigne par $\omega_1, \omega_2, \ldots$, ω_ν un système de racines des équations binomes

$$\omega_1^{a_1} = 1, \qquad \omega_2^{a_2} = 1, \qquad \ldots, \qquad \omega_\nu^{a_\nu} = 1,$$

et si l'on fait correspondre à chaque élément $A = A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ldots A_\nu^{\alpha_\nu}$ le nombre $\chi(A) = \omega_1^{\alpha_1} \omega_2^{\alpha_2} \ldots \omega_\nu^{\alpha_\nu}$; la fonction χ ainsi déterminée est un *caractère* du groupe ; il y a autant de caractères distincts du groupe qu'il y a de combinaisons possibles des racines des précédentes équations binomes, c'est-à-dire n, si n est le degré du groupe. Ces n caractères forment un groupe isomorphe au groupe abélien. A chaque diviseur T d'un groupe abélien S, diviseur qui est nécessairement normal, correspond un groupe complémentaire $\frac{S}{T}$ qui est lui-même abélien. Si l'indice de T est j, il y a j caractères de S qui prennent la valeur 1 pour les éléments de T; ils forment un groupe isomorphe à $\frac{S}{T}$. Ce théorème conduit à la considération d'un sous-groupe de S isomorphe au groupe $\frac{S}{T}$: c'est le groupe réciproque de T. La considération des éléments *à deux faces* (zweiseitig), c'est-à-dire des éléments identiques à leurs inverses, conduit à la considération des *genres* contenus dans S; le genre principal G est le groupe réciproque du groupe des éléments

à deux faces; les autres genres sont les autres parties de S associées à G.

En considérant comme égaux les nombres congrus suivant le module m, les nombres premiers à m forment, en les composant par la multiplication ordinaire, un groupe abélien $\mathcal{M}$, de degré $\varphi(m)$, qui fournit une illustration simple des théories précédentes et dont l'étude prépare le Chapitre suivant, consacré au groupe des corps de la division du cercle.

Un tel corps Ω_m s'obtient en adjoignant aux nombres rationnels une racine primitive d'une équation binome de degré m; son groupe de Galois est isomorphe au groupe $\mathcal{M}$, précédemment défini; un diviseur *primaire* de ce corps Ω_m est un diviseur qui n'est pas compris dans un corps de même nature $\Omega_{m'}$, m' étant plus petit que m. La notion de période (Gauss) se généralise facilement : si r est une racine primitive de l'équation binome de degré m, la somme Σr^a, étendue aux nombres a qui forment les éléments d'un diviseur $\mathcal{A}$ du groupe $\mathcal{M}$, est une période de division relative au diviseur $\mathcal{A}$; son indice e est l'indice de $\mathcal{A}$.

Toute fonction rationnelle de racines de l'unité, à coefficients rationnels, peut s'exprimer en fonction rationnelle à coefficients rationnels d'une période. Si $\mathcal{A}$ est un diviseur primaire de $\mathcal{M}$, la période correspondante est racine d'une équation abélienne dont le groupe est isomorphe au groupe $\mathcal{B}$ réciproque de $\mathcal{A}$. Inversement, M. Weber donne la solution du problème suivant : Déterminer le module m et le groupe $\mathcal{A}$ de façon que le groupe réciproque $\mathcal{B}$ ait un système donné d'invariants; ou encore, déterminer tous les corps de la division du cercle qui ont un groupe donné. Comme application, il traite de la détermination de toutes les périodes de la division du cercle qui satisfont à une équation du troisième ou du quatrième degré, à coefficients rationnels : il montre en même temps que les équations abéliennes (dans le corps des nombres rationnels) du troisième et du quatrième degré ne sont autre chose que des équations de la division du cercle.

Un important Chapitre est ensuite consacré à la constitution des groupes généraux. M. Weber rappelle d'abord les recherches de Cayley sur la représentation d'un groupe de degré n au moyen d'une Table à double entrée; il est ainsi aisé de former directement les groupes du quatrième et du sixième degré. Quelques

propositions intéressantes se rapportent à l'isomorphisme d'un groupe quelconque de degré n à un groupe transitif de permutations de n chiffres. On doit à M. Sylow les belles propositions que voici : Si P est un groupe de degré n et si p^α est la plus haute puissance de degré p qui divise n, le groupe P admet un diviseur Q de degré p^α. L'ensemble des éléments c de P, qui satisfont à la condition $c^{-1}Qc = Q$, forment eux-mêmes un groupe R, dont Q est un diviseur. L'indice j de R est congru à $1 \pmod{p}$; le groupe P admet j diviseurs de degré p^α qui sont tous conjugués. Tout diviseur de P dont le degré est une puissance de P est contenu dans l'un de ces sous-groupes conjugués. Si P est un groupe de degré p^α et Q un diviseur de P de degré moindre p^β, il existe un diviseur Q′ de P, de degré $p^{\beta+1}$, dont Q est un diviseur normal. Tout groupe dont le degré est une puissance d'un nombre premier est métacyclique. M. Frobenius a montré qu'il en était de même de tout groupe dont le degré était un produit de nombres premiers différents et de tout groupe dont le degré est de la forme $p^\alpha q$, p et q étant des nombres premiers différents. La détermination des groupes simples d'après leur degré a été poussée par M. Hölder et par M. Cole respectivement jusqu'aux limites 200 et 500 ; M. Weber se borne aux degrés qui ne dépassent pas 100. M. Hölder a étudié aussi la nature des groupes dont les degrés sont de la forme p^3, p^2q, pqr, p^4. M. Weber considère seulement les groupes de degré pq. Il établit enfin le théorème de M. Bertrand sur la limite inférieure de l'indice d'un diviseur imprimitif ou intransitif du groupe symétrique des permutations de n chiffres.

Nous arrivons maintenant aux généralités sur les substitutions linéaires de déterminant non nul, effectuées sur n variables x_1, x_2, ..., x_n. Elles forment un groupe infini, dont il est possible de détacher des groupes finis, comme le montre déjà l'exemple des permutations. Si S est un tel groupe dont les éléments sont A, B, C, ..., une fonction homogène $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des n variables sera un invariant absolu du groupe si elle reste inaltérée par une substitution quelconque du groupe S. Si elle se reproduit multipliée par un facteur constant, c'est un invariant relatif. L'indice d'un invariant relatif est l'exposant de la plus petite puissance à laquelle il faut élever les divers facteurs constants qui correspondent aux diverses substitutions de S pour obtenir l'unité.

Celles des substitutions S qui laissent entièrement inaltéré l'invariant relatif $\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ forment un groupe qui est un diviseur normal de S; l'indice de ce diviseur est égal à l'indice de l'invariant.

M. Hilbert a montré qu'on peut toujours, d'un ensemble donné fini ou infini de formes homogènes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, extraire un nombre fini de formes $F_1, F_2, \ldots, F_p$ telles que chaque forme F de l'ensemble puisse être représentée par l'expression

$$F = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \ldots + A_p F_p,$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sont des fonctions entières et homogènes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; si l'ensemble est constitué par des formes de degré plus grand que zéro, il en est de même des éléments F_1, $F_2, \ldots, F_p$ et les coefficients $A_1, \ldots, A_p$ sont de degré inférieur à F, en sorte que si l'on peut démontrer que les coefficients A_1, $A_2, \ldots, A_p$ sont des constantes ou appartiennent à l'ensemble, il est prouvé par là même que toutes les formes de l'ensemble s'expriment en fonction entière d'un nombre limité d'entre elles.

Cette proposition, qui sert de principe dans la belle démonstration que l'on doit à M. Hilbert du théorème de M. Gordan sur le nombre fini des invariants (dans le sens ordinaire du mot), conduit aisément, d'après une remarque que M. Hurwitz a communiquée à M. Weber, au théorème suivant : Les invariants absolus d'un groupe S s'expriment en fonction entière d'un nombre fini d'entre eux. Si, d'ailleurs, on désigne par Θ une fonction des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui prenne μ valeurs distinctes $\Theta, \Theta_1, \ldots, \Theta_{\mu-1}$ pour les μ substitutions du groupe, les fonctions symétriques de $\Theta, \Theta_1, \ldots, \Theta_{\mu-1}$ sont manifestement des invariants absolus du groupe. On démontre aisément que toute fonction rationnelle de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et, en particulier, l'une quelconque de ces variables, est une fonction rationnelle de Θ, qui est elle-même une racine de l'équation

$$\Phi(t) = (t - \Theta)(t - \Theta_1)\ldots(t - \Theta_{\mu-1}) = 0,$$

dont les coefficients s'expriment en fonction entière des invariants indépendants du groupe. Il suit de là que les variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$ sont des fonctions algébriques des invariants du groupe. Rechercher ces fonctions ou, en d'autres termes, déter-

miner le corps $\Omega(\Theta)$ formé de toutes les fonctions rationnelles (à coefficients numériques quelconques) de Θ : tel est le problème que M. Klein a désigné, dans ses Leçons sur l'icosaèdre, comme *le problème des formes* du groupe S, problème qui est dit de la $n^{\text{ième}}$ dimension, si le nombre des variables est égal à n. Le corps $\Omega(\Theta)$ est manifestement un corps normal, l'équation $\Phi(t) = 0$ est une équation normale, et son groupe de Galois (groupe de Galois du problème des formes) est isomorphe au groupe S. On parvient ainsi, comme l'a observé M. Klein, à une généralisation directe de la théorie de Galois pour une équation générale de degré n, puisque, si l'on regarde les racines de cette équation comme les n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les fonctions symétriques de ces n variables sont des invariants du groupe des permutations des mêmes variables, et que l'équation $\Theta(t) = 0$ devient alors la résolvante de Galois de l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré. En sorte que le problème fondamental de l'Algèbre, la résolution de l'équation du degré n, est compris comme cas particulier dans le problème des formes d'un groupe de substitutions linéaires de la $n^{\text{ième}}$ dimension. La résolution des équations binomes, des équations du second, du troisième et du quatrième degré se ramène à un problème des formes de la première dimension : on montrera plus tard que la résolution de l'équation du cinquième degré se ramène à un problème des formes de la seconde dimension, et l'on est amené ainsi à se poser, avec M. Klein, la question suivante : quelle est la moindre dimension d'un problème des formes auquel puisse se ramener la résolution d'une équation donnée? M. Klein a montré que les équations générales du sixième et du septième degré pouvaient se ramener à des problèmes des formes de la quatrième dimension. Pour un degré supérieur à sept, le problème reste à peu près entier.

Le concept d'invariants peut être généralisé; on peut se proposer en effet de chercher un système $X_1, X_2, \ldots, X_m$, de formes homogènes du même degré des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tel que l'effet des substitutions du groupe S sur les formes $X_1, X_2, \ldots, X_m$ consiste à les changer en des fonctions linéaires d'elles-mêmes, en sorte qu'à chaque substitution linéaire du groupe S corresponde une substitution linéaire des fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_m$; ces dernières substitutions forment un groupe Σ isomorphe (à une ou

plusieurs dimensions) au groupe S; la considération de ces invariants généralisés, comme aussi des invariants relatifs, sert à réduire le problème des formes.

La recherche des groupes finis de substitutions orthogonales propres se ramène à la recherche des groupes finis de substitutions fractionnaires de la forme

$$\theta(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

où α, β, γ, δ sont des constantes que l'on peut supposer liées par la relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. A chacune des $n - 1$ substitutions non identiques d'un tel groupe G, d'ordre n,

$$x, \quad \theta_1(x), \quad \theta_2(x), \quad \ldots, \quad \theta_{n-1}(x),$$

correspondent deux *pôles* distincts, à savoir les racines de l'équation du second degré

$$x = \theta(x).$$

Un pôle a est dit d'*ordre de multiplicité* ν lorsqu'il correspond à ν substitutions du groupe; un tel pôle détermine un diviseur Q de G, qui est un groupe cyclique de degré ν; pour toutes les substitutions de Q, les deux pôles sont les mêmes; si μ est l'indice du groupe Q, on pourra détacher des éléments du groupe G $\mu - 1$ fonctions $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{\mu-1}$ telles que les parties du groupe G associées à Q soient respectivement représentées par

$$Q, \Psi_1 Q, \Psi_2 Q, \ldots, \Psi_{\mu-1} Q;$$

les μ pôles

$$a, \qquad a_1 = \Psi_1(a), \qquad a_2 = \Psi_2(a), \qquad \ldots, \qquad a_{\mu-1} = \Psi_{\mu-1}(a),$$

dont chacun est d'ordre de multiplicité ν, qui sont tous distincts, sont dits *conjugués*. Deux systèmes de pôles conjugués, qui ne sont pas identiques, n'ont aucun pôle commun. Dès lors, si l'on désigne par ν', μ', ν'', μ'', ..., les nombres analogues à ν, μ dans les divers systèmes de pôles conjugués, on devra avoir

$$2n - 2 = nh - \mu - \mu' - \mu'' - \ldots,$$

en désignant par h le nombre de systèmes conjugués; et cette égalité permet de déterminer tous les cas possibles : n ne peut prendre que les valeurs 2 et 3; au premier cas correspond le

groupe cyclique ($\nu = \nu' = n$); au second cas correspondent le groupe du dièdre ($n = 2m \geqq 4$, $\nu = \nu' = 2$, $\nu'' = m$), le groupe du tétraèdre ($n = 12$, $\nu = 2$, $\nu' = \nu'' = 3$), le groupe de l'octaèdre ($n = 24$, $\nu = 2$, $\nu' = 3$, $\nu'' = 4$), le groupe de l'icosaèdre ($n = 60$, $\nu = 2$, $\nu' = 3$, $\nu'' = 5$).

La forme binaire qui représente un système de pôles conjugués est un invariant du groupe. Les diverses formes qui correspondent aux divers systèmes de pôles sont les *formes fondamentales* du groupe. Toute forme invariante du groupe dont le degré est moindre que le degré du groupe est, à un facteur constant près, un produit de formes fondamentales du groupe.

Après avoir exposé ces principes généraux, M. Weber passe à la formation effective des différents groupes des polyèdres, des formes fondamentales correspondantes, enfin des diviseurs de ces groupes; il consacre quelques pages aux groupes cristallographiques, qui ont leur origine dans les groupes linéaires de substitutions ternaires comprenant des substitutions orthogonales propres et impropres.

La notion des groupes de congruences se rattache à la notion des imaginaires de Galois, c'est-à-dire des nombres de la forme

$$\alpha = a_0 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + \ldots + a_{n-1} \varepsilon^{n-1},$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont des entiers ordinaires que l'on peut toujours supposer remplacés par leurs restes suivant le module premier p, et où ε est traité comme une racine de la congruence impossible

$$P = t^n + p_1 t^{n-1} + p_2 t^{n-2} + \ldots + p_n \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

dont le premier membre est supposé irréductible suivant le module p, c'est-à-dire que dans toutes les opérations d'addition, soustraction et multiplication, les résultats obtenus par les règles ordinaires de l'Algèbre sont réduits à la même forme que α au moyen de la congruence précédente.

M. Weber a d'ailleurs montré tout d'abord comment la considération des congruences suivant le double module P, p permet d'éviter ce mode de langage, qui reste commode. Il est à peine utile de dire que la division définie comme opération inverse de la multiplication est toujours possible, et d'une seule façon, sauf

dans le cas où le diviseur est nul. Quand on se donne le nombre premier p et le polynome P, il est clair qu'il y a p^n nombres imaginaires de Galois (y compris o), qui sont distincts. Leur ensemble peut être regardé comme un corps limité $\mathcal{C}_{n,p}$ puisque la somme, le produit, le quotient de deux nombres de cet ensemble y figurent. Après avoir développé les propriétés les plus simples des nombres de cette espèce (théorème de Fermat, existence des racines primitives, etc.), M. Weber montre que l'ensemble des substitutions $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, où les éléments doivent prendre toutes les valeurs distinctes parmi les imaginaires de Galois qui vérifient la condition $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, forme un groupe $E_{n,p}$, dont le degré, quand p est un nombre premier impair, se réduit à $\frac{p^n(p^{2n}-1)}{2}$, lorsqu'on convient de ne pas distinguer les deux substitutions

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix}.$$

Sauf dans les cas $n = 1$, $p = 2$ et $n = 1$, $p = 3$, ce groupe est simple, ainsi que Galois l'avait déjà observé. Il présente cet intérêt particulier de contenir comme diviseur le groupe des substitutions linéaires $E_{1,p}$, c'est-à-dire le groupe des substitutions de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

où a, b, c, d sont des entiers ordinaires, pris suivant le module p et vérifiant la congruence

$$ad - bc \equiv 1 \pmod{p}.$$

Ce groupe, que M. Weber représente par L_p, apparaît, dans la théorie des fonctions elliptiques, comme groupe des équations modulaires et, à ce titre, il a été étudié en particulier par l'auteur [1].

Ses propriétés résultent de la façon la plus simple de ce qu'il peut être regardé comme un diviseur du groupe $E_{2,p}$ formé au moyen du nombre premier p, et de la congruence impossible

$$t^2 \equiv N \pmod{p}.$$

---

(1) *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*. Brunschwick, 1891.

où N est un non-reste quadratique de p. Dans le corps $(E_{2,p})$ des imaginaires de Galois, tous les nombres réels (les entiers ordinaires) qui y sont contenus sont des carrés parfaits et peuvent même être regardés comme la puissance $(p+1)^{\text{ième}}$ de nombres du corps $E_{2,p}$. Les substitutions du groupe L_p, de degré $\frac{p(p^2-1)}{2}$ peuvent être ramenées à certaines formes normales. L'auteur montre comment on peut obtenir les diviseurs de ce groupe, qui sont d'une nature très différente, suivant que leur degré est ou non divisible par p. La détermination de ces derniers rappelle, trait pour trait, la détermination des groupes des polyèdres réguliers. M. Weber termine ce sujet en étudiant la constitution du groupe L_7 de degré 168.

Nous entrons maintenant dans le domaine des applications, qui s'ouvre par la théorie générale des équations métacycliques.

Tout l'intérêt se concentre sur l'étude de celles de ces équations qui sont *primitives* et dont le degré est une puissance d'un nombre premier p. Le groupe P d'une telle équation, supposée irréductible, est transitif, ainsi que tous ses diviseurs normaux, à l'exception du groupe unité. Parmi ces diviseurs normaux, il y en a un, Q, qui est abélien et qui n'admet plus de diviseur propre (autre que le groupe unité) qui soit en même temps un diviseur normal de P; tous ses éléments sont de degré p. La considération de ce groupe Q permet de représenter analytiquement toutes les permutations

$$\begin{pmatrix} z_1, & z_2, & \ldots, & z_k \\ z'_1, & z'_2, & \ldots, & z'_k \end{pmatrix}$$

du groupe métacyclique P au moyen du système de congruences

$$z'_i \equiv \alpha_{i1} z_1 + \alpha_{i2} z_2 + \ldots + \alpha_{ik} z_k + \alpha_i \qquad (\text{mod. } p),$$
$$i = 1, 2, \ldots, k,$$

où le déterminant $|\alpha_{ij}|$ n'est pas divisible par p. Ces congruences définissent un groupe R, et les congruences analogues, mais où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont nulles, définissent un autre groupe S. Le groupe P peut être lui-même représenté sous la forme $P = TQ$, où T est un groupe métacyclique contenu dans le groupe des congruences S. On est ainsi ramené à chercher tous les diviseurs métacycliques de ce dernier groupe. Ces principes sont appliqués aux équations du neuvième et du huitième degré.

Après avoir rappelé quelques propositions élémentaires sur les invariants et covariants de formes ternaires, puis montré comment une forme cubique ternaire, à coefficients réels, peut, par une transformation linéaire réelle, être ramenée à la forme normale

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6my_1y_2y_3.$$

M. Weber traite de la détermination des neuf points d'inflexion d'une cubique; sur la forme normale, les coordonnées de ces neuf points, leur distribution par *ternes* sur douze droites, la distribution de ces douze droites en quatre ternes, tels que chaque terne de droites contienne les neuf points d'inflexion, apparaissent immédiatement. Et cet exemple même conduit à la notion générale des *équations de ternes :* telle serait l'équation du neuvième degré qui déterminerait, pour une cubique donnée sans point double, les abscisses des points d'inflexion. En général, une équation de ternes jouit de la propriété suivante : elle n'a pas de racines égales, et deux racines quelconques déterminent une troisième racine telle que chaque racine du terne formé par ces trois-là soit une fonction rationnelle des deux autres, et cela de façon que si x_1, x_2, x_3 désignent trois racines d'un terne, on ait, en désignant par Θ une fonction rationnelle fixée une fois pour toutes, et quel que soit l'ordre des indices,

$$x_1 = \Theta(x_2, x_3).$$

Pour une telle équation du neuvième degré, on est amené à faire correspondre chaque racine à un symbole (ξ, η) composé de deux nombres entiers dont chacun peut prendre trois valeurs distinctes 0, 1, 2 (les restes différant par rapport au module 3). Les trois racines qui correspondent aux symboles (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3) appartiendront à un terne, si l'on a

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &\equiv 0 \\ \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 &\equiv 0 \end{aligned} \qquad \text{(mod. 3)}.$$

Dans les permutations du groupe de Galois ne doivent figurer que des permutations qui changent un terne en un terne. On en conclut que toute permutation du groupe de Galois qui change la

racine (ξ, η) en (ξ', η') est de la forme

$$\left.\begin{aligned}\xi' &\equiv a\xi + b\eta + c\\ \eta' &\equiv a'\xi + b'\eta + c'\end{aligned}\right\} \pmod{3}.$$

On reconnaît aussi que toute équation du neuvième degré, dont le groupe est deux fois transitif et dont les substitutions sont toutes contenues dans le groupe linéaire de congruences de la forme précédente, est une équation de ternes.

Enfin l'auteur examine le cas où le domaine de rationalité est supposé réel.

La recherche des vingt-huit tangentes doubles à une quartique générale fournit une autre belle application, plus compliquée. Après avoir montré comment les points de contact s'obtiennent par l'intersection de la quartique avec une courbe de quatorzième degré, M. Weber introduit les *complexes* de Steiner, c'est-à-dire les systèmes de six couples de tangentes doubles, tels que si l'on considère deux quelconques de ces couples, les huit points de contact correspondants soient sur une même conique. Trois tangentes doubles, dont les points de contact sont sur une conique, forment, en employant les dénominations de M. Frobenius, un terne *syzygétique;* dans le cas contraire, un terme *azygétique*. De même quatre tangentes doubles, dont les points de contact sont sur une conique, forment un quaterne syzygétique; dans le cas contraire, un quaterne azygétique. Trois tangentes doubles, qui appartiennent à un complexe de Steiner et dont deux ne forment pas un couple, sont azygétiques. Les soixante-trois complexes de Steiner se décomposent en ternes de complexes où figurent les vingt-huit tangentes doubles.

Deux complexes ont en commun un quaterne syzygétique ou un système azygétique de six tangentes doubles. Les 288 systèmes azygétiques de sept tangentes (systèmes complets ou systèmes sextuples d'Aronhold) jouent un rôle essentiel dans la théorie. Six éléments quelconques d'un tel système entrent dans un même complexe. C'est la considération de ces systèmes qui conduit, d'une part, à l'algorithme de Hesse-Cayley pour la distinction des vingt-huit tangentes doubles; qui, d'autre part, permet d'arriver à ce résultat essentiel que toutes les tangentes doubles d'une quar-

tique peuvent se trouver rationnellement quand on se donne un système complet; d'ailleurs, quand on se donne sept droites arbitraires dans le plan, il existe en général une quartique, dont on peut déterminer rationnellement les coefficients, et pour laquelle les sept droites données forment un système complet. Ces résultats permettent l'étude du groupe de Galois de l'équation du vingt-huitième degré dans le corps des fonctions rationnelles des quatorze rapports des coefficients d'une forme ternaire générale du quatrième degré. Ce groupe, dont on peut obtenir une représentation relativement simple, est du degré 145 1520; c'est d'ailleurs un groupe simple. On distingue enfin, au point de vue de la réalité, quatre cas possibles, et l'on montre que ces quatre cas se réalisent.

L'étude de l'équation du cinquième degré amène à poser la question suivante : sous quelles conditions une équation générale du $n^{\text{ième}}$ degré peut-elle admettre des résolvantes avec un seul paramètre. Quelques lemmes algébriques, où le théorème de M. Lüroth sur la représentation paramétrique des courbes unicursales joue le rôle essentiel, conduisent au théorème suivant : Si une équation générale du $n^{\text{ième}}$ degré admet une résolvante avec un paramètre, il y a une fonction rationnelle $\mathfrak{Z}$ des n variables x_0, $x_1, \ldots, x_{n-1}$ qui, par les permutations du groupe alterné, se change en une fonction linéaire d'elle-même, savoir

$$\chi(\mathfrak{Z}) = \frac{a\mathfrak{Z} + b}{c\mathfrak{Z} + d},$$

où a, b, c, d sont des nombres. Puis, de ce théorème, on arrive à la conclusion énoncée par Kronecker, établie pour la première fois par M. Klein, que pour n supérieur ou égal à 5, il est impossible de réduire l'équation générale du $n^{\text{ième}}$ degré, au moyen de résolvantes formées rationnellement, à une équation à un seul paramètre. Mais, si l'on suppose les racines x_1, x_2, ..., x_n de l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré liées par des relations qui subsistent pour les permutations d'un groupe $\mathfrak{A}$ de permutations de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on arrive à la conclusion suivante : si l'équation en x admet une résolvante en z

(1) $$F(u, z) = 0,$$

qui ne contient, en dehors de coefficients numériques, qu'un paramètre, lequel est une fonction des x invariable pour les permutations du groupe $\mathcal{A}$, il doit exister une fonction $\mathfrak{J}$ des variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$ qui, pour chaque permutation α du groupe $\mathcal{A}$, se change, en ayant égard aux relations qui existent entre les x, en

$$(2) \qquad \mathfrak{J}_\alpha = \frac{a\mathfrak{J} + b}{c\mathfrak{J} + d},$$

où a, b, c, d sont des coefficients numériques. Les racines de l'équation (1) s'expriment rationnellement au moyen de $\mathfrak{J}$, et $\mathfrak{J}$ est lui-même racine d'une équation à un paramètre

$$\Phi(\mathfrak{J}, z) = 0.$$

Si l'équation (1) est une résolvante totale, ce qui a lieu nécessairement quand le groupe $\mathcal{A}$ est simple, les x s'expriment rationnellement au moyen de $\mathfrak{J}$ et des fonctions qui appartiennent au groupe $\mathcal{A}$.

Les substitutions linéaires (2) forment un groupe isomorphe (à une ou plusieurs dimensions) au groupe P des polyèdres. M. Weber étudie en détail le cas où ce groupe est le groupe de l'icosaèdre et traite spécialement des résolvantes du cinquième et du sixième degré de l'équation de l'icosaèdre; il donne ensuite quelques indications sur la résolution de la même équation au moyen des fonctions elliptiques d'une part, de la série hypergéométrique de l'autre.

M. Jordan a traité en général de la détermination de tous les groupes finis de substitutions linéaires, et en particulier pour trois et quatre dimensions. M. Weber se borne à l'étude d'un groupe linéaire de substitutions à trois dimensions, isomorphe au groupe simple de degré 168 qui a déjà été étudié. Nous ne le suivrons pas dans cette étude, non plus que dans l'étude de l'équation du septième degré, qui s'y rattache.

La théorie des nombres algébriques est une des plus singulières parmi les théories mathématiques. Il est très naturel, sans doute, de définir comme entiers algébriques les racines d'une équation algébrique, de degré n, dans laquelle les coefficients sont des nombres entiers et où le coefficient de x^n est égal à l'unité et il est aisé alors d'observer que la somme et le produit de deux

entiers algébriques est un entier algébrique ; ces commencements si aisés donnent tout d'abord l'espoir d'étendre à cette nouvelle espèce de nombres les lois de la divisibilité. On n'y parvient qu'après un long détour et en introduisant des éléments nouveaux, dont la découverte était singulièrement difficile. Le point de départ de cette découverte est dans le célèbre Mémoire de Kummer sur la théorie des facteurs premiers idéaux des nombres complexes composés de racines de l'unité et de nombres entiers, mais c'est à coup sûr un des beaux titres de gloire de M. Dedekind que d'avoir introduit ces *idéaux* qui donnent, pour tous les entiers algébriques, une solution complète du problème (¹). On sait que Kronecker, dans sa *Festschrift zu Kummer's Jubiläum* a repris le problème à un tout autre point de vue. L'exposition de M. Weber, dont nous allons essayer de reproduire les traits fondamentaux, est, dans une certaine mesure, une synthèse de la théorie de Kronecker, dont il se rapproche dans le point de départ, et de celle de M. Dedekind, à laquelle il aboutit.

Désignons par R le corps des nombres rationnels, et par Ω le corps algébrique formé par l'adjonction à R d'une racine Θ d'une équation algébrique de degré n, irréductible dans R. Le premier point consiste à étendre les corps R, Ω en y adjoignant des variables, en nombre quelconque, $x, y, z, \ldots$, qui ne prendront point de valeurs numériques particulières, mais qui resteront de purs symboles soumis, pour le calcul, aux règles du calcul algébrique : soient $\overline{R}$, $\overline{\Omega}$ ces corps R, Ω, ainsi étendus par l'adjonction de ces variables. Un *fonctionnal* rationnel A sera un élément de $\overline{R}$: ce n'est donc rien autre chose qu'une fonction rationnelle de x, y, z à coefficients entiers ; on peut le mettre sous la forme

$$A = a\frac{E_1(x, y, z, \ldots)}{E_2(x, y, z, \ldots)},$$

où E_1, E_2 sont des fonctions entières *primitives*, de $x, y, z, \ldots$, c'est-à-dire des fonctions entières de $x, y, z, \ldots$, dont les coefficients sont des nombres entiers sans diviseur commun : a est un nombre rationnel positif qui est dit la *valeur absolue de* A ; si A

(¹) *Voir* le Tome XI de la première Série du *Bulletin*, et le supplément aux *Vorlesungen* de Dirichlet.

était un nombre rationnel, les mots *valeur absolue* reprendraient ici leur sens habituel. Si a est entier, A est un fonctionnal rationnel entier. De même un fonctionnal de Ω est un élément du corps $\overline{\Omega}$, c'est-à-dire une fonction rationnelle de $x, y, z, \ldots$ dont les coefficients sont des polynomes en Θ, à coefficients rationnels, ou, si l'on veut, un polynome en Θ, de degré inférieur à n, dont les coefficients sont des fonctionnaux rationnels. La norme d'un fonctionnal ω de Ω est évidemment un fonctionnal rationnel, dont la valeur absolue est dite la *norme absolue de* ω. Tout fonctionnal ω est racine d'une équation de degré n, dont les coefficients sont des fonctionnaux rationnels. Si ces fonctionnaux sont entiers et si le coefficient de la $n^{\text{ième}}$ puissance de l'inconnue est 1, le fonctionnal ω est dit *entier*. Un fonctionnal ω, qui est entier d'après cette définition et qui est en même temps un fonctionnal rationnel, est un fonctionnal rationnel entier. Par addition, soustraction, multiplication, des fonctionnaux entiers reproduisent des fonctionnaux entiers. Si ω est un fonctionnal entier dans Ω et si $\Phi(t)$ est un polynome en t, dont les coefficients sont des fonctionnaux rationnels entiers, tel enfin que $\Phi(\omega)$ soit nul, tout polynome entier en t qui divise $\Phi(t)$ a pour coefficients des fonctionnaux rationnels entiers; il en est ainsi en particulier du polynome en t irréductible dans $\overline{R}$ qui s'annule pour $t = \omega$. La norme absolue d'un fonctionnal entier est un nombre entier naturel.

Un fonctionnal entier α est divisible par un autre fonctionnal β, différent de zéro, s'il existe un fonctionnal entier γ tel que l'on ait $\alpha = \beta\gamma$. Deux fonctionnaux entiers qui sont respectivement divisibles l'un par l'autre sont dits *associés*. Tout fonctionnal entier associé au nombre naturel 1 est une *unité*, une unité fonctionnale ou numérique, suivant qu'elle est un fonctionnal proprement dit, ou un nombre. Ainsi, dans le corps R les unités fonctionnales sont les fonctions entières primitives ou les quotients de telles fonctions, les unités numériques sont $+1$ et -1.

Pour qu'un fonctionnal entier soit une unité, il faut et il suffit que sa norme absolue soit égale à 1. Si l'on se donne un fonctionnal ω, il y a une infinité de nombres entiers naturels, parmi lesquels figure la norme absolue de ω, qui sont divisibles par ce fonctionnal.

La notion de plus grand commun diviseur s'étend aussi aux fonctionnaux entiers : si α, β, ... sont de tels fonctionnaux et si

$x, y, \ldots$ sont des variables qui n'y figurent pas, le plus grand commun diviseur de α, β, ... sera simplement

$$\delta = \alpha x + \beta y + \ldots;$$

sous cette forme il apparaît clairement que tout fonctionnal entier qui divise α, β, ... divise δ; le fait que δ divise α, β, ... s'établit sans difficulté. Si le plus grand commun diviseur entre deux fonctionnaux entiers est une unité, ces deux fonctionnaux sont dits *premiers entre eux*. Au reste, on montre aisément que si ε est une unité et s'il existe des fonctionnaux entiers $\alpha, \beta, \ldots, \xi, \eta, \ldots$ tels que l'on ait

$$\varepsilon = \alpha\xi + \beta\eta + \ldots,$$

les fonctionnaux α, β, ... ne peuvent avoir d'autre diviseur commun que des unités. Dès lors les théorèmes classiques sur la divisibilité apparaissent immédiatement : si un fonctionnal entier divise un produit de fonctionnaux entiers et s'il est premier avec l'un deux, il divise l'autre, etc. Un fonctionnal entier, qui n'est pas une unité et qui n'admet pas de diviseurs autres que des unités ou les fonctionnaux qui lui sont associés, est un fonctionnal premier. Le plus petit nombre entier naturel qui soit divisible par un fonctionnal premier, π, est un nombre premier naturel, et la norme absolue de π est une puissance de p. Tout nombre entier naturel divisible par π est un multiple de p. Un fonctionnal entier, qui n'est pas premier, peut être décomposé en un produit de fonctionnaux premiers, et cela d'une seule façon, si l'on convient de ne pas distinguer l'un de l'autre deux fonctionnaux associés.

On voit que les lois essentielles de la divisibilité des nombres naturels sont reconstituées. Signalons encore les propositions suivantes : Une fonction rationnelle entière d'autant de variables que l'on veut, dont les coefficients sont des nombres ou des fonctionnaux d'autres variables, ne peut être elle-même un fonctionnal entier que si ses coefficients sont entiers. Si l'on considère un fonctionnal entier quelconque, on peut lui associer un autre fonctionnal entier qui ne contient que des variables autres que celles qui figuraient dans le premier fonctionnal; les facteurs premiers d'un fonctionnal entier peuvent être mis sous une forme telle qu'ils ne contiennent plus les variables dont dépend ce fonctionnal. Chaque

fonctionnal entier est le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers (algébriques) α, β et est par conséquent associé à une forme linéaire $\alpha x + \beta y$.

Dans l'étude des nombres algébriques, qui constituent les éléments d'un corps Ω, obtenu par l'adjonction au corps R des nombres rationnels d'une racine Θ d'une équation algébrique irréductible dans R

$$f(\Theta) = \Theta^n + \alpha_1 \Theta^{n-1} + \ldots + \alpha_n = 0,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres rationnels, la notion de *base* joue un rôle essentiel : une base est constituée par n éléments $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ du corps Ω, entre lesquels il n'existe point de relation linéaire et homogène à coefficients rationnels, en sorte que tout élément de Ω puisse s'exprimer en fonction linéaire et homogène de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ à coefficients rationnels. Si l'on désigne par $\omega_{r1}, \omega_{r2}, \ldots, \omega_{rn}$ les nombres conjugués à ω_r, le carré du déterminant $|\omega_{ij}|$, où i, j prennent les valeurs $1, 2, \ldots, n$, est un nombre rationnel, le *discriminant* de la base. Le rapport du discriminant de deux bases distinctes est ainsi le carré d'un nombre rationnel. Il y a des bases dont tous les éléments sont des nombres entiers dans Ω. Le discriminant d'une telle base est un nombre entier rationnel. Celui qui est le plus petit en valeur absolue est le *nombre fondamental* ou le discriminant du corps Ω et la base correspondante est une base *minima*. Tout nombre entier dans Ω est une fonction linéaire des éléments d'une base minima, fonction dont les coefficients sont des entiers rationnels : puisque 1 est un nombre entier dans Ω, il est clair que les éléments d'une base minima ne peuvent avoir d'autre commun diviseur qu'une unité.

Étant donné un fonctionnal entier μ, on peut trouver une base $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de Ω, formée de nombres entiers et telle que la forme

$$\alpha = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$$

contienne tous les nombres entiers de Ω qui sont divisibles par μ et ceux-là seulement, quand on y remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par des nombres entiers rationnels. Le système $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ est dit *base du fonctionnal* μ. Si, dans α, on remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par des

variables t_1, t_2, ..., t_n, on obtient un fonctionnal λ qui n'est autre que le plus grand commun diviseur de α_1, α_2, ..., α_n et qui est divisible par μ. C'est une *forme basique* du fonctionnal μ, et de tous les fonctionnaux associés.

La notion de congruence peut maintenant être étendue aux nombres algébriques entiers pourvu que le module soit un fonctionnal entier, non nul. Le nombre de nombres entiers incongrus suivant un fonctionnal μ est égal à la norme absolue de μ. Puisque la notion de système complet de nombres incongrus suivant un module trouve ici son extension, il en sera de même des conséquences de cette notion; il y aura, par exemple, un théorème de Fermat dans cette théorie.

Arrivé là, M. Weber compare la belle exposition qu'il vient de faire avec celle de M. Dedekind, dont les *idéaux* sont les éléments essentiels : rappelons qu'un idéal est un système de nombres entiers, pris dans l'ensemble Ω' des entiers du corps Ω, et tel que la somme ou la différence de deux nombres de ce système appartienne à ce système, ainsi que le produit d'un nombre quelconque du système par n'importe quel nombre pris dans Ω'. Enfin le produit de deux idéaux est un idéal dont les éléments s'obtiennent en ajoutant, de toutes les façons possibles, des produits de nombres pris l'un dans le premier facteur idéal, l'autre dans le second facteur idéal. Dans ces conditions, M. Weber montre qu'entre les fonctionnaux et les idéaux on peut établir une correspondance jouissant des propriétés suivantes :

A chaque fonctionnal entier correspond un idéal qui est le même pour tous les fonctionnaux associés, et pour ceux-ci seulement; à chaque idéal correspond une infinité de fonctionnaux entiers, tous associés.

Au produit de deux fonctionnaux correspond le produit des deux idéaux correspondants. A un nombre entier correspond un idéal principal, c'est-à-dire l'ensemble des nombres de Ω' qui sont divisibles par un même entier. Aux unités correspond l'idéal Ω'.

Cette correspondance une fois définie, rien n'empêche d'adopter l'expression *idéal* pour désigner l'ensemble des fonctionnaux associés. L'ensemble des fonctionnaux associés à un nombre entier sera un fonctionnal principal, etc.

Deux fonctionnaux entiers ou fractionnaires φ, ψ du corps Ω

sont dits *équivalents* quand il existe dans Ω un nombre α et une unité ε tels que l'on ait

$$\frac{\varphi}{\psi} = \alpha\varepsilon;$$

en particulier, deux fonctionnaux associés sont équivalents. Deux fonctionnaux équivalents à un troisième sont équivalents entre eux. Cette notion acquise, les fonctionnaux du corps Ω se rangeront en *classes,* chaque classe ne contenant que des fonctionnaux équivalents. Une classe doit être regardée comme contenant non seulement des fonctionnaux mais aussi les idéaux correspondants, d'où les dénominations *classes de fonctionnaux, classes d'idéaux.* L'ensemble des nombres entiers ou fractionnaires de Ω, de toutes les unités et de tous les produits des nombres de Ω par les unités forme une classe dite *principale :* elle contient l'idéal Ω'. Dans chaque classe il y a un fonctionnal entier, premier à un nombre fonctionnal entier arbitrairement choisi. Dans une Note, M. Weber indique le rapport de la théorie de l'équivalence avec la théorie de la résiduation sur les courbes algébriques.

Le nombre de classes d'un corps Ω est fini : cette proposition capitale résulte de ce que, dans chaque classe, il y a des fonctionnaux entiers dont la norme absolue doit rester inférieure à un nombre entier déterminé qui ne dépend que du corps Ω. Dans sa *Geometrie der Zahlen,* dont le *Bulletin* a rendu compte récemment, M. Minkowski a démontré le fait que le nombre de classes était fini par des considérations d'une tout autre nature.

M. Weber expose ce qui est nécessaire des idées de M. Minkowski pour établir les importantes propositions que voici : Dans chaque classe d'idéaux on peut choisir un représentant dont la norme soit inférieure à la racine carrée de la valeur absolue du nombre fondamental du corps. En dehors du corps des nombres rationnels R, il n'y a aucun corps dont le nombre fondamental soit 1. Signalons encore l'exposition des recherches de M. Hensel (*Crelle,* t. 113) sur la détermination effective des facteurs premiers d'un nombre premier p et des idéaux premiers d'un corps Ω.

La théorie que nous venons d'analyser doit subir quelques modifications quand on prend comme point de départ un corps algébrique quelconque au lieu de prendre, comme on l'a fait, le corps R des nombres rationnels. Ces modifications ont été obtenues par

M. Dedekind ([1]) et par M. Hilbert ([2]); nous ne suivrons pas M. Weber dans leur exposé, non plus que dans l'application des théories précédentes aux corps quadratiques et aux corps de la division du cercle, malgré l'intérêt que ces applications, où les théorèmes généraux prennent en quelque sorte une forme concrète, présentent au point de vue de la théorie des nombres, non plus encore que dans la démonstration du théorème sur l'identité des corps abéliens et des corps de la division du cercle, identité que Kronecker avait affirmée, mais sans apporter de preuve complète, et que M. Weber a le premier établie en toute rigueur. Récemment, M. Hilbert a apporté une seconde démonstration ([3]).

Deux Chapitres importants sont consacrés à l'étude des méthodes analytiques que Dirichlet a introduites dans la théorie des nombres et à l'application de ces méthodes à la détermination du nombre de classes, en particulier dans le cas d'un corps de la division du cercle.

Enfin un dernier Chapitre se rapporte aux nombres transcendants : l'existence de pareils nombres est prouvée par la méthode que l'on doit à M. G. Cantor : les nombres algébriques forment un ensemble dénombrable, l'ensemble des nombres forme un ensemble qui n'est pas dénombrable. Puis la preuve de la transcendance des nombres e et π est établie d'une façon élémentaire et simple, ainsi que le théorème de M. Lindemann sur la fonction exponentielle. Deux Notes sont consacrées à l'irréductibilité de l'équation du cercle; l'une de ces Notes est destinée à compléter et à rectifier sur un point la démonstration contenue dans le premier Volume, l'autre est fondée sur la théorie des nombres algébriques et conduit à la démonstration du célèbre théorème de Dirichlet sur l'existence des nombres premiers dans une progression arithmétique indéfinie.

Bien que ce compte rendu ait été nécessairement écourté sur quelques points, nous espérons qu'il a donné au lecteur quelque

---

([1]) *Ueber die Discrimanten endlicher Körper* (*Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften*, 1892); *Zur Theorie der Ideal* (*Nachrichten* de la même Société; 1894).

([2]) *Grundzüge einer Theorie der Galois'chen Zahlkörper*, même Recueil; 1894.

([3]) *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*; 1896.

idée de la richesse des matières contenues dans le *Lehrbuch der Algebra* de M. H. Weber [1]. Il ne manquera pas d'admirer, en l'étudiant, avec quel art et quelle sûreté ces matières ont été disposées et ouvrées.

Pour nous, en fermant ce Livre qui résume l'effort de tout un siècle pour l'accroissement de l'Algèbre, il nous a paru qu'il constituait un monument de plus à la gloire d'Evariste Galois, dont la pensée continue de vivre et de grandir dans cette Science, à laquelle il a donné quelques heures de sa vie courte et agitée. J. T.

BAILLAUD (B.). — COURS D'ASTRONOMIE A L'USAGE DES ÉTUDIANTS DES FACULTÉS DES SCIENCES. — Seconde Partie : *Astronomie sphérique. Mouvements dans le système solaire. Éléments géographiques. Éclipses. Astronomie moderne.* 1 vol. in-8°, VI-520 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1896.

M. Baillaud vient de publier le second Volume de son *Cours d'Astronomie*. Le premier Volume était consacré exclusivement à l'exposition de quelques théories applicables à l'étude des Sciences expérimentales : en particulier, la théorie des erreurs d'observation, celle des instruments d'optique et des principaux instruments de précision employés en Astronomie, celle des calculs numériques et des méthodes d'interpolation. Le présent Volume est consacré à l'Astronomie proprement dite. Il s'adresse, comme le précédent, aux étudiants des Facultés des Sciences : ceci ne veut pas dire que l'auteur s'est borné à traiter les questions qui figuraient à l'ancien programme de la Licence ès Sciences mathématiques. Au contraire, il a voulu donner, à l'étudiant qui veut apprendre l'Astronomie, les moyens de se mettre au courant de ce qui se fait réellement dans les observatoires, quand on veut tirer parti d'une observation. Il ne s'est pas astreint, et je ne saurais l'en trop louer, à exposer cette science bâtarde dont on s'est trop souvent contenté dans les Facultés des

---

(1) Nous sommes heureux d'apprendre que MM. Gauthier-Villars et fils ont l'intention de publier la traduction du premier Volume; M. Griess s'est chargé de cette traduction, qui rendra les plus grands services.

Sciences, de peur sans doute d'effrayer les étudiants en leur apprenant quelque chose de pratique : c'est la véritable Astronomie qu'a voulu enseigner M. Baillaud, et ses éminentes qualités de professeur, dont je puis témoigner, lui ont rendu facile cette tâche un peu ingrate.

De plus, M. Baillaud n'a pas craint d'initier les étudiants aux premiers principes de la Mécanique céleste : je ne doute pas, pour ma part, que son exposition si claire et si précise ne soit un précieux encouragement pour ceux d'entre eux qui sont curieux de cette science si attachante, et qui peuvent librement poursuivre leurs études dans cette voie, grâce à l'heureuse réforme de la Licence ès Sciences : après la lecture du Livre que nous allons analyser, ils ne trouveront plus de difficultés quand ils entreprendront l'étude des grands Traités de Mécanique céleste de Laplace et du regretté Tisserand.

Ce second Volume comprend vingt et un Chapitres.

Le Chapitre I est consacré aux définitions relatives à la sphère céleste, au mouvement diurne et aux différents systèmes de coordonnées employés en Astronomie : les divers problèmes qu'il y a lieu de poser à ce sujet y sont résolus avec élégance et simplicité.

La théorie de la réfraction astronomique forme la matière du Chapitre II ; on y trouvera, en particulier, les formules qui servent à corriger de la réfraction les observations équatoriales, qui donnent les différences des coordonnées de deux astres très voisins dont l'un est supposé parfaitement connu; la mesure des hauteurs au moyen du baromètre termine ce Chapitre.

Dans le Chapitre III, l'auteur étudie la parallaxe, c'est-à-dire la correction qu'il faut apporter aux coordonnées observées d'un astre pour en déduire ses coordonnées géocentriques. Il détermine avec soin les corrections de parallaxe pour les différentes espèces d'observations et les diverses catégories d'astres; il termine en parlant de la parallaxe des étoiles.

Le Chapitre IV est consacré à l'étude de l'aberration de la lumière et de son influence sur les observations. L'aberration annuelle, l'aberration diurne et l'aberration des planètes sont successivement envisagées.

Le Chapitre V est particulièrement important : M. Baillaud y

définit de la façon la plus précise les phénomènes connus sous le nom de *précession* et de *nutation,* c'est-à-dire le déplacement de l'écliptique et de l'équateur sur la sphère céleste : il montre comment on passe des coordonnées moyennes d'un astre à une date aux coordonnées moyennes du même astre à une autre date; quelle est aussi l'influence de la précession sur les éléments qui déterminent la position d'un grand cercle; comment se fait la réduction au jour; enfin, il termine en résolvant les questions relatives au mouvement propre des étoiles.

Dans le Chapitre VI, l'auteur étudie le mouvement du Soleil et est amené par suite à donner les principales formules relatives au mouvement elliptique, en particulier à la résolution de l'équation de Képler et aux développements en série du rayon vecteur et des diverses anomalies. Il définit d'une façon précise les différents jours et les différentes années usités, le temps sidéral, le temps vrai, le temps moyen, et montre comment l'on convertit l'un de ces temps en un autre; enfin, il étudie l'équation du temps, ses zéros, ses maxima et ses minima.

Le Chapitre VII débute par l'étude des mouvements apparents des planètes; on y trouve ensuite l'exposition du système de Copernic, l'énoncé exact des lois de Képler, étendues à tous les cas possibles; la définition des éléments d'une orbite; l'étude du mouvement parabolique et du mouvement elliptique dans une orbite très allongée, d'après Gauss; les formules relatives à la construction d'une éphéméride donnant les coordonnées équatoriales géocentriques d'une planète ou d'une comète; enfin, les relations différentielles entre les éléments de l'orbite d'un astre et les coordonnées géocentriques de cet astre.

Les Chapitres VIII, IX et X sont consacrés à la résolution du problème de la détermination de l'orbite elliptique d'une planète, ou de l'orbite parabolique d'une comète à l'aide de trois observations complètes. Les méthodes exposées sont celles de Gauss, d'Oppolzer et d'Olbers, et cette exposition ne laisse rien à désirer sous le rapport de la précision et de la clarté. Les précautions à prendre sont expliquées minutieusement; le degré de précision que l'on peut obtenir est discuté avec le plus grand soin. On y trouve aussi la démonstration des beaux théorèmes d'Euler et de Lambert, relatifs aux orbites paraboliques et elliptiques; la dé-

termination des orbites circulaires d'après Oppolzer; l'étude de la variation de grandeur d'une petite planète; un résumé des recherches de M. Brédichin sur les queues des comètes, et de celles de Schiaparelli sur les étoiles filantes; et finalement, la détermination de l'orbite parabolique d'un essaim.

Les cinq Chapitres suivants forment un abrégé de Mécanique céleste des plus intéressants. D'abord, au Chapitre XI, M. Baillaud conclut des lois de Képler la loi de la gravitation universelle; puis, partant de la loi de Newton, il donne, sous les différentes formes les plus usitées, les équations différentielles du mouvement de n corps réduits à des points matériels, et il intègre les équations dans le cas de deux corps; le Chapitre se termine par l'étude des formules de M. Brédichin, relatives au mouvement d'une particule de la queue d'une comète.

Dans le Chapitre XII, après avoir donné les intégrales connues du problème des n corps, l'auteur établit, par la méthode de Lagrange, les équations du mouvement troublé d'une planète, expose la méthode d'intégration par approximations successives, met en lumière les diverses sortes d'irrégularités et donne, en particulier, les expressions générales des inégalités séculaires.

Le Chapitre XIII contient le calcul des perturbations spéciales par quadratures mécaniques. M. Baillaud y a exposé successivement la méthode de la variation des éléments, celle de Bond et Encke pour le calcul des perturbations des coordonnées rectangulaires; enfin, celle de Hansen et Tietjen, fondée sur l'emploi des coordonnées polaires.

Pour chacune de ces méthodes, il montre comment se fera le calcul des éléments osculateurs à une date donnée.

Le Chapitre XIV renferme, d'après un Mémoire de Tisserand, une détermination élémentaire des principales inégalités du mouvement de la Lune, et le Chapitre XV fait connaître les circonstances les plus importantes du mouvement des satellites de Jupiter, et met en évidence l'intérêt qui s'attache à l'observation des éclipses de ces astres.

Les Chapitres XVI, XVII, XVIII et XIX sont consacrés à l'étude de la Terre. Le premier d'entre eux est un aperçu historique des recherches tant anciennes que modernes relatives à la forme de la Terre et à ses dimensions; dans le Chapitre XVII

sont décrits les instruments de mesure des bases géodésiques, de mesure des angles; les moyens employés pour déterminer l'heure, la latitude et la longitude dans une station géodésique ou en mer; le Chapitre XVIII renferme la théorie des calculs géodésiques, c'est-à-dire des triangulations et des nivellements; enfin, dans le Chapitre suivant, M. Baillaud s'occupe des Cartes géographiques, d'après le Mémoire connu de Tissot.

Le Chapitre XX est intitulé : *Apparences qu'offrent les astres du système solaire*. L'auteur montre d'abord comment on détermine par les observations le mouvement de rotation d'un astre, en particulier du Soleil et de la Lune; puis il expose une théorie élémentaire des éclipses de Lune, et enfin la méthode de Hansen pour calculer les éclipses de Soleil, et généralement les passages d'un astre sur la surface du cône circonscrit à deux autres astres; il montre comment on obtient les courbes limites dans une éclipse de Soleil, et comment on calcule les circonstances d'une telle éclipse en un lieu donné.

Le Chapitre XXI et dernier renferme l'exposé des principales méthodes de l'Astronomie moderne.

M. Baillaud indique d'abord les recherches entreprises sur les parallaxes des étoiles, sur les mouvements relatifs des étoiles doubles et leurs masses, sur les mouvements propres des étoiles et, en particulier, celui du Soleil; sur l'éclat des étoiles, et sur leurs grandeurs photographiques; il signale justement les travaux d'Argelander, décrit les divers photomètres en usage, et montre comment on peut expliquer les phénomènes présentés par les étoiles variables. Puis il parle des belles applications de la Spectroscopie à l'Astronomie : l'étude des protubérances solaires, et celle des vitesses radiales des étoiles à l'aide du principe de Doppler-Fizeau. Enfin, quelques mots sur l'histoire de la Photographie, et les procédés actuellement employés pour construire la Carte photographique du Ciel terminent l'Ouvrage.

Comme on le voit, l'œuvre que M. Baillaud a su mener à bonne fin, est considérable. Il a su condenser en un Volume de cinq cents pages la substance des grands Traités d'Astronomie de Chauvenck, de Watson et d'Oppolzer, et exposer d'une façon élémentaire les principales circonstances du mouvement des astres. Il a montré les choses comme elles sont en réalité, et, pour

obtenir ce résultat, il a fait œuvre de mathématicien autant que d'astronome : son bel Ouvrage ne saurait donc manquer, comme nous le disions plus haut, de développer parmi les étudiants auxquels il s'adresse le goût de l'Astronomie, en leur ouvrant toutes larges les portes de cette Science, et leur permettant de la voir telle qu'elle est, attirante par la grandeur des problèmes qu'elle étudie, et féconde, puisque, s'emparant de toutes les ressources que lui offre l'Analyse, comme la Physique, c'est elle qui a déterminé les plus grands progrès réalisés par ces Sciences.

H. ANDOYER.

FLORIAN CAJORI. — A HISTORY OF MATHEMATICS. In-8°, XIV-422 p. New-York et Londres, Macmillan and C°; 1895. (Prix : relié, 3fr,50.)

Présenter, en quatre cents pages, un exposé complet de l'histoire des Mathématiques, y enseigner tout ce qui est essentiel en cette matière, et surtout y comprendre les travaux de notre siècle jusqu'aux plus récents, est une entreprise que je n'aurais certes pas crue susceptible d'être menée à bien, avant d'avoir lu le volume que vient de publier le savant professeur du Colorado College. Je crois cet Ouvrage appelé à un succès d'autant plus assuré que je ne sache pas qu'il en existe aucun, ayant quelque valeur, qui puisse être réellement mis en parallèle; car le *Short account*, publié en Angleterre par W. Rouse Ball, est conçu suivant des proportions encore plus restreintes, ce qui rendait la composition plus facile, tout en diminuant les services qu'on peut demander à une histoire des Mathématiques.

Il va sans dire que de pareils Ouvrages sont nécessairement de seconde main; M. Cajori a judicieusement choisi et intelligemment compilé les historiens auxquels il a eu le plus souvent recours, Chasles, Hankel, Cantor, Günther, Allman, Gow, Todhunter, Gino Loria, etc. Mais je ne sais par quelle fatalité, en pareil cas, si dans un excellent Ouvrage s'est glissée une de ces fautes que l'humaine nature entraîne avec elle, on l'empruntera la première.

Ainsi, et pour n'en citer qu'un exemple, il n'y a, je crois, dans le célèbre *Aperçu historique* de Chasles, qu'une erreur

vraiment grave; si M. Cajori copie *in extenso* un passage de Chasles, ce sera précisément celui-là. Il s'agit de la façon dont Apollonius conçoit la génération des sections coniques, en partant d'un cône oblique à base circulaire. Chasles appelle *triangle par l'axe* la section du cône par un plan perpendiculaire au plan de la base et passant par la droite (axe) qui joint le sommet du cône au centre de la base; puis il admet que le plan sécant, qui donne la conique, est pris perpendiculaire au plan du triangle par l'axe. Or, pour Apollonius, c'est tout à fait le contraire; le plan sécant est absolument quelconque et le plan du triangle par l'axe est mené perpendiculaire au plan sécant et ne l'est dès lors au plan de la base que dans des cas très particuliers. Il suit de là que, pour Chasles, l'intersection du plan sécant et du triangle par l'axe est de fait un axe de la conique, quoiqu'il l'appelle *diamètre,* car elle est évidemment perpendiculaire à la direction conjuguée (intersection du plan sécant et du plan de base); Apollonius établit, au contraire, immédiatement la relation générale entre les segments d'un diamètre quelconque et l'ordonnée conjuguée.

Il serait malheureusement facile de relever, dans l'Ouvrage de M. Cajori, nombre d'erreurs semblablement imputables aux auteurs qu'il a suivis; il n'a pas non plus toujours évité un autre danger dans les travaux de seconde main, celui d'accoler des opinions réellement contradictoires. C'est ainsi qu'il me paraît inadmissible de supposer, avec Hankel, que Diophante a subi une influence venue de l'Inde, tout en constatant ce que Hankel ignorait encore, à savoir que toute la Science des Hindous, Astronomie, Géométrie et même Algèbre, a son point de départ dans la Science grecque.

L'exposé des travaux mathématiques de notre siècle, qui remplit le quart du volume, constitue naturellement une œuvre beaucoup plus personnelle que les Chapitres précédents. M. Cajori y a déployé une richesse d'informations très remarquable, et s'est montré juge éclairé et impartial. Il fournit, en particulier, des renseignements très intéressants sur la part des Américains dans les progrès contemporains. PAUL TANNERY.

NETTO (E.). — Vorlesungen ueber Algebra. Erster Band.

Ce premier Volume des leçons de M. Netto correspond à peu près, comme matière, à ce que l'on enseigne d'Algèbre dans nos classes de Mathématiques spéciales; mais les sujets sont développés avec une ampleur qu'interdisent les exigences des examens, et une liberté d'esprit que ne peuvent avoir les professeurs de nos lycées. On sent assez qu'ici le maître s'adresse à des élèves qui n'ont pas d'autre but que d'apprendre la science qu'il leur enseigne. Quant aux qualités pédagogiques de M. Netto, elles sont connues de tous ceux qui ont étudié ses Leçons sur la théorie des substitutions : ils retrouveront ici la même élégance, la même simplicité savante, la même concision, qui ne nuit jamais à la clarté.

M. Netto est resté fidèle à la doctrine de Kronecker, et il est de ceux qui purifieraient volontiers l'Algèbre de tout élément étranger. Personne sans doute ne contestera que cette conception de l'Algèbre ne soit la vraie, au point de vue philosophique et esthétique; mais l'enseignement a des exigences qu'il serait imprudent de méconnaître, au moins quand on veut s'adresser à des gens qui ne savent pas encore ce qu'on prétend leur enseigner. Il est alors presque toujours provisoire, il comporte des moments d'arrêt où le guide conseillera à ceux qu'il conduit de se retourner, et leur découvrira des perspectives et des routes qu'ils ne soupçonnaient pas. C'est ce que fait M. Netto quand l'occasion se présente, en distinguant nettement les points de vue et les principes. Au commencement de son Livre, dès la troisième Leçon, il étudie les principales démonstrations (Cauchy, Gauss, etc.) du théorème fondamental de l'Algèbre qui sont fondées sur la notion de continuité. Il revient sur le sujet dans la treizième Leçon, après avoir traité de la recherche des diviseurs communs à deux polynomes, après avoir montré comment la méthode d'Euler est indépendante de la notion de racine : il peut alors exposer la troisième démonstration de Gauss, avec les simplifications qu'y a apportées M. Gordan, et insister sur le caractère de cette preuve, qui réduit, et cela par une voie purement algébrique, la démonstration de l'existence des racines à cette

unique proposition : *Si $g(x)$ est un polynome à coefficients réels tels que $g(a)$ et $g(b)$ soient de signes contraires, il y a entre a et b une racine de l'équation $g(x) = 0$.* Le point où intervient la continuité, l'élément étranger à l'Algèbre est ainsi nettement délimité. C'est dans la vingt et unième Leçon, à propos de la séparation des racines, que M. Netto exposera les idées de Kronecker sur la proposition même que nous venons de rappeler, et il semble bien que, dans un livre d'enseignement, ce soit là leur véritable place.

Bien que le Livre de M. Netto soit élémentaire, l'auteur ne s'est pas astreint à reprendre tous les sujets *ab ovo;* il se permet de supposer quelques connaissances chez ceux qui le liront et il a cru devoir s'en expliquer dans sa Préface : c'est qu'en effet il rompait ainsi avec des habitudes très répandues en Allemagne, habitudes que l'on peut sans doute défendre par des raisons qui sont excellentes, mais nullement impérieuses. M. Netto semble même incliner à croire qu'il y a quelque franchise à abandonner ces habitudes.

Il nous reste à indiquer rapidement l'ordre des sujets traités.

Après deux Leçons préliminaires, relatives à l'introduction des nombres imaginaires, M. Netto traite, comme nous l'avons dit plus haut, de l'existence des racines, puis de l'interpolation; il introduit ensuite la notion d'irréductibilité et développe à ce propos diverses conséquences du théorème d'Eisenstein. Il traite du plus grand commun diviseur, de la recherche des racines multiples et, avec quelques détails, du développement en série d'une fraction rationnelle et des suites récurrentes, des fonctions symétriques, de la transformation des équations aux dérivées partielles que vérifient les fonctions symétriques, du résultant entre deux polynomes, des diverses méthodes d'élimination (fonctions symétriques, Euler, Sylvester, Bézout) dont les résultats sont élégamment ramenés l'un à l'autre, des propriétés du discriminant. Une digression nécessaire se rapporte aux formes quadratiques; puis, presque tout le reste du Volume est consacré aux équations numériques. La place que tient l'importance de ces équations dans des Livres comme celui de M. Netto ou celui de M. Weber (*Lehrbuch der Algebra*), qui s'adressent spécialement à un public savant, mérite bien d'être signalée, alors que

cette théorie est écourtée chez nous, dans un enseignement dont le but essentiel est, dit-on, de conduire à des carrières pratiques. M. Netto traite des diverses règles pour obtenir les limites des racines d'une équation, des théorèmes de Rolle, de Budan-Fourier, de Descartes, de la règle qu'a donnée M. Sylvester pour trouver une limite supérieure du nombre de racines comprises entre deux nombres donnés, enfin de l'élégante proposition qu'on doit à M. Biehler sur la réalité des racines des équations

$$U = 0, \qquad V = 0,$$

obtenues en égalant à zéro la partie réelle et la partie imaginaire dans un produit tel que

$$(x - a_1 - b_1 i)(x - a_2 - b_2 i) \dots (x - a_n - b_n i),$$

où toutes les quantités b ont le même signe. Le théorème de Sturm et celui de M. Hermite sont développés avec l'ampleur qu'ils comportent; puis, M. Netto aborde le problème du calcul effectif des racines (séparation, racines rationnelles, méthodes d'approximation de Newton, de Bernoulli, de Lagrange, etc.). Signalons ici deux intéressantes Leçons relatives à la recherche des fonctions qui, comme la fonction de Newton

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

peuvent conduire, par des applications successives, à l'approximation indéfinie d'une racine, et à l'étude des limites dont on s'approche ainsi, en général, par la réitération d'une même opération. Après avoir traité de la résolution algébrique des équations du second, du troisième et du quatrième degré, M. Netto termine ce premier Volume par l'étude de l'équation binome et spécialement de la méthode de Gauss.

Le second Volume sera principalement consacré à la question de la résolution algébrique des équations et à la théorie de l'élimination. J. T.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

STURM (R.). — *Die Gebilde 1. u. 2. Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlund.* 3e et dernière Partie. Die Strahlencomplexe 2. Grades. Gr. in-8°, XXIV-518 p. Leipzig, Teubner. 18 M.

MINCHIN (G.-M.). — *Treatise on Statics, with Applications to Physics.* 5e edit. Vol. I. Equilibrium of Coplanar Forces. In-8°, 416 p. London, Frowde. 10 sh. 6 d.

ROUTH (E.-J.). — *A Treatise on Analytical Statics.* 2e edit. Vol. I. In-8°, 404 p. London, Cambridge Warehouse. 14 sh.

ADAMS (J.-C.). — *Scientific Papers.* Vol. I. Ed. by W.-G. Adams Memoir by J.-W.-L. Glaishe. In-4°, 556 p. Cambridge, Univ. Press. 25 sh.

BAILLAUD (B.). — *Cours d'Astronomie, à l'usage des étudiants des Facultés des Sciences.* 2e Partie : Astronomie sphérique; Mouvements dans le système solaire; Éléments géographiques; Éclipses; Astronomie moderne. In-8°, VI-520 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 15 fr.

GREENHILL (A.-G.). — *Differential- and Integral-Calculus, with Applications.* In-8°, 472 p. London, Macmillan. 10 sh. 6 d.

CAJORI (FLORIAN). — *A History of Elementary Mathematics, with Hints on Methods of Teaching.* In-8°, 312 p. London, Macmillan. 6 sh. 6 d.

CAYLEY (A.). — *Collected Mathematical Papers.* Vol. XI. In-4°. Cambridge, Univ. Press. 25 sh.

RAFFY (L.). — *Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse (éléments de la théorie des courbes et des surfaces).* In-8°, VI-251 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 7^{fr},50.

VIDAILLET (J.). — *Sur une interprétation géométrique des coordonnées trilinéaires et applications aux courbes de degré n tangentes à une conique en n points.* In-4°, 116 p. avec fig. Paris, l'auteur, 4, rue Perdonnet. 6 fr.

WRIGHT (T.-W.). — *Elements of Mechanics including Kinematics, and Statics, with Applications.* In-8°. New-York. 10 sh. 6 d.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

STURM (Dr R.), Professeur à Breslau. — DIE GEBILDE ERSTEN UND ZWEITEN GRADES DER LINIENGEOMETRIE IN SYNTHETISCHER BEHANDLUNG. — III. Theil : *Die Strahlencomplexe zweiten Grades*. 1 vol. in-8°, p. XXIV-518. Leipzig, Teubner, 1896.

En publiant ce compte rendu du dernier Tome de l'Ouvrage de M. Sturm sur la Géométrie de la droite, nous nous acquittons d'un engagement que nous avons pris avec les lecteurs du *Bulletin* (*voir* le Cahier de novembre 1893); et c'est avec un véritable plaisir que nous le faisons, car nous pouvons de la sorte faire à l'illustre auteur nos compliments, pour avoir accompli une entreprise pleine de difficultés et d'un intérêt hors ligne pour la Géométrie. Il est inutile que nous nous appesantissions sur les procédés de recherches et d'exposition préférés par M. Sturm, car nous devrions répéter les remarques faites sur les deux premières parties de son travail (remarquons seulement les nouvelles applications des méthodes de M. Schubert); de même il ne nous semble pas nécessaire de continuer la discussion courtoise qu'il a acceptée avec M. Schœnflies et moi, car quiconque voudra prononcer son jugement, trouvera dans la littérature mathématique toutes les données nécessaires : qu'il nous soit seulement concédé d'observer tout de suite (et nous trouverons l'occasion pour le confirmer en détail) que de plusieurs passages du Livre de M. Sturm semble résulter que la considération des espaces à plusieurs dimensions s'impose un grand nombre de fois; chassée par la porte, elle rentre par la fenêtre ! Par rapport au Volume dont nous devons nous occuper à présent, nous remarquerons en général, en premier lieu, que, quoique son thème soit (d'après le titre) « les complexes quadratiques », cependant plusieurs pages se rapportent aux congruences de 2e degré et aux surfaces réglées du 4e degré : ce dont on ne doit pas s'étonner, car l'étude complète de toute variété exige celle des variétés qui la contiennent et de celles qu'elle contient; nous remarquerons, en second lieu, que le Tome III du Traité dont il s'agit, ayant été rédigé après la publication des deux premiers, donne des compléments aux deux

premiers, et nous croyons que si la rédaction eût été finie avant qu'eût commencé l'impression, l'ensemble de l'Ouvrage aurait été mieux ordonné. Mais il est temps que nous finissions ces considérations, pour commencer l'analyse même que nos lecteurs exigent.

1. Étant donné un complexe de second degré Γ^2 et une droite arbitraire de l'espace g, sur g on a trois correspondances $(2,2)$. Dans la première se correspondent deux points de g situés sur une conique du complexe placée dans un plan par g ; la seconde a une définition corrélative ; dans la troisième, à chaque point X de g correspondent les deux plans tangents menés par g au cône du complexe relatif au point X. A la droite g correspond, par rapport à Γ^2, une seconde droite g' (sa *polaire* par rapport à Γ^2, ou sa Γ^2-*polaire*), qui est le lieu des pôles de g par rapport aux coniques du complexe placées dans les plans par g ou l'enveloppe des plans de définition corrélative. Ces mêmes éléments déterminent une surface du 4e ordre et de la 4e classe (*surface du complexe* de Plücker, relative à la droite g), qui est le lieu des coniques placées dans les plans menés par la droite g et l'enveloppe des cônes, ayant les sommets sur cette droite, et qui a 8 points doubles et 8 plans tangents doubles ; ces éléments déterminent aussi une congruence du 2e degré (c'est l'ensemble des droites de Γ^2 qui coupent g) et quatre complexes linéaires par couples en involution.

Ces figures géométriques se particularisent si la droite g appartient au complexe Γ^2 ; par exemple, la surface du complexe est dans ce cas une surface du 4e ordre dont g est droite cuspidale, et qui a quatre points et quatre plans doubles ; cette surface peut encore se définir comme le lieu des coniques situées dans les plans d'un faisceau et tangentes aux faces d'un tétraèdre, et comme l'enveloppe des cônes corrélatifs.

2. Sur chaque droite de l'espace il y a quatre points (*points singuliers* du complexe) dont les cônes du complexe se décomposent en un couple de points ; par chaque droite passent quatre plans (*plans singuliers* du complexe) auxquels correspondent des coniques du complexe décomposées en un couple de points ; la droite où se coupent ces deux plans-là, comme la droite qui

joint ces deux points-ci est une *droite singulière* du complexe. Le lieu des points singuliers coïncide avec l'enveloppe des plans singuliers : c'est la *surface singulière* du complexe, d'ordre et classe 4. A chaque point et à chaque plan singulier correspond une droite singulière déterminée. D'ailleurs la surface du complexe relative à une droite singulière est un cas particulier extrêmement remarquable de celle dont nous avons parlé dans le numéro précédent.

3. On parvient à de nouveaux résultats en considérant les ∞^3 coniques du complexe et les ∞^2 couples de points dans lesquels elles peuvent se décomposer, et en considérant les figures corrélatives. A ces systèmes, M. Sturm applique les procédés de calcul de M. Schubert. Si par μ, ν, ρ on représente les conditions suivantes pour une conique, son plan passe par un point donné, elle coupe une droite donnée, elle touche un plan donné; on trouve d'une manière plus ou moins aisée les relations suivantes :

$$\mu^3 = 1, \quad \mu^2\nu = 4, \quad \mu^2\rho = 2, \quad \mu\nu^2 = 16, \quad \mu\nu\rho = 8, \quad \mu\rho^2 = 4,$$
$$\nu^2\rho = 32, \quad \nu\rho^2 = 16, \quad \rho^3 = 8, \quad \nu^3 = 48;$$

si on appelle encore η la condition pour une conique de se décomposer en un couple de points, on trouve, d'une façon analogue,

$$\eta\mu^2 = 4, \quad \eta\nu^2 = 8, \quad \eta\nu\rho = 16, \quad \eta\rho^2 = 16,$$
$$\eta\mu\nu = 8, \quad \eta\mu\rho = 8, \quad \eta\mu\nu = 16, \quad \eta\nu^2 = 32, \quad \eta\nu\rho = 32;$$

nous laissons aux lecteurs d'énoncer, dans le langage ordinaire, ces relations dont chacune exprime un théorème sur les complexes du 2e degré et leurs surfaces singulières ; par exemple, on trouve que la surface singulière d'un complexe quadratique général est une surface du 4e ordre (de Kummer) douée de 16 points et de 16 plans doubles, c'est-à-dire la surface focale d'une congruence quadratique (*voir* le Tome précédent de l'Ouvrage de M. Sturm).

4. Tandis qu'un complexe quadratique détermine sa surface singulière, il y a ∞^1 complexes du second ordre dont une surface de Kummer est surface singulière ; on appelle d'ordinaire ces complexes *homofocaux* ou *confocaux*, mais M. Sturm donne,

avec raison, la préférence à l'appellation *consinguliers*. Par chaque droite de l'espace passent quatre complexes consinguliers; le lieu des droites polaires d'une droite g par rapport aux complexes du 2e degré ayant commune la surface singulière est une surface du 8e degré, qui a g comme droite quadruple, etc.

La considération des lignes asymptotiques d'une surface de Kummer mène aux concepts de *droites singulières du* 2e *et du* 3e *ordre*, pour un complexe du 2e ordre dont cette surface est singulière. Ce qui offre une bonne occasion à notre auteur pour écrire quelques pages de complément au Tome I, où sont démontrées certaines propositions remarquables, dues à M. Lie, établissant un lien entre les complexes linéaires et les tangentes principales; par exemple, la suivante : dans chaque surface il y a un nombre fini de points, dont chacun correspond au relatif plan tangent par rapport à un complexe du 1er ordre, mais s'il y en a ∞^1 ils forment une ligne asymptotique de la surface.

5. A la découverte d'autres droites de l'espace, remarquables par rapport à un complexe du 2e degré, on parvient, par les correspondances (2,2) que nous avons définies (n° 1), c'est-à-dire en cherchant les droites où une de ces correspondances se réduit à une involution quadratique prise deux fois. On arrive, de la sorte, à associer à chaque complexe du 2e degré un du 6e degré, dont chaque droite h jouit de la propriété suivante (et de sa corrélative) : Par les deux points où une droite h est coupée par la conique du complexe située dans un plan mené par h passe une autre courbe du complexe. Si le complexe Γ^2 est tétraédral, le complexe des droites h est formé par trois complexes tétraédraux consinguliers au complexe donné.

6. La notion de Γ^2-polaire mène à d'autres figures covariantes à Γ^2. On peut d'abord considérer le lieu des droites l dont les droites polaires forment un complexe du degré n : c'est un complexe du degré $3n$; par exemple, à toutes les droites l qui coupent une droite g correspond un complexe du 3e degré contenant la congruence linéaire ayant pour directrices g et sa Γ^2-polaire g', et qu'on peut définir comme le lieu des droites polaires de g par rapport à tous les cônes ou à toutes les coniques du complexe. On

peut ensuite considérer la surface du 3e degré, qui est le lieu des droites Γ^2-polaires des rayons d'un faisceau donné (P, π); deux droites correspondantes du faisceau et de la surface sont les directrices d'une congruence linéaire, et le lieu des ∞^1 congruences analogues est un complexe du 2e degré dont la surface singulière est formée de la surface cubique définie auparavant, du point P (comme enveloppe de 1re classe) et du plan π (comme lieu du 1er ordre). Enfin, étant donnée une gerbe de rayons P, on peut considérer et le lieu des droites polaires de ses rayons, et le lieu des droites qui ont pour polaires ses rayons; ces lieux sont des congruences du 2e ordre et de la 3e classe, que M. Sturm désigne par $(2,3)'$ et $(2,3)''$. Des considérations corrélatives font associer à chaque plan deux congruences $(3,2)'$ et $(3,2)''$. Ces congruences ne sont pas les plus générales de leurs ordre et classe, car la $(2,3)''$ a, comme points singuliers du 2e ordre, quatre points S_i et, sur chaque droite PS_i, il y a un point singulier du 1er ordre : six points analogues singuliers se trouvent sur le plan polaire de P par rapport à la surface singulière du complexe (c'est le plan que notre auteur appelle *polaire* de P par rapport au complexe donné). De propriétés analogues est douée la congruence $(2,3)'$, qui est confocale à la $(2,3)''$. De ces propositions découle que les droites, dont les Γ^2-polaires appartiennent au faisceau, forment une surface du 7e degré, et que les polaires par rapport à Γ^2 des droites d'un complexe de degré n composent un complexe du degré $7n$.

7. Tandis que chaque droite de l'espace l a une Γ^2-polaire bien déterminée l', chaque droite l' est Γ^2-polaire de 9 droites; ce sont les droites doubles du complexe du 3e degré résultant des droites dont les Γ^2 polaires coupent l. Toutes les droites du complexe sont auto-polaires; et seulement les 15 couples de directrices des congruences linéaires où se coupent deux à deux les complexes linéaires fondamentaux de Γ^2 sont polaires réciproques; ces droites sont les seules jouissant de la propriété que les plans tangents, menés par une d'elles à la surface singulière du complexe, ont leurs points de contact sur l'autre. De même, les sommets des tétraèdres fondamentaux sont les seuls qui correspondent réciproquement, par polarité, à leurs faces opposées (bien entendu en dehors des points et des plans de la surface singulière).

8. Les théorèmes sur la polarité par rapport à un complexe quadratique Γ^2 se présentent sous un jour particulier remarquable, si on les applique aux éléments du plan à l'infini de l'espace, et notre auteur s'arrête à exposer ces particularisations qui ont un intérêt historique, car elles remplissent un grand nombre de pages du dernier Ouvrage de Plücker. L'*axe* d'un complexe est une droite dont la Γ^2 polaire est l'infini ; le *diamètre*, la polaire d'une droite à l'infini ; les diamètres d'un complexe quadratique forment la congruence $(3,2)_d$, et les axes la congruence $(3,2)_a$ confocale à la précédente. Deux diamètres ou deux axes du couple sont conjugués lorsque leurs points à l'infini sont conjugués par rapport à la conique $(\mathfrak{C})$ du complexe dans le plan à l'infini, etc. Trois diamètres et les trois axes parallèles forment, d'après Plücker, un « parallélépipède central » ; tous les parallélépipèdes analogues ont le même centre, qui est aussi le centre de tous les hyperboloïdes déterminés par trois diamètres ou trois axes du complexe ; on l'appelle *centre du complexe,* quoiqu'il ne soit pas centre de symétrie, ni pôle par rapport au complexe du plan à l'infini.

9. Par rapport à une congruence quadratique, on peut établir aussi une polarité, dont les propriétés résultent très simplement de celles déjà démontrées sur la polarité par rapport à un complexe quadratique ; voilà la raison qu'elles n'ont pas trouvé une place dans aucun des Tomes précédents de l'Ouvrage qui nous occupe. Moins claire est d'abord la raison qui a conseillé l'auteur à placer ici des recherches approfondies sur les surfaces gauches du 4e ordre douées de deux directrices doubles ; pour la comprendre, il faut considérer, avec M. Klein, la géométrie de la droite comme l'étude d'une quadrique à 4 dimensions de l'espace linéaire de 5 dimensions ; alors un complexe du 2e degré est l'intersection de deux quadriques, une congruence quadratique l'intersection de deux quadriques et d'un hyper-plan, une de ces surfaces l'intersection de deux quadriques et deux hyper-plans, et, « par projections et sections », on passe de la polarité par rapport à un complexe, à la polarité par rapport à une congruence, et après à la polarité par rapport à une surface réglée du 4e ordre. C'est inutile de dire que cette considération hyperspacielle n'est pas avouée par M. Sturm, et nous croyons que les lecteurs qui ne la

feront pas au lieu de l'auteur auront quelques difficultés à comprendre le lien existant entre lesdites correspondances de polarité.

10. En passant à un nouvel ordre d'idées, notre géomètre s'occupe ensuite de deux questions, l'une et l'autre fondamentales dans l'étude des complexes quadratiques, et qui sont liées étroitement entre elles : c'est-à-dire de la détermination des quadriques que contient un tel complexe et d'une méthode pour la construire. Il arrive de la sorte au théorème de Caporali, d'après lequel il y a, dans tout complexe du second degré, ∞^1 systèmes de génératrices de quadriques, dont ∞^3 sont des coniques, ∞^3 des cônes et ∞^3 des couples de faisceaux de rayons. L'étude de ces systèmes mène à conclure, avec M. Schur, que tout complexe du second ordre peut être engendré par les intersections des éléments correspondants de deux réseaux réciproques de complexes linéaires; *vice versa* deux réseaux, dans ces conditions, engendrent toujours un complexe quadratique. Comme la génération précédente est possible ∞^7 fois, on conclut qu'il y a, dans l'espace, ∞^{19} complexes quadratiques et ∞^{18} surfaces de Kummer. Nous ajoutons que la considération des quadriques que contient un complexe quadratique, donne la démonstration d'un grand nombre de propriétés de ce complexe; par exemple, de celle-ci : les complexes linéaires fondamentaux sont les seuls par rapport auxquels un complexe quadratique corresponde à lui-même. Arrivé à ce point, M. Sturm est en mesure de justifier l'assertion de M. Klein que nous avons rappelée au numéro précédent.

Si l'on coupe les ∞^1 complexes quadratiques consinguliers, par un ou deux des complexes fondamentaux, on arrive à ∞^1 congruences ou ∞^1 surfaces réglées biquadratiques que M. Sturm appelle *consingulières* à cause des remarquables relations géométriques qui les relient.

11. Des propositions énoncées au numéro précédent on obtient « par section » d'autres qui se rapportent aux congruences quadratiques. On trouve de la sorte que toute congruence du 2e degré contient ∞^1 systèmes de génératrices d'une quadrique et 16 faisceaux de rayons, et qu'elle est contenue en ∞^6 complexes quadratiques dont 40 sont tétraédraux. C'est remarquable le cas où

une congruence du 2e degré appartient à un complexe linéaire spécial; encore plus particulières sont les congruences qui naissent en supposant encore que l'axe du complexe spécial soit une droite ordinaire ou singulière du complexe quadratique générateur : les surfaces focales de ces complexes sont telles pour ∞^6 complexes, mais dépendent respectivement de 17, 16 ou 15 constantes.

12. L'auteur revient ensuite aux complexes tangents à un complexe quadratique Γ^2 pour appliquer les théorèmes précédents, à étudier les congruences où ces complexes coupent Γ^2; il conclut de cette façon que, par deux droites de Γ^2 passent deux systèmes de génératrices de quadriques appartenant à Γ^2, et que chaque droite de Γ^2 en a trois infiniment voisines. Si l'on considère une droite g de Γ^2, puis une droite g' de Γ^2 infiniment voisine à g, puis une droite g'' infiniment voisine à g', etc., on arrive à une totalité continue de ∞^1 droites; c'est une surface réglée du 16e degré, une *surface principale* de M. Klein. Par chaque droite g de Γ^2 passent trois surfaces principales; elles sont les surfaces communes à Γ^2 et aux congruences où se coupent les trois complexes consinguliers à Γ^2 passant par la droite g. Il est aisé de trouver les asymptotiques des surfaces principales de Γ^2.

13. En dehors de la méthode, pour construire les complexes quadratiques, dont nous avons parlé n° 10, il y en a d'autres non moins remarquables, auxquelles on arrive par la considération des ∞^6 couples de droites gauches formées par les droites de Γ^2. Une *chaîne de couples* est un système de couples tel que deux couples consécutifs quelconques du système appartiennent à la même surface du 2e ordre, en particulier trois droites qui, deux à deux, ne se coupent pas, forment une *chaîne ternaire*. En partant d'un couple de droites de Γ^2, et en construisant successivement des chaînes ternaires, on arrive à un système fermé composé de ∞^5 couples. En étudiant les couples, on parvient à la génération des complexes du 2e degré à l'aide de deux systèmes composés chacun de ∞^3 complexes linéaires et corrélatifs entre eux; à un complexe d'un de ces systèmes correspond un système de génératrices d'une quadrique dans l'autre, qui a commun

un couple avec ce complexe; les ∞^3 couples analogues forment un complexe quadratique. Tout complexe de ce degré peut s'engendrer de cette manière; en outre, cette génération mène à des générations analogues des congruences du 2e degré et des surfaces réglées du 4e ordre avec deux droites doubles.

On a des générations analogues de Γ^2 avec des systèmes ∞^4 ou ∞^5 de complexes linéaires; le lecteur les apprendra en ayant recours à l'Ouvrage original, car nous ne pouvons pas nous y arrêter : *majora premunt*.

14. Arrivé à ce point de développement de la géométrie de la droite, M. Sturm invite ses lecteurs à une excursion dans l'espace à 5 dimensions composé des complexes linéaires : le guide qu'il choisit à cet effet, sans toutefois l'avouer, est la géométrie des espaces à plusieurs dimensions; et je crois que les lecteurs qui ne sont pas familiers avec cette manière de raisonner, trouveront que le voyage est intéressant et instructif, mais que le chemin parcouru est semé de cailloux et que les hauteurs auxquelles on parvient ne sont faites que pour ceux qui ont des poumons d'alpiniste. L'espace dont nous disposons ne nous permet pas de faire une description de cette pérégrination : qu'il nous suffise de citer, comme exemple des fruits qu'elle donne, le théorème de M. Reye, d'après lequel les lignes asymptotiques d'une surface de Kummer sont chacune le bord d'un faisceau de surfaces du 4e ordre.

15. En revenant, après cette échappée, à notre espace, l'infatigable professeur de l'Université de Breslau se tourne une autre fois à l'étude d'un complexe quadratique Γ^2 pour en trouver une représentation (s'il est possible *biunivoque*) sur l'espace ordinaire. Il considère, à cet effet, deux droites fixes u, v de Γ^2 et les ∞^3 complexes du 1er degré qui les contiennent. Trois quelconques de ces complexes coupent Γ^2 en deux droites x, x' entre lesquelles existe une correspondance involutoire; dans cette correspondance, si x décrit une quadrique, x' engendrera une surface gauche du 6e degré ayant u et v comme droites doubles; mais, si cette surface passe par u (ou v), il lui correspond une autre quadrique passant par v (ou bien u); et si u décrit un faisceau de rayons, x' engendrera une surface gauche du 3e degré,

qui passe par u et v. Si l'on cherche les droites conjuguées harmoniques de u (ou v) par rapport à tous les couples xx', on parvient à un complexe quadratique $\Gamma^2_{\bar{u},v}$ (ou $\Gamma^2_{u,\bar{v}}$); ces deux complexes se coupent dans une congruence $(4, 4)$ composée des droites unies de la correspondance involutoire entre x et x'. Cette congruence contient les deux systèmes α, β de génératrices de quadriques du complexe Γ^2, qui passent par u et v. Or, les ∞^3 complexes du 1er ordre passant par u et v, forment un système linéaire Σ qu'on peut faire correspondre à un espace à trois dimensions Σ_1 de manière que, aux plans, aux droites et aux points de Σ_1, correspondent les complexes, les congruences, les systèmes de génératrices de quadriques de Σ. Alors, on peut dire que chaque point X_1 de Σ_1 correspond à un couple de droites xx' de Γ^2. Voilà une représentation $(1, 2)$ du complexe du 2e degré sur les points de l'espace! Les éléments exceptionnels sont les points A_1 et B_1 qui correspondent aux deux systèmes α et β précédemment définis; les autres particularités de la correspondance se trouvent aisément, et M. Sturm les établit avec tous les détails désirables.

La correspondance que nous venons d'établir entre Γ^2 et Σ_1 devient univoque en deux sens (et se réduit à la *représentation de Caporali*) si les droites u, v appartiennent à un faisceau de centre O et plan ω. Alors tous les complexes du système Σ contiennent le faisceau (O, ω), tous les systèmes de génératrices de quadriques de Σ_1 se décomposent dans ce faisceau et dans un autre qui a un rayon commun avec celui-là; chacun de ces systèmes coupe, en conséquence, Γ^2 dans un seul rayon x : d'où il s'ensuit l'univocité de la représentation de Caporali. Ses propriétés s'établissent en particularisant celles de la correspondance $(1, 2)$ supérieurement étudiée.

16. Une autre question d'une grande importance, dans l'étude des complexes quadratiques (comme dans celle de toute figure géométrique), est leur distribution en différentes classes. Or, chaque problème de classification a plusieurs solutions, plusieurs étant les points de vue où l'on peut se placer. Le premier que M. Sturm choisit est celui de la réalité des complexes du 2e degré et des figures qui s'y rattachent; c'est celui que, auparavant, avait choisi M. Reye : mais, tandis que le professeur de Strasbourg s'était

servi de l'analyse, son collègue de Breslau, par des raisonnements indépendants des coordonnées, arrive à conclure l'existence de huit types, auxquels on peut ramener tous les complexes quadratiques. Les recherches établies par M. Sturm, pour arriver à ces conclusions, sont longues et fatigantes, comme on devait s'y attendre, et serviront à l'avenir de modèles à ceux qui voudront résoudre des problèmes analogues.

L'autre point de vue auquel se place M. Sturm, pour classifier les complexes quadratiques, se base sur la considération des droites doubles, qu'exceptionnellement il peut avoir : c'est un critère analogue à celui qu'on emploie pour les courbes planes et les surfaces. Mais, avant de l'appliquer, il s'arrête sur un complexe quadratique, qui est particulier quoiqu'il n'ait pas, en général, des droites doubles, c'est-à-dire de celui qu'il appelle *harmonique*, formées des droites qui coupent deux quadriques données en deux couples de points harmoniques. Cette digression est-elle louable? Nous en doutons, et nous croyons que M. Sturm ne l'aurait pas faite s'il eût écrit tout son Ouvrage avant d'en commencer l'impression; suivant notre sentiment, il aurait bien mieux valu étudier le complexe harmonique après le complexe tétraédral, et avant les congruences quadratiques, comme préparation ultérieure à l'exposition des propriétés des complexes quadratiques généraux, d'autant plus que l'énumération des cas particuliers du complexe harmonique aurait été une excellente préparation à la classification dont nous allons nous occuper à présent.

17. Pour arriver à cette classification, M. Sturm commence à déterminer quelle spécialité présente un complexe quadratique lorsqu'il a une droite double; ou, pour nous servir des symboles de MM. Klein et Weiler, de quelle manière se distinguent les complexes du type [21111] du complexe quadratique général [111111]. A cette classe appartiennent les complexes [3111], [411], [51] et les deux corrélatifs [6], dont chacun a une droite double, les complexes [2211], [321], [33] et les deux corrélatifs [42] qui en ont deux droites doubles qui se coupent, les deux corrélatifs entre eux dont la caractéristique est [222], et qui en ont trois qui sont les arêtes d'un angle trièdre : l'auteur étudie suc-

cessivement deux de ces complexes, en exposant en particulier des manières pour les construire et les représenter univoquement sur l'espace ordinaire. Un autre groupe très intéressant de complexes quadratiques est celui dont chacun a deux droites doubles qui ne se coupent pas : tous peuvent être engendrés par deux faisceaux projectifs de complexes linéaires, tous ont la surface singulière réglée. Le plus général de ces complexes a la caractéristique [(11)1111] et peut se représenter sur l'espace d'une façon plus simple que celle de Caporali, comme a remarqué M. Montesano. Les autres complexes du groupe sont : [(11)211], [(11)31], [(11)(11)11], [(21)(11)1], [(21)(21)], [(11)(11)2] (complexe de Hirst), [(31)(11)], [(11)(11)(11)] (complexe tétraédral), [(22)(11)], [(11)22], [(11)4], [(21)111], [(21)21], [(21)3], [(31)11], [(41)1], [(31)2], [(51)]. Un dernier groupe de complexes du 2e degré est composé de ceux qui ont chacun ∞^1 droites doubles; le plus général a comme symbole [(111)111] tandis que les caractéristiques des autres sont : [(111)21], [(111)3], [(111)(11)1], [(111)(21)], [(111)(111)], [(211)11], [(311)1], [(211)2], [(211)(11)], [(411)], [(221)1], [(321)], [(22)11], [(32)1], [(22)2] (deux complexes corrélatifs), [(42)] (deux corrélatifs) [(33)], [(222)] (encore deux corrélatifs). On a en tout 55 espèces de complexes qui, toutefois, se réduisent à 49 si l'on considère comme identiques deux types corrélatifs. Si l'on a égard aux nombres et à la disposition des droites doubles, ces espèces donnent 16 groupes et un égal nombre s'obtient en considérant les surfaces singulières; mais si l'on dénombre les constantes, desquelles dépend chaque complexe, on arrive à douze groupes.

L'Ouvrage de M. Sturm se clôt par des Tables où est résumée la classification dont nous venons de parler; par conséquent, nous sommes arrivé au terme de notre tâche. Avant de terminer, nous voulons encore une fois faire remarquer combien est riche et variée la matière traitée par M. Sturm, et combien nombreux sont les nouveaux résultats de détail auquel il est parvenu : l'Ouvrage du professeur allemand est donc très digne de figurer dans la collection que son prédécesseur Schröter a inaugurée par les *Leçons* de Steiner et a enrichi de plusieurs éléments. Cependant, une observation doit être faite : La littérature mathématique manque encore d'une exposition complète mais rapide de la géo-

métrie de la droite ([1]) qui, s'adressant à un public plus étendu que celui qui lira le Livre que nous venons d'analyser, serve mieux à augmenter les cultivateurs d'une doctrine qui est digne de tous les soins des géomètres; nous finissons donc avec le vœu de la voir bientôt paraître : à ce vœu s'uniront certainement tous ceux qui ont au cœur les progrès de la Géométrie, M. Sturm le premier.

GINO LORIA.

MARKOFF (A.). — DIFFERENZRECHNUNG. Autorisierte deutsche Uebersetzung von Th. Friesendorff u. E. Prümm. Mit einem Vorwort von R. Mehmke. 1 vol. in-8°; v-194 p. Leipzig, Teubner, 1896.

Voici un petit livre aussi intéressant qu'utile, dont il faut savoir gré à l'auteur et aux traducteurs; il satisfera les mathématiciens par l'intérêt propre des problèmes et des méthodes qui y sont développés, par la façon dont l'approximation obtenue est toujours discutée, et ceux qui veulent appliquer ces résultats par la foule de renseignements qu'ils trouveront, et qu'ils auraient souvent grande peine à se procurer ailleurs.

La première Partie du livre de M. Markoff se rapporte à l'interpolation; le problème est posé comme il suit : étant données n valeurs distinctes de x

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_n,$$

et les valeurs que doit prendre une fonction $f(x)$ et ses α_{i-1} premières dérivées pour $x = a_i$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, trouver un polynome $F(x)$ du moindre degré possible, qui pour $x = a_i$ coïncide avec $f(x)$, et dont les α_{i-1} premières dérivées coïncident avec les α_{i-1} premières dérivées de $f(x)$. Le théorème de Rolle fournit aisément une expression de l'erreur que l'on commet quand on substitue $F'(x)$ à $f(x)$, à savoir

$$\frac{(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_m)^{\alpha_m}}{1.2\dots m} f^{n)}(\xi),$$

en posant

$$n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$$

([1]) M. Kœnigs en a commencé une, l'a-t-il complétée? Je crois que non.

et en désignant par ξ une valeur comprise entre la plus grande et la plus petite des quantités x_1, a_1, a_2, ..., a_m. L'auteur établit ensuite les formules élémentaires relatives aux différences (finies) des différents ordres, et traite ensuite de l'expression des dérivées au moyen des différences, ou, inversement, des différences au moyen des dérivées.

La remarque qui permet, dans ces diverses formules, d'obtenir le terme complémentaire, consiste en ce que l'équation en z

$$f(z)=f(a)+\frac{z-a}{h}\Delta f(a)+\frac{(z-a)(z-a-h)}{1.2h^2}\Delta^2 f(a)+\ldots$$
$$+\frac{(z-a)\ldots[z-a-(n-1)h]}{1.2\ldots nh^n}\Delta^n f(a)$$
$$+\mathrm{K}\frac{(z-a)\ldots(z-a-nh)}{1.2\ldots(n+1)},$$

où K est un nombre arbitraire, admet au moins les $(n+1)$ racines a, $a+h$, ..., $a+nh$, en sorte que l'équation obtenue en prenant les dérivées $m^{\text{ièmes}}$ des deux membres admet certainement $n-m+1$ racines entre a et $a+nh$.

Un Chapitre très intéressant est consacré aux Tables numériques, à leur construction, à leur emploi; on y notera la façon dont l'étude des différences permet de découvrir l'existence et la place des fautes, et comment même elle permet, dans une certaine mesure, de corriger ces fautes. Il est à peine utile de dire que les erreurs qui résultent de l'interpolation sont discutées avec soin. M. Markoff donne d'intéressants exemples numériques relatifs à l'emploi des Tables qu'il a dressées lui-même pour les valeurs de l'intégrale

$$\int_z^\infty e^{-t^2}\,dt.$$

Le calcul des intégrales définies est traité avec détail. Les erreurs que comportent les méthodes de Simpson, de Cotes, de Gauss, sont soigneusement discutées. La méthode de Gauss donne à M. Markoff l'occasion de traiter des polynomes de Legendre et du développement en fraction continue de $\log\frac{x-a}{x-b}$. Il développe ensuite une belle généralisation de la méthode de Gauss, qui le conduit en particulier à l'étude du développement de l'intégrale

définie

$$\int_a^b \frac{g(x)}{z-x}\,dx,$$

en une fraction continue de la forme

$$\cfrac{p_1}{z+q_1-\cfrac{p_2}{z+q_2-\cfrac{p_3}{z+q_3}-\dots}},$$

fraction continue dont la convergence est soigneusement étudiée.

La seconde Partie est intitulée : *Équations aux sommes et aux différences*. Un premier Chapitre est consacré à cette question : « Déterminer une fonction $F(x)$ connaissant sa différence $\Delta F(x)$ » et contient plusieurs exemples intéressants de sommation. L'auteur traite ensuite de la formule d'Euler-Maclaurin et en développe les deux usages principaux : calculer une valeur approchée d'une intégrale définie, trouver la somme des valeurs d'une fonction dont on connaît l'intégrale; M. Markoff montre par exemple comment on peut calculer

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log 2.$$

avec huit décimales exactes, ou la somme

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\dots+\frac{1}{1000},$$

avec quatorze décimales exactes. Il traite ensuite de la formule de Stirling. Trois Chapitres sont consacrés aux équations aux différences, et spécialement aux équations linéaires du premier ordre; il s'occupe même des équations de cette nature à deux variables indépendantes, et en tire parti pour établir certains développements en série avec deux variables. Le cas des équations à coefficients constants est traité avec les détails qu'il comporte.

Enfin, le dernier Chapitre est consacré aux transformations de séries qui reposent sur la considération des séries à double entrée; on y trouvera en particulier la formule d'Euler-Monmort

$$u_0+u_1\xi+u_2\xi^2+\dots=\frac{u_0}{1-\xi}+\frac{\xi\Delta u_0}{(1-\xi)^2}+\frac{\xi^2\Delta^2 u_0}{(1-\xi)^3}+\dots,$$

l'application de cette formule à la sommation de séries peu convergentes et diverses applications de la formule de Schelbach

$$1+\frac{\alpha\beta}{ab}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{a(a+1)b(b+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}+\ldots$$
$$=\frac{(a+b-\alpha-1)(a+b-\beta-1)-(a-1)(b-1)}{(a+b-\alpha-\beta-1)(a+b-\alpha-\beta)}$$
$$+\frac{(a-\alpha)(a-\beta)(b-\alpha)(b-\beta)[(a+b-\alpha+1)(a+b-\beta+1)-ab]}{ab(a+b-\alpha-\beta-1)(a+b-\alpha-\beta)(a+b-\alpha-\beta+1)(a+b-\alpha-\beta+2)}+\ldots$$

J. T.

MÉLANGES.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

PAR M. JULES DRACH.

Les équations dont il s'agit ont la forme

$$\text{(F)}\qquad F(z)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=0$$

et possèdent p solutions particulières liées par une relation quadratique

$$z_1^2+z_2^2+\ldots+z_p^2=0.$$

M. Darboux a mis en lumière le rôle qu'elles jouent en Géométrie; l'importance de ce rôle donnera peut-être quelque intérêt aux propositions particulières que nous allons établir.

I.

1. Désignons par μ une solution quelconque de l'adjointe à (F)

$$\text{(G)}\qquad G(\mu)=\frac{\partial^2\mu}{\partial x\,\partial y}-a\frac{\partial\mu}{\partial x}-b\frac{\partial\mu}{\partial y}-\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}-c\right)\mu=0;$$

nous savons que si l'on pose

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}=z\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}-b\mu\right),\qquad \frac{\partial\sigma}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial z}{\partial y}+az\right).$$

la fonction σ satisfait, quelle que soit la solution z de l'équation (F), à une équation du second ordre

$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\frac{\partial\sigma}{\partial x}}{\frac{\partial\mu}{\partial x}-b\mu}\right]+\frac{a}{\frac{\partial\mu}{\partial x}-b\mu}\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial\sigma}{\partial y}=0.$$

Soient maintenant $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ les diverses solutions de l'équation (1) qui correspondent respectivement à $z_1, z_2, \ldots, z_p$; *la fonction* Z, *définie par l'égalité*

$$(\alpha)\qquad Z=\sigma_1 z_1+\sigma_2 z_2+\ldots+\sigma_p z_p.$$

sera une nouvelle solution de l'équation (F).

Il suffit, en effet, de tenir compte des relations

$$\sum z_i^2=0,\qquad \sum z_i\frac{\partial z_i}{\partial x}=0,\qquad \sum z_i\frac{\partial z_i}{\partial y}=0,\qquad \sum\frac{\partial z_i}{\partial x}\frac{\partial z_i}{\partial y}=0,$$

pour obtenir

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\sum\sigma_i\frac{\partial z_i}{\partial x},$$
$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\sum\sigma_i\frac{\partial z_i}{\partial y},$$
$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}=\sum\sigma_i\frac{\partial^2 z_i}{\partial x\,\partial y}$$

et par conséquent

$$F(Z)=\sum\sigma_i F(z_i).$$

A toute solution μ *de l'équation adjointe à* (F), *la formule* (α) *fait donc correspondre une nouvelle solution de* (F).

2. Posons

$$(\beta)\qquad 2S=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_p^2.$$

nous aurons, en différentiant,

$$\frac{\partial S}{\partial x}=\sum\sigma_i\frac{\partial\sigma_i}{\partial x}=Z\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}-b\mu\right),$$
$$\frac{\partial S}{\partial y}=\sum\sigma_i\frac{\partial\sigma_i}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial Z}{\partial y}+aZ\right);$$

d'où l'on peut conclure que S est encore une solution de l'équa-

tion (1) vérifiée par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$. C'est la solution qui correspond à la solution Z de l'équation (F), définie par la formule (α).

L'équation (1), *qui dépend d'une solution arbitraire* μ *de l'adjointe à* (F), *admet donc les* $(p+2)$ *solutions*

$$1, \quad \sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \ldots, \quad \sigma_p, \qquad \sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_p^2,$$

c'est-à-dire $(p+2)$ *solutions liées par une relation quadratique* (¹).

Remarquons d'ailleurs ici que S ne peut être constant que lorsque Z est nul. Les hypothèses $\frac{\partial\mu}{\partial x} - b\mu = 0$, $\frac{\partial Z}{\partial y} + aZ = 0$ conduisent en effet, par un calcul facile, à un cas tout à fait banal, que nous négligeons.

II.

3. Les résultats que nous venons d'obtenir peuvent être généralisés. Désignons par z une solution quelconque d'une équation linéaire du second ordre de la forme de Laplace, par P et Q deux fonctions linéaires de z et de ses dérivées prises jusqu'à un ordre quelconque; on sait déterminer P et Q de la manière la plus générale, de façon que la fonction θ, définie par l'égalité

$$d\theta = P\,dx + Q\,dy,$$

satisfasse à une équation linéaire du second ordre (²). Proposons-nous de rechercher, en supposant que z vérifie l'équation (F), toutes les fonctions θ pour lesquelles

$$\theta_1^2+\theta_2^2+\ldots+\theta_p^2$$

est une nouvelle solution de l'équation en θ, ou encore pour lesquelles

$$\theta_1 z_1 + \theta_2 z_2 + \ldots + \theta_p z_p$$

(¹) Dans le cas de $p=4$ cette proposition et la précédente sont comprises comme cas particuliers dans les résultats obtenus par M. Darboux : *Théorie des surfaces,* IIᵉ Partie, n° 403.

(²) G. Darboux, *Théorie des surfaces,* IIᵉ Partie, n° 402.

est une nouvelle solution de l'équation (F), questions qui sont d'ailleurs étroitement liées l'une à l'autre.

L'expression générale de θ a la forme

$$\theta = \sigma + v,$$

où v désigne une fonction linéaire convenablement choisie de z et de ses dérivées, et, si l'on tient compte de la définition de σ, elle peut s'écrire

$$\theta = z + A_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \ldots + A_m \frac{\partial^m z}{\partial x^m} + B_1 \frac{\partial z}{\partial y} + \ldots + B_n \frac{\partial^n z}{\partial y^n},$$

les coefficients A et B étant déterminés par les conditions suivantes :

1° Lorsque les entiers m et n sont différents de zéro, θ s'annule quand on remplace σ par $(m+n)$ solutions de l'équation (1), solutions qui peuvent être choisies arbitrairement;

2° Lorsqu'un des entiers m et n, n par exemple, est nul, θ s'annule encore quand on remplace σ par m solutions de l'équation (1), ou bien peut se ramener par l'application successive des substitutions de Laplace à une expression de même forme où m est remplacé par $(m-k)$ et qui est définie par les mêmes propriétés relativement à la transformée de rang k de l'équation (1).

Exprimons d'abord que $\Sigma\theta_i z_i$ est une nouvelle solution de l'équation (F), nous avons l'égalité

$$\sum z_i \theta_i = \sum z_i \sigma_i + A_1 \sum z_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial x} + A_2 \sum z_i \frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial x^2} + \ldots$$
$$+ B_1 \sum z_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial y} + \ldots,$$

qui se réduit visiblement à

$$\sum z_i \theta_i = Z + A_3 \sum z_i \frac{\partial^3 \sigma_i}{\partial x^3} + \ldots$$
$$+ B_2 \sum z_i \frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial y^2} + \ldots.$$

Si l'on veut que les $(m+n)$ solutions de l'équation (1) qui annulent l'expression de θ demeurent arbitraires [1] l'expression

[1] Cette hypothèse est indispensable pour parvenir à une véritable *générali sation* de l'équation (1).

$\Sigma z_i \theta_i$ doit vérifier l'équation (F) sans qu'il en résulte entre les A et les B de relation d'égalité. On conclut de là que θ a la forme simple

$$\theta = \sigma + A_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + A_2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + B_1 \frac{\partial \sigma}{\partial y}.$$

On aura donc dans tous les cas

$$\sum z_i \theta_i = Z.$$

et *l'on ne peut parvenir, par cette voie, à aucune solution de* (F) *distincte de la solution déjà obtenue.*

Considérons maintenant la fonction Θ, définie par l'égalité

$$2\Theta = \sum \theta_i^2;$$

nous exprimerons que Θ est une nouvelle solution de l'équation en θ en écrivant que Θ correspond à la solution S de l'équation en σ, qui vérifie la relation

$$2S = \sum \sigma_i^2$$

ou, en d'autres termes, en écrivant identiquement

$$\Theta = S + A_1 \frac{\partial S}{\partial x} + A_2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + B_1 \frac{\partial S}{\partial y}.$$

Cette identité ne devant entraîner entre les A et les B aucune relation d'égalité, on en conclut par un calcul immédiat

$$A_2 = B_1 = 0.$$

La fonction θ se réduit donc à ses deux premiers termes

$$\theta = \sigma + A_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

ou encore

$$\theta = \sigma + \rho z.$$

ρ désignant une fonction de x et y à déterminer.

Nous aurons donc, d'après les théorèmes généraux, à considérer deux cas seulement : ou bien $\rho = -\mu$, *ou bien* θ *s'annule pour une solution particulière quelconque* σ' *de l'équation* (1).

Le premier cas donne, si l'on désigne par τ la valeur de θ,

$$\tau = \sigma - \mu z$$

et par suite

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \quad \mu \left(\frac{\partial z}{\partial x} - b z \right),$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = - z \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} - a \mu \right);$$

la fonction $-\tau$ *se déduit de* τ *en permutant* x *et* y; *ce n'est donc pas là une véritable généralisation des résultats relatifs à l'équation en* σ.

L'égalité

$$\sum \tau_i z_i = \sum \sigma_i z_i - \mu \sum z_i^2 = Z$$

montre d'ailleurs qu'en échangeant dans la formule (2) les lettres x et y on obtient la solution $-Z$.

Enfin si l'on pose

$$2T = \sum \tau_i^2,$$

T est une solution de l'équation en τ et l'on a

$$T = S - \mu Z.$$

4. Le deuxième cas conduit à des résultats plus intéressants. Soit z' la solution de l'équation (E) qui correspond à la solution σ' de l'équation (1), on a

$$\mu = - \frac{\sigma'}{z'},$$

et par conséquent

$$\theta = \sigma - \frac{\sigma'}{z'} z.$$

Si l'on pose

$$2\Theta = \sum \theta_i^2,$$

on aura encore

$$\Theta = S - \frac{\sigma'}{z'} Z$$

et Θ *sera une solution de l'équation dont* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ *sont des solutions particulières.*

Cette équation, qui admet *en général* [1] $(p+2)$ solutions

---

[1] Le cas où l'on prend $z' = Z$ donne en effet $\Theta = 0$; d'autres cas analogues seront signalés plus loin.

liées par une relation quadratique, dépend de deux arbitraires : la solution μ de l'adjointe à (F) et une solution quelconque z' de (F). Il est facile de la former effectivement.

On déduit, en effet, de l'équation

$$\theta = \sigma - \frac{\sigma'}{z'} z,$$

en tenant compte de la définition de σ et de σ',

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\sigma' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{z'}\right), \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} = (\mu z' - \sigma')\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{z'}\right)$$

et par conséquent

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial y}}{\mu z' - \sigma'}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial x}}{\sigma'}\right] = 0 ;$$

c'est l'équation cherchée.

Cette équation développée, s'écrit

$$(2') \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} - \frac{\mu z' - \sigma'}{\sigma'}\,\frac{\dfrac{\partial z'}{\partial y} + a z'}{z'}\,\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\sigma'}{\mu z' - \sigma'}\,\frac{\dfrac{\partial z'}{\partial x} - b z'}{z'}\,\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0$$

et si l'on observe qu'en permutant les lettres x et y on permute seulement entre elles les quantités σ' et $\mu z' - \sigma'$, on peut en conclure que *l'équation* (2) *est définie symétriquement par rapport aux deux variables x et y*, ce qui était d'ailleurs à prévoir [1].

---

[1] Nous signalerons en passant une propriété curieuse de l'équation (2) : on peut regarder chaque solution θ de cette équation comme dérivant d'une solution z de l'équation (F) et de la solution correspondante σ de l'équation (1) par la transformation

$$\theta = \sigma - \frac{\sigma'}{z'} z.$$

Cette transformation change la relation

$$2S = \sum \sigma_i^2$$

en une relation de même forme

$$2\Theta = \sum \theta_i^2.$$

Appliquons à l'équation (2) la même transformation en partant d'une solution

Les propositions que nous venons d'obtenir nous fournissent donc deux méthodes pour passer *en général* d'une équation F_p à une équation F_{p+2} ; ces deux méthodes sont d'ailleurs susceptibles, pour les faibles valeurs de p, d'interprétations géométriques, mais nous remettons à un autre moment le développement des applications géométriques.

Nous ferons néanmoins encore une remarque : les expressions σ, τ, θ étant déterminées par des quadratures, ne sont définies qu'à une constante additive près ; il résulte de là, par exemple, que S peut être augmenté d'une combinaison linéaire à coefficients constants des σ :

$$c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + \ldots + c_p\sigma_p + c_{p+1}.$$

Si l'on veut exprimer que les $(p+2)$ solutions $1, \sigma_1, \ldots, \sigma_p$, S ne sont pas indépendantes, il suffira par conséquent d'écrire

$$S = \text{const.},$$

ce qui entraîne simplement $Z = 0$.

On remarquera de même que $\Theta = \text{const.}$ entraîne

$$z' = cZ.$$

c désignant une constante.

III.

5. Parmi les équations (F) qui possèdent p solutions particu-

---

différente z'' de l'équation (F), c'est-à-dire posons

$$\zeta = \theta - \frac{\theta''}{z''}z.$$

Il suffit de remplacer θ et θ'' par leur expression en σ et σ'' pour obtenir

$$\zeta = \sigma - \frac{\sigma''}{z''}z.$$

La fonction ζ satisfait donc à l'équation du second ordre que l'on déduit de l'équation (2) en y remplaçant simplement z' par z''.

Les transformations que nous venons de définir échangent donc entre elles, d'une manière très simple, les équations (2) relatives aux diverses solutions z' de l'équation (F).

lières liées par une relation quadratique

$$\sum z_i^2 = 0$$

celles qui sont *identiques* à leur adjointe présentent un intérêt particulier.

Soit

$$(f) \qquad f(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + cz = 0$$

l'une de ces équations; désignons par μ l'une quelconque de ses solutions; nous avons vu que si l'on pose

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = z\frac{\partial \mu}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \mu\frac{\partial z}{\partial y},$$

la fonction σ satisfait, quel que soit z, à l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x\, \partial y} + c\frac{\mu}{\frac{\partial \mu}{\partial x}}\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\mu}\frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0.$$

L'expression Z, définie par

$$Z = \sigma_1 z_1 + \sigma_2 z_2 + \ldots + \sigma_p z_p,$$

est une nouvelle solution de l'équation (f), et l'équation en σ admet la solution S qui vérifie la relation quadratique

$$2S = \sum \sigma_i^2.$$

Si l'on échange les variables x et y, σ est remplacé par $-\tau$ et l'on a

$$\sigma = \tau + \mu z,$$

avec

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = -\mu\frac{\partial z}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = -z\frac{\partial \mu}{\partial y}.$$

Considérons maintenant la fonction $\sigma + \tau = 2\tau + \mu z = 2\sigma - \mu z$, cette fonction satisfera encore à une équation du second ordre ([1]).

([1]) Un calcul élémentaire montre que cette proposition n'est vraie que pour les équations dont les invariants sont égaux.

La proposition est bien connue : en posant

$$\varphi = \sigma + \tau.$$

on aura

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = z\frac{\partial \mu}{\partial x} - \mu\frac{\partial z}{\partial x} = -\mu^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{\mu}\right),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial \mu}{\partial y} = +\mu^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{\mu}\right)$$

et par conséquent

$$(g) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0.$$

L'expression $\Sigma\varphi_i z_i$ sera évidemment une solution de l'équation (f) [1], puisque l'on a

$$\sum \varphi_i z_i = 2\sum \sigma_i z_i - \mu \sum z_i^2 = 2Z.$$

Nous ajouterons que, *si l'on pose*

$$4\Phi = \sum \varphi_i^2.$$

Φ est encore une solution de l'équation dont $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ sont des solutions particulières. On a, en effet,

$$4\Phi = 4\sum \sigma_i^2 - 4\sum \sigma_i z_i.$$

c'est-à-dire

$$\Phi = 2S - \mu Z.$$

ce qui suffit à établir la proposition.

6. Il est aisé de déduire de la proposition précédente une proposition plus importante : on sait que, si l'on écrit

$$\varphi = \mu\,\omega.$$

la fonction ω satisfera à une équation du second ordre à invariants égaux ; c'est la proposition de M. Moutard. Cette équation ad-

---

[1] Cette proposition a été obtenue directement par M. A. Thybaut, qui en a donné d'intéressantes applications géométriques (*Comptes rendus*, 13 avril et 3 août 1896).

mettra la solution $\frac{1}{\mu}$ qui correspond à $\varphi = 1$: elle s'écrira par conséquent

$$(h) \qquad \frac{1}{\omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x\, \partial y} = \mu \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\partial x\, \partial y}.$$

Il suffit de transformer la relation

$$4\Phi = \sum \varphi_i^2.$$

en y introduisant les solutions correspondantes de l'équation (h) pour obtenir

$$4\Omega\frac{1}{\mu} = \sum \omega_i^2.$$

c'est-à-dire une relation quadratique entre ($p+2$) solutions de l'équation (h).

Si l'équation

$$(f) \qquad \frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + c = 0,$$

admet p *solutions* $z_1, z_2, \ldots, z_p$, *liées par la relation quadratique*

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_p^2 = 0,$$

la transformée de M. Moutard, relative à une solution quelconque μ,

$$(h) \qquad \frac{1}{\omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x\, \partial y} = \mu \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\partial x\, \partial y},$$

admet les ($p+2$) *solutions* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$, $\frac{1}{\mu}$ *et* Ω *liées par la relation quadratique*

$$4\Omega\frac{1}{\mu} = \sum \omega_i^2.$$

Cette proposition permet donc de passer d'une équation à invariants égaux *de la famille* p à une équation à invariants égaux de même forme et *de la famille* $p+2$. Il est bien clair que si l'on applique à l'équation (h) la même transformation en partant d'une solution quelconque, on passera à une équation de la famille

$(p+4)$ et ainsi de suite. On introduira à chaque opération deux fonctions arbitraires nouvelles.

Il convient d'observer que la transformation de M. Moutard, relative à la solution $\frac{1}{\mu}$ de l'équation (h), est *singulière* puisqu'elle ramène à l'équation (f). L'étude de cette transformation singulière conduit à reconnaître dans quel cas le nombre des solutions figurant dans la relation quadratique n'augmente pas par une transformation de M. Moutard. Il suffit par exemple de prendre

$$\mu = a_1 z_1 + \ldots + a_p z_p$$

avec

$$\Sigma a_i^2 = 0.$$

Les expressions de Φ et de Ω montrent d'ailleurs que la relation

$$\Phi = \text{const.},$$

qui donne

$$\frac{\Omega}{\mu} = \text{const.},$$

entraîne aussi

$$\frac{Z}{\mu} = \text{const.}$$

Sous cette dernière condition, le nombre p augmente *au plus* d'une unité; il resterait à voir s'il augmente nécessairement et comment on peut déterminer μ.

7. Nous avons encore à examiner l'application aux équations à invariants égaux de la deuxième méthode de transformation, indiquée n° 4 : on peut rattacher aisément l'équation en θ, à laquelle on est conduit, à la transformée de M. Moutard relative à la solution μ.

Les relations

$$\theta = \sigma - \frac{\sigma'}{z'} z, \qquad \tau = \sigma - \mu z, \qquad \tau' = \sigma' - \mu z'$$

donnent en effet

$$\theta = \tau - \frac{\tau'}{z'} z,$$

et par conséquent

$$\rho\theta = \varphi - \frac{\varphi'}{z'} z = \mu\left(\omega - \frac{\omega'}{z'} z\right).$$

puisque l'on a

$$\varphi = \sigma + \tau = \mu\omega.$$

L'équation dont dépend θ peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\log \frac{z'}{\sigma'}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\log \frac{z'}{\tau'}\right)\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0;$$

on voit que cette équation n'est à invariants égaux que si l'on a

$$\frac{\partial^2 \log \frac{\sigma'}{\tau'}}{\partial x\, \partial y} = 0.$$

Il y aurait lieu d'étudier d'une façon précise dans quel cas cette relation peut être satisfaite.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GABRIEL KŒNIGS. — LEÇONS DE CINÉMATIQUE, professées à la Sorbonne; avec des Notes par M. *G. Darboux* et par MM. *E.* et *F. Cosserat*. 1 vol. in-8°, x-499 p. Paris, Hermann, 1897.

Ampère, qui a séparé définitivement de la Mécanique l'étude des mouvements géométriques, a établi pour la nouvelle Science un programme qui est devenu classique, mais avec cette interprétation un peu étroite que la Cinématique a seulement pour objectif de conduire à la théorie des mécanismes.

Carnot, avant Ampère, avait donné, dans sa *Géométrie de position*, une idée plus compréhensive du but à atteindre.

« Si la théorie des mouvements géométriques était approfondie, dit-il (p. 338), la Mécanique et l'Hydraulique seraient infiniment simplifiées; elles se réduiraient au développement du principe général de la communication des mouvements, qui n'est autre chose que celui de l'action toujours égale et contraire à l'action. Les grandes difficultés analytiques qu'on rencontre, dans la science de l'équilibre et du mouvement, viennent principalement de ce que la théorie des mouvements géométriques n'est point faite; elle mérite donc toute l'attention des savants. »

Le Livre de M. Kœnigs, tout en constituant une introduction très complète et, à bien des égards, nouvelle à la théorie des mécanismes, s'inspire en outre de la vue large de Carnot que nous venons de rappeler.

Pour traiter la Cinématique avec l'ampleur désirable et lui donner l'unité qui est le propre de toute Science, il faut une méthode qui possède la puissance d'investigation et la généralité de l'Analyse, mais qui donne aussi, comme la Géométrie, la vue claire et directe des faits, sans les masquer par l'appareil du Calcul. La Mécanique en a fourni tous les éléments. C'est d'elle que vient cette remarquable Géométrie des quantités dirigées qui concentre toute l'attention sur ce qu'il y a d'essentiel dans les problèmes; elle aussi a fait naître l'idée des axes mobiles de coordonnées, cet instrument si maniable et si souple qui peut atteindre à tout avec autant d'aisance que de sûreté.

En faisant reposer toute son exposition de la Cinématique sur la Géométrie de la droite et sur l'emploi du trièdre mobile, M. Kœnigs a su faire une synthèse très complète, et en même temps bien personnelle, des méthodes fécondes de recherches que nous devons à Poinsot, Chasles et Bonnet, et plus près de nous à Ribaucour et à M. Darboux.

C'est par la théorie des segments que s'ouvre l'Ouvrage. Après un excellent exposé de la théorie des projections, l'auteur introduit la considération du moment de deux segments, qui a l'avantage de grouper deux éléments importants : les moments par rapport aux axes et les tétraèdres envisagés par Chasles dans la Statique.

Les systèmes de segments font apparaître le couple et la vis de Ball et conduisent, par une voie naturelle, à la théorie de la droite; les propriétés du complexe linéaire sont obtenues d'une manière particulièrement élégante.

Il semblait qu'il n'y eût rien à ajouter aux notions courantes sur le mouvement, la vitesse et l'accélération, qui font l'objet du Chapitre II. M. Kœnigs a pu en accroître l'intérêt par l'introduction du trièdre mobile, qui permet de donner toute la précision nécessaire à ces notions fondamentales, par la définition des coordonnées curvilignes et du ds^2 de l'espace, qui se rattache de la manière la plus naturelle à l'idée de vitesse; enfin, par la considération de l'hodographe, qui rend intuitives la nature et les propriétés de l'accélération. Il donne l'expression très importante de l'accélération en coordonnées curvilignes; elle ne contient que les éléments du ds^2. Des applications bien choisies terminent le Chapitre : l'accélération est rapprochée de la déviation et, entre autres mouvements curvilignes, l'auteur étudie le mouvement oscillatoire et le mouvement sur une hélice.

Le Chapitre III s'occupe du changement de système de comparaison et du mouvement relatif. Après avoir établi la relation entre la vitesse absolue, la vitesse relative et la vitesse d'entraînement d'un point mobile, il obtient les formules fondamentales de la Cinématique qui expriment les projections de la vitesse absolue sur les axes du trièdre mobile; il les applique à la composition des vitesses dans le cas des coordonnées rectangulaires et des coordonnées polaires; elles conduisent immédiatement aux règles de Poinsot et de Roberval, pour la construction des tangentes et

des normales, et à d'élégantes propositions relatives aux conchoïdes les plus générales.

Avec le Chapitre IV est abordée la Cinématique du corps solide, et un élément nouveau apparaît, la rotation définie par un segment; la vitesse d'un point d'un corps animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe est ainsi représentée par un moment. Ces notions établissent immédiatement un lien étroit entre la théorie des segments et des moments et celle du déplacement d'un corps solide. L'auteur fait ressortir le parallélisme remarquable qui existe entre la théorie des rotations et celle des segments; il donne une forme concrète aux segments qui apparaissent dans les formules fondamentales du Chapitre III, et il fait voir ainsi que tout mouvement d'un corps peut être à chaque instant regardé comme résultant de plusieurs rotations. La théorie des segments conduit dès lors à l'idée du mouvement hélicoïdal instantané ou tangent dont les propriétés sont par là même immédiatement connues. M. Kœnigs insiste, dans un paragraphe plein d'intérêt, sur le caractère presque intuitif de la forme hélicoïdale de tout déplacement infiniment petit d'un corps, et montre comment l'idée si remarquable de Chasles se rattache aux transformations infinitésimales de M. Sophus Lie. La méthode qui a servi à Chasles, pour obtenir les propriétés du déplacement infiniment petit d'un corps, a été reprise depuis et entièrement développée par plusieurs géomètres. L'auteur expose rapidement la partie classique de cette question; la considération des segments attachés au trièdre mobile le conduit ensuite aux importantes relations qui existent entre la théorie des complexes linéaires et le déplacement d'un corps solide. Ces relations sont établies d'une manière purement géométrique; mais l'auteur montre, sur un exemple simple, avec quelle facilité on pourrait les mettre en évidence par l'emploi du trièdre mobile. Il est ainsi amené à exposer le problème, traité par M. Darboux, de la détermination d'un mouvement continu quand on connaît les rotations, et il fait ensuite l'application de ces formules aux courbes gauches.

L'accélération dans le mouvement relatif fait l'objet du Chapitre V. La définition de l'accélération, donnée précédemment au moyen de l'hodographe, et l'emploi du trièdre mobile conduisent directement aux formules de Bour. Il suffit d'interpréter ces for-

mules pour obtenir le théorème de Coriolis, qui se trouve ainsi établi en quelques lignes. L'étude de la distribution de l'accélération dans un corps en mouvement se fait d'une manière non moins simple. La brièveté de ce Chapitre, où pourtant la question envisagée est traitée d'une manière très complète, fait ressortir combien l'instrument de calcul adopté par l'auteur est commode; tous les inconvénients inhérents à l'emploi des coordonnées ordinaires disparaissent, et à chaque pas on obtient d'une façon immédiate tous les faits géométriques intéressants.

L'étude de détail que l'auteur entreprend, dans les Chapitres suivants, des mouvements particuliers les plus importants d'un corps solide, va confirmer de la manière la plus ample cette puissance de la méthode.

Le Chapitre VI est consacré à l'étude du mouvement d'une figure plane dans son plan. Les formules fondamentales, qui expriment la vitesse d'un point de la figure mobile, mettent tout de suite en évidence l'existence du centre instantané et des deux roulettes. Les formules relatives à l'accélération, par un choix particulier des axes mobiles suggéré par l'existence des roulettes, reçoivent une forme très simple conduisant d'une manière élégante à la formule de Savary. L'auteur généralise cette formule et obtient le théorème relatif au centre de courbure de l'enveloppe d'une courbe mobile. L'interprétation de la formule de Savary au moyen des formules fondamentales de l'accélération conduit à la construction géométrique du centre de courbure de la trajectoire d'un point au moyen des centres de courbure des deux roulettes. La remarque que la correspondance entre le point de la trajectoire et le centre de courbure est une homographie introduit par une voie naturelle le cercle des inflexions et le cercle des rebroussements, et l'auteur, en appliquant les formules de Bour aux accélérations d'ordre quelconque, complète ces notions par une étude très intéressante des trajectoires dans le voisinage d'un point. Le Chapitre se termine par la détermination du lieu du centre des accélérations quand la loi du temps varie, et du lieu des points dont l'accélération tangentielle est nulle.

A cette exposition, si complète, l'auteur a encore ajouté, au commencement du Chapitre VII, de nombreuses applications choisies avec un très grand soin. On y trouvera en particulier les

questions classiques du mouvement cycloïdal et de la génération des podaires et des caustiques. Dans la seconde partie du Chapitre s'introduisent les propositions remarquables qui sont relatives aux aires. Le curieux théorème de Holditch, le principe des planimètres polaires, sont établis par la voie la plus simple et la plus élégante. M. Kœnigs étend l'ordre d'idées précédent en envisageant un segment variable, et il obtient le théorème de Steiner relatif aux aires des roulettes, auquel il ajoute le théorème de Géométrie générale qu'il a fait connaître en 1894 dans les *Comptes rendus*. Ce Chapitre se termine par le théorème de Steiner relatif aux arcs.

L'étude du mouvement autour d'un point fixe occupe le Chapitre VIII et se trouve traitée par la même méthode que le mouvement d'une figure plane dans son plan. L'emploi du trièdre mobile conduit, avec la même simplicité et la même rigueur quant aux signes, au théorème de Rivals sur l'accélération et à la formule analogue à celle de Savary. L'auteur traite avec un grand soin la question de la réduction du nombre des variables qui définissent le mouvement d'un trièdre mobile, et il établit les célèbres formules d'Euler et d'Olinde Rodrigues.

Un très remarquable Chapitre est ensuite consacré au mouvement continu le plus général d'un corps solide. Un premier problème se pose : la recherche des courbes liées à la figure mobile et qui ont une enveloppe. Le problème se réduit aux quadratures par la belle méthode d'intégration due à M. Darboux, et qui ramène à une équation de Riccati la recherche du mouvement continu quand les rotations sont données. La méthode suivie met tout de suite en évidence qu'une courbe de la figure mobile qui a une enveloppe, glisse en général sur cette enveloppe. Elle permettra, en outre, à l'auteur de préciser la nature du mouvement que Reuleaux a appelé *viration ;* jamais aucune courbe, tracée sur la surface lieu de l'axe du mouvement hélicoïdal dans la figure mobile, ne reste tangente à une courbe, à moins que le mouvement hélicoïdal tangent ne se réduise à une rotation ou que les deux surfaces lieux de l'axe du mouvement hélicoïdal ne soient deux développables dont les arêtes sont constamment en contact. Ces deux cas sont étudiés avec le plus grand soin : au premier se rattache le problème de la déformation des surfaces réglées ; l'auteur est con-

duit à cette conclusion curieuse, susceptible d'applications pratiques : que, quelle que soit la surface réglée fixe sur laquelle vire sans glisser une surface mobile, les courbes liées à cette dernière, qui ont une enveloppe, sont toujours les mêmes. Ce beau Chapitre se termine par l'étude du caractère distinctif de la viration et par quelques remarques générales sur l'accélération dans le mouvement d'un corps solide.

Le Chapitre X est consacré à la notion féconde des degrés de liberté d'un système mobile et des mouvements à plusieurs paramètres. La considération d'un segment qui possède deux degrés de liberté permet à l'auteur d'introduire les congruences de droite, les foyers et plans focaux, les surfaces focales. Le cas particulier dans lequel trois points d'un segment décrivent trois plans rectangulaires et celui dans lequel les trois points décrivent trois sphères servent d'applications à ces premières généralités. M. Kœnigs définit ensuite les degrés de liberté d'un corps solide. Il donne les formules fondamentales qui expriment la vitesse absolue d'un point d'un corps à n degrés de liberté lorsqu'on rapporte cette vitesse à un trièdre mobile. Les translations et les rotations de ce trièdre ne peuvent être quelconques, elles doivent satisfaire à un système d'équations très important dont le rôle, pour le cas où le trièdre a deux degrés de liberté, est capital dans la théorie générale des surfaces. Vient ensuite l'application de ces principes au mouvement d'un corps assujetti à quatre conditions ; ils conduisent, de la manière la plus simple, à l'existence des deux axes de rotation instantanée et au théorème de MM. Schönemann et Mannheim. L'auteur termine l'étude du mouvement à deux paramètres en démontrant le remarquable théorème d'Albert Ribaucour, qui rattache le problème de la déformation des surfaces à l'étude de certains mouvements. Le Chapitre s'achève par la recherche des mouvements à trois paramètres réductibles à des rotations successives, et par la considération du mouvement très intéressant d'une figure qui reste symétrique d'une figure fixe.

La théorie des systèmes articulés a maintenant sa place marquée dans l'enseignement de la Cinématique ; par ses nombreux contacts avec la Géométrie et par les applications multiples qu'elle trouve dans la pratique, elle constitue, en effet, une transition naturelle entre les doctrines géométriques qui précèdent et la théorie

des mécanismes. M. Kœnigs a consacré, à ce sujet, un Chapitre très remarquable, qui s'ouvre par un historique intéressant des systèmes articulés et par la définition générale d'un système articulé plan. Le système articulé le plus simple est le quadrilatère ou système à quatre membres dont la forme dépend d'un seul paramètre. Une discussion géométrique fort élégante permet à l'auteur de distinguer, dans les quadrilatères articulés, trois formes, convexe, uniconcave et biconcave, et d'établir la condition d'existence des pivots à révolution complète ; il montre que, dans un quadrilatère qui a deux pivots à révolution complète, ces deux pivots sont aux extrémités de la plus petite tige ; les quadrilatères qui ont trois pivots à révolution complète sont le cerf-volant et le fer de lance des Anglais ; quand tous les pivots sont à révolution complète, on a le parallélogramme et le contre-parallélogramme. Ces résultats peuvent être obtenus par la belle méthode analytique qui a permis à M. Darboux de rattacher la question de la déformation des quadrilatères articulés à la théorie des fonctions elliptiques. M. Kœnigs, en faisant subir à cette méthode une modification qui supprime la considération des imaginaires, a recherché dans quel cas on peut passer, par déformation continue, d'un quadrilatère construit avec des tiges données à un autre quadrilatère construit avec les mêmes tiges, et il retrouve le criterium qui s'est déjà présenté dans la question des pivots. La transformation des mouvements de rotation au moyen de quadrilatères articulés se trouve ensuite naturellement abordée, par l'étude des trois-barres ; l'auteur établit la propriété très intéressante que possèdent les quadrilatères articulés de décrire, par un point invariablement lié à la bielle, les podaires de coniques. Un trois-barres est un quadrilatère dont le mouvement dépend d'un seul paramètre ; les transformateurs articulés possèdent un mouvement qui dépend de plusieurs paramètres. Les plus connus des transformateurs sont les pantographes ; le pantographe de Sylvester conduit au théorème remarquable de M. Roberts, sur la triple génération de la courbe décrite par un point lié à une bielle, et au principe de l'échange de bielle et manivelle, qui fournit une démonstration intuitive du théorème de Cayley, sur la description des podaires de coniques. Après les pantographes se présentent les inverseurs, et en particulier ceux de Hart et de

Paucellier, puis les ingénieux appareils de Kempe, sur la considération desquels l'inventeur a fondé la démonstration de ce remarquable théorème que l'on peut toujours trouver un système articulé dont un point décrive une courbe algébrique plane donnée à l'avance. M. Kœnigs, par cet attachant exposé, amène ainsi le lecteur à l'importante question du guidage exact ou approché du mouvement rectiligne d'un point; il présente une très belle étude du parallélogramme de Watt, la solution exacte obtenue par Paucellier et retrouvée par Lipkine, enfin les beaux appareils à ligne droite dus à Hart et à Kempe; il expose la méthode suivie par M. Darboux, dans l'étude d'un de ces appareils, méthode qui montre le parti que l'on peut tirer des imaginaires, ou, ce qui revient au même, du calcul des équipollences dans la théorie des systèmes articulés; il indique également la disposition d'un système à cinq tiges qui permet de décrire une ellipse et de réaliser rigoureusement le mouvement de l'ellipsographe que le balancier d'Oliver Evans fournit seulement d'une manière approximative. L'auteur montre tout le parti que l'on peut tirer d'un même appareil articulé. Le contre-parallélogramme, qui sert à décrire des podaires d'ellipse et d'hyperbole, a été utilisé par Hart comme inverseur; il peut aussi être employé pour décrire les cubiques circulaires unicursales à axe de symétrie. Un autre exemple est le protacteur, qui permet de décrire les conchoïdes. Les systèmes articulés peuvent également être employés à la résolution des équations et à la représentation des fonctions. L'étude des systèmes articulés gauches suit celle des systèmes plans et n'est pas moins complète ni moins intéressante. A la question classique du joint de Cardan, l'auteur a ajouté une théorie très élégante du joint Goubet et du joint Clémens, du planigraphe et de l'ellipsoïdographe construits en application d'un théorème de M. Darboux. Le Chapitre se termine par les remarquables théorèmes que l'auteur a fait connaître en avril 1895 dans les *Comptes rendus* et qui établissent qu'il n'est point de mouvement algébrique d'un corps qui ne puisse être réalisé au moyen de simples articulations.

Cette belle exposition de la théorie des systèmes articulés attirera vivement l'attention des géomètres, et elle ne peut manquer de provoquer les nouvelles recherches que l'auteur leur demande pour développer plus encore cette nouvelle branche de la Ciné-

matique, qui remonte à peine à trente ans, et qui offre déjà des applications si variées et si importantes.

Le Chapitre final du Livre introduit, comme le précédent, dans le programme classique un sujet nouveau et qui n'a pas moins d'intérêt; l'auteur envisage le déplacement comme cas particulier d'homographie. Il fait voir d'abord l'identité des formules qui représentent un déplacement dans le plan avec celles d'un changement de coordonnées, et présente alors l'étude des formules de la transformation homographique la plus générale du plan. Il en ressort très nettement le caractère du déplacement plan qui est une homographie, dans laquelle les points circulaires à l'infini sont chacun leur propre homologue. Pour le cas d'un déplacement dans l'espace, une étude analogue montre que, dans l'homographie correspondante, il n'y a pas, en général, de point double à distance finie; tout déplacement est une homographie qui conserve le cercle de l'infini. La recherche des transformations homographiques qui conservent les points circulaires à l'infini conduit à ce résultat que, s'il n'y a pas échange entre ces points, l'homographie est un déplacement accompagné d'une homothétie et, s'il y a échange, l'homographie est un renversement accompagné d'une homothétie et d'un déplacement. L'auteur montre que le groupe des transformations homographiques, qui conservent chacun des points circulaires à l'infini, est identique à celui des substitutions linéaires entières; on se trouve conduit ainsi au calcul des équipollences de Bellavitis, dont l'application aux notions essentielles de la Cinématique est rapidement expliquée. La recherche des homographies de l'espace, qui conservent le cercle de l'infini, donne des résultats non moins intéressants. Toute transformation de ce genre consiste en un déplacement accompagné, s'il y a lieu, d'une homothétie directe ou inverse. Les coordonnées, rapportées au cercle de l'infini, sont introduites et appliquées aux figures sphériques; l'auteur montre qu'à toute rotation autour d'un point se trouve attachée une transformation linéaire fractionnaire, portant sur une variable complexe, et termine ce Chapitre par des indications sur les groupes de substitutions linéaires attachées aux rotations qui ne font qu'échanger entre eux les sommets d'un polyèdre régulier.

Au Livre déjà si riche de M. Kœnigs se trouvent ajoutées trois Notes de M. Darboux, dont une, sur les mouvements algébriques, est particulièrement importante et entièrement inédite.

La Note I donne une nouvelle démonstration des formules d'Euler et d'Olinde Rodrigues, qui est directe et offre une interprétation immédiate des paramètres qui figurent dans ces formules.

La Note II est relative aux renversements et inversions planes qui permettent d'étudier et de composer très simplement les divers déplacements de l'espace. Une rotation peut se représenter par des renversements successifs, autour de deux droites perpendiculaires sur l'axe de rotation au même point, et une translation par deux inversions relatives à des plans parallèles. On obtient ainsi une méthode très simple pour la composition des rotations autour d'axes concourants. On ramène également tout déplacement fini d'un corps solide à deux renversements successifs autour de deux droites; la notion du déplacement hélicoïdal découle immédiatement de là.

La Note III est consacrée aux mouvements algébriques. Les mouvements algébriques et leurs inverses, qui sont aussi algébriques, présentent des relations de dualité, dont l'intérêt a été signalé, pour la première fois, par Chasles, dans l'*Aperçu historique,* et qui permettent de traiter certains problèmes particuliers, entre autres celui de la recherche des mouvements à un paramètre dans lesquels tous les points du corps décrivent des courbes planes: l'examen de cette dernière question conduit au mouvement dans lequel tous les points de la figure mobile décrivent des coniques, et montre qu'en dehors de ce mouvement et de celui d'une figure de forme invariable, dont un plan glisse sur lui-même, il n'y a pas d'autre mouvement dans lequel tous les points de la figure décrivent des courbes planes. Les variables d'Olinde Rodrigues permettent ensuite à M. Darboux de définir les mouvements algébriques les plus généraux. Si l'on met les formules du mouvement sous la forme d'une transformation homographique entre coordonnées homogènes, et si l'on prend, pour les paramètres qui entrent dans ces formules, des fonctions rationnelles d'une ou de plusieurs variables, on obtient des mouve-

ments algébriques unicursaux à un ou à plusieurs paramètres. Il est aisé d'obtenir ainsi des mouvements dans lesquels tous les points de la figure décrivent des cubiques gauches, ou des quartiques de Steiner. La considération des mouvements unicursaux à deux paramètres conduit ensuite, en supposant que les variables d'Olinde Rodrigues soient des fonctions linéaires de ces deux paramètres, au cas remarquable où un point quelconque de la figure décrit une surface de Steiner. En général, il existe, dans ce mouvement, dix points de la figure qui décrivent des plans; après avoir montré que ce nombre dix peut se trouver abaissé, M. Darboux remarque que le mouvement le plus général de cette nature ne donne, pour les surfaces trajectoires, que des surfaces de Steiner ou des plans pour les dix points dont il vient d'être question; dans certains cas particuliers, il peut arriver que le degré des surfaces trajectoires de certains points soit en outre abaissé; le cas le plus intéressant est celui dans lequel il existe un tétraèdre jouissant des propriétés suivantes : tout point en dehors des faces décrit une surface de Steiner; tout point sur une des faces, en dehors des arêtes, décrit une surface réglée du troisième ordre; tout point sur une des arêtes décrit une quadrique ou un plan. L'intérêt qui s'attache à la recherche des conditions dans lesquelles un nombre fini ou infini de points du corps décrivent des plans ou des courbes planes se trouve ainsi mis en évidence; et M. Darboux termine sa Note par les indications qu'il a données sur ce problème, en 1881, dans son enseignement; si l'on suppose, par exemple, que l'on assujettisse un certain nombre de points à décrire des plans, il peut se faire que, par le fait même, d'autres points décrivent également des plans; le cas où quatre points sont assujettis à décrire quatre plans est particulièrement intéressant; il conduit, entre autres résultats, à la considération de surfaces du huitième ordre, admettant une génération par une double série de coniques.

Une Note de MM. E. et F. Cosserat contient un exposé, basé sur la considération des coordonnées curvilignes, des premières notions relatives à la Cinématique d'un milieu continu; la définition de la déformation infiniment petite, et des dilatations, glissements et rotations qui s'y rapportent, est précisée par l'introduction d'un paramètre; quelques indications sont données sur

l'emploi du trièdre mobile, dans l'étude de cette partie de la Cinématique; elles permettent, en particulier, d'établir, d'une façon intuitive, des formules qui comprennent celles obtenues péniblement par Lamé.

A ces Notes, M. Kœnigs a ajouté toute une série de développements intéressants sur divers sujets qui ne rentraient pas directement dans le cadre de son Livre, mais qui en forment un complément très utile. Il fait d'abord connaître les coordonnées tétraédriques des segments qui jouent un rôle si important dans les recherches de Géométrie réglée. Il expose ensuite la curieuse et féconde théorie de Grassmann sur l'étendue figurée, les propriétés infinitésimales des complexes linéaires qui peuvent trouver plus d'une application en Mécanique, la forme remarquable que la théorie des segments permet de donner à l'expression du travail virtuel des forces appliquées à un corps solide; il donne les belles propositions qu'il a obtenues à l'égard des volumes engendrés par un contour fermé. Il revient sur le problème des centres de courbure dans le mouvement d'une figure plane, pour examiner le cas où la construction de Savary tombe en défaut, puis donne un exposé des recherches de MM. Gruey, Schœnflies, Gilbert sur la distribution de l'accélération dans un solide en mouvement. M. Kœnigs résume en quelques pages, qui seront lues avec un vif intérêt, la théorie de la vis de Ball, en indiquant comment elle conduit à la notion importante des vis principales, source de questions entièrement nouvelles. Une Note est également consacrée à la surface remarquable appelée *cylindroïde* par Cayley. La théorie des quaternions, dont certaines parties se rattachent étroitement à la théorie de la rotation des corps, est l'objet d'une belle étude où l'on remarquera la rigueur et la clarté avec lesquelles sont établies les notions fondamentales relatives aux verseurs, et l'interprétation que la théorie des renversements permet d'en donner. Une dernière Note, sur les représentations graphiques, complète cet ensemble d'additions si instructives, et d'un caractère si original.

Nous ne savons si ce rapide résumé aura pu donner au lecteur quelque idée de la parfaite homogénéité du Livre de M. Kœnigs, du caractère lumineux et de l'élégance des démonstrations, des larges aperçus qu'il ouvre dans toutes les directions. Par l'impor-

tance et la variété de ses matières, cet Ouvrage est appelé à avoir une influence considérable sur l'enseignement de la Cinématique et sur ses progrès. E. COSSERAT.

MÉRAY (CH.). Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon. — LEÇONS NOUVELLES SUR L'ANALYSE INFINITÉSIMALE ET SES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES. Troisième Partie : *Questions analytiques classiques*. 1 vol. in-8°. VI-206 p. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1897.

M. Méray vient de faire paraître un nouveau Volume de ses belles *Leçons sur l'Analyse*. Cette troisième Partie, intitulée *Questions analytiques classiques*, contient un exposé des Calculs les plus courants, de ceux qu'un bon candidat à la Licence doit, obligatoirement, connaître. Dans sa préface, l'auteur s'excuse « des omissions résultant de l'insuffisance de l'espace dont il dispose », et nous, ses lecteurs, nous regrettons vivement qu'une cause aussi vulgaire ait pu nous priver des développements intéressants que, sans doute, nous aurions vu se joindre à ceux que contient déjà ce Volume un peu écourté.

Tout ce que ce Livre renferme est connu, très connu, et cependant il n'y a pas une ligne où la forte personnalité de l'auteur n'apparaisse. Dans son désir constant de mettre une harmonie parfaite dans son exposition, M. Méray sait imprimer aux questions les plus rebattues un cachet d'originalité qui rend la lecture de son Œuvre intéressante même (et *surtout*) pour ceux qui connaissent le mieux les sujets sur lesquels il revient.

Je regrette vivement que les quadratures élémentaires ne soient plus au programme de la classe de Mathématiques spéciales, car je conseillerais à tous mes collègues de lire attentivement le premier Chapitre, où ce sujet est traité de la façon la plus large et la plus claire possible. Pour l'intégration des différentielles rationnelles, la méthode de la décomposition générale des fractions rationnelles en éléments simples, dans le cas où l'on connaît une décomposition du dénominateur en facteurs premiers entre eux deux à deux, est mise en avant, de telle sorte que la décomposi-

tion en éléments de la forme

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^\mu}$$

se présente comme un cas particulier. Viennent, ensuite, les différentielles algébriques irrationnelles, la différentielle binome et les différentielles transcendantes. Pour ces dernières, je signalerai, plus particulièrement, le procédé d'intégration des différentielles de la forme

$$F(e^{ax})\,dx,$$

où F est une composante rationnelle, qui n'est qu'une application directe des résultats généraux, établis dans le second Volume, sur la décomposition des fonctions unipériodiques polarisées en éléments simples.

Le Chapitre II est réservé au calcul de certaines intégrales définies que, sans connaître l'intégrale indéfinie, on parvient cependant à déterminer par des artifices spéciaux, comme la différentiation ou l'intégration sous le signe $\int$, ou encore le tronçonnement indéfini du chemin de l'intégration. Telles sont les intégrales classiques

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

D'autres intégrales, telles que celles qui sont de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

se calculent par le théorème des résidus, de Cauchy. L'un des exemples les plus curieux de ce genre est celui des intégrales de Fresnel

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx, \quad \int_0^\infty \sin x^2\,dx.$$

M. Méray commence l'étude de l'intégration pratique des équations différentielles par celle des équations différentielles linéaires. Cette manière de procéder est éminemment logique, parce que ces équations sont les seules dont l'étude offre un caractère de géné-

ralité. Il examine d'abord les systèmes (*immédiats*) de la forme

$$\frac{du}{dx} = K_1 + A_1 u + \ldots + H_1 t,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dt}{dx} = K_g + A_g u + \ldots + H_g t,$$

et ramène tous les autres systèmes, et, en particulier, *une* équation différentielle linéaire d'ordre m, à celui-ci. En procédant ainsi, cette théorie se présente sous son jour le plus simple, sous la forme la plus concise possible, et il est curieux de voir comment tout ce qu'il y a d'essentiel sur ce sujet a pu être condensé en une dizaine de pages, au plus. Le cas des équations linéaires à coefficients constants est traité avec tous les détails désirables, en suivant la voie indiquée par Cauchy, mais par une méthode bien plus rigoureuse et plus nette que celle qu'avait donnée l'illustre géomètre.

Ce n'est qu'après cette étude des équations linéaires que vient celle des équations particulières du premier ordre (à variables séparées, homogènes, de Clairaut, etc.) et des équations d'ordre supérieur qui se ramènent simplement à celles-ci. L'auteur n'y parle plus du *facteur intégrant* dont il avait déjà fait une étude très générale dans la première Partie (399-403); il reste aussi muet sur certains points qui sont rarement oubliés dans les Traités de ce genre; il faut probablement imputer ces omissions au manque de place. J'en regrette cependant quelques-unes, par exemple celle de l'équation dite *de Riccati*, qui se présente dans la recherche des lignes asymptotiques des surfaces réglées et dans d'autres questions de Géométrie. Il est vrai qu'on ne sait pas intégrer cette équation dans le cas le plus général; c'est peut-être là la raison pour laquelle elle a été oubliée, volontairement.

Le Chapitre IV traite des équations aux dérivées partielles d'abord linéaires, puis quelconques. En ce qui concerne les dernières, M. Méray, en s'appuyant sur ses théorèmes généraux, dont il tire un parti merveilleux, établit, d'une façon tout à fait originale, le procédé d'intégration de Cauchy par les caractéristiques. Je me permettrai cependant de lui faire observer qu'il a

toujours raisonné sur l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

résolue par rapport à $\frac{\partial u}{\partial x}$, et que, du moins pour les débutants, il eût peut-être été bon, ne fût-ce que par un mot, d'indiquer que le même procédé s'applique, sans modifications profondes, aux équations non résolues. La définition de l'intégrale complète, d'après Lagrange, et le procédé qui permet d'en déduire l'intégrale générale clôt ce Chapitre.

Sous le titre *Questions de maximum et de minimum*, sont réunis, dans le cinquième Chapitre, non seulement celles qui ont trait aux maxima et minima de fonctions de plusieurs variables, mais encore les principes généraux du Calcul des variations, pour les intégrales simples. Ces questions, souvent négligées dans d'autres Ouvrages, sont traitées avec beaucoup de méthode et de soin; mais, malgré le sentiment de l'Auteur qui trouve que des applications de Géométrie ou de Mécanique seraient déplacées, je pense qu'un petit exemple concret, comme la détermination d'une géodésique, aurait été très utile pour le lecteur novice, afin de lui faire saisir l'intérêt de ces spéculations, dont il ne verra peut-être pas toute la portée, de prime abord.

Le dernier Chapitre contient la définition et l'étude sommaire des intégrales multiples réelles. J'y citerai, tout spécialement, la démonstration rigoureuse (car bien souvent on la fait très mal) de la formule du changement de variables sous le signe $\int\int$.

M. Méray, toujours à la recherche de simplifications dans ses belles théories, a, depuis l'apparition de son premier Volume, trouvé le moyen de substituer au lemme de Cauchy, dont il fait un si grand usage, une proposition plus facile qu'il expose dans une première *Addition* et dont, d'ailleurs, dans l'*Addition II*, il déduit ensuite ce fameux lemme.

Ces Additions sont suivies de trois autres, très importantes dont l'une est relative à la théorie générale des équations aux différentielles totales et une autre à l'interpolation et à la théorie des fonctions d'une seule variable.

Ce Volume, on le voit, est un digne compagnon des deux premiers déjà parus, et je suis certain d'avance que le quatrième et dernier, que j'attends avec impatience, nous réserve de ces surprises et de ces horizons inattendus dont M. Méray a le secret.

C. BOURLET.

J.-C. HAGEN. — INDEX OPERUM LEONARDI EULERI. In-8°, VIII-80 p. Berlin, F. Dames, 1896.

L'auteur commence par remarquer avec raison que tous ceux qui se consacrent à l'étude des Mathématiques, et plus particulièrement à l'histoire de cette Science dans le siècle précédent, ont dû vivement regretter qu'il n'existât aucune édition complète des Œuvres d'Euler. On a fait à des géomètres, plus anciens ou plus récents, l'honneur de réunir l'ensemble de leurs écrits. Comment peut-il se faire qu'Euler, l'un des plus grands, ait été oublié?

M. Hagen pense que cet oubli tient surtout à ce que trois nations différentes peuvent revendiquer la gloire des travaux d'Euler : la Suisse d'abord, où il est né; puis la Russie et la Prusse, où il s'établit tour à tour sans jamais revenir dans sa patrie. La multitude des écrits d'Euler, il faut le dire aussi, rend très malaisée et très difficile une telle publication. Sans parler des Ouvrages imprimés séparément, qui sont au nombre de plus de trente et dont quelques-uns contiennent plusieurs Volumes, Euler a composé environ huit cents Mémoires dont la moitié environ fut écrite après qu'il fut devenu aveugle à Saint-Pétersbourg. On connaît déjà des listes dressées, à différentes époques, de ces travaux. Nous allons les énumérer par ordre de date.

1° Liste complète des Ouvrages de M.-L. Euler, insérée par N. Fuss dans l'*Éloge de M. Euler*. Saint-Pétersbourg; 1783.

2° *Index absolutissimus omnium Euleri lucubrationum tum editarum tum ineditarum*, dans le Tome II de la seconde édition du *Calcul différentiel;* 1787.

3° Liste complète et systématique des Ouvrages de Léonard Euler, publiée en 1840 par P.-H. Fuchs (fils de N. Fuss) dans le Tome I de la *Correspondance mathématique et Physique*.

Pour composer son nouvel Index, M. Hagen a fait usage de tous ces travaux et de quelques autres moins complets. Il a corrigé les erreurs de transcription de date; comparé, toutes les fois que cela a été possible, avec les Ouvrages originaux; en un mot, il a pris toutes les précautions inspirées par le respect de la mémoire du grand géomètre et le désir de préparer d'une manière véritablement efficace la publication d'une édition définitive de ses Œuvres. Il termine sa Préface en indiquant quels devraient être à peu près le plan et l'étendue de cette publication et en émettant le vœu que quelque Mécène de l'Amérique du Nord veuille bien patronner une entreprise si glorieuse. Nous nous joignons volontiers à lui : une édition des Œuvres d'Euler, en même temps qu'elle ferait honneur à l'Amérique, aurait l'influence la plus heureuse sur le développement des études mathématiques dans toutes les Universités de ce grand pays.

GINO LORIA. — IL PASSATO ED IL PRESENTE DELLE PRINCIPALI TEORIE GEOMETRICHE. Seconda edizione accresciuta ed interamente riffatta. In-8°, xx-348 p. Turin, C. Clausen; 1896.

L'Ouvrage, dont nous avons à rendre compte, peut être considéré comme le développement d'une monographie inséré en 1887 dans les Mémoires de l'Académie de Turin. Cette monographie avait, à justre titre, attiré l'attention des géomètres et mérité les honneurs d'une traduction allemande dont nous avons rendu compte en 1889 (¹). Mais la nouvelle édition, que nous donne M. Loria en langue italienne, a été considérablement accrue encore et peut être considérée, à bien des égards, comme un Ouvrage entièrement nouveau. Nous allons tout d'abord indiquer rapidement le plan suivi par M. Gino Loria et les différentes théories dont il s'est proposé de nous exposer l'origine et l'état actuel.

Un premier Chapitre de 36 pages, qui peut être considéré comme une Introduction, donne un aperçu général de l'origine et

---

(¹) *Bulletin*, XIII₁, p. 201-203.

du développement de la Géométrie jusque vers 1850. Les autres Chapitres peuvent être considérés comme des monographies.

Le Chapitre II traite de la *Théorie des courbes planes algébriques.* L'auteur remonte aux travaux d'Euler, de Cramer, de Lamé et de Plücker, continuant jusqu'à l'époque contemporaine et rappelant les travaux dont cette théorie a été l'objet dans toutes les directions, Géométrie pure, théorie des invariants, théorie des fonctions, etc. Il examine ensuite les courbes du troisième ordre générales, certaines courbes du troisième ordre particulières, les courbes générales du quatrième ordre, certaines courbes particulières du quatrième ordre, telles que les quartiques bicirculaires, rationnelles, les courbes de genre un ou de genre deux, etc. Il termine en étudiant les catégories spéciales de courbes planes telles que les courbes rationnelles, elliptiques et hyperelliptiques. Beaucoup de citations donneront des indications précieuses au lecteur.

Le Chapitre III, qui traite de la théorie des surfaces algébriques, est conçu suivant le même plan.

Le Chapitre IV traite des courbes gauches algébriques ; il expose les origines de cette théorie, les travaux de Cayley, d'Halphen et de Nœther et fait connaître également les résultats des études modernes sur les cubiques, les quartiques gauches et d'autres courbes spéciales.

Le Chapitre V traite de ce qu'on appelle, en Italie, la *Géométrie différentielle* et de ce que nous appelons, à plus juste titre, la *Géométrie infinitésimale.* M. Loria fait connaître les origines et les accroissements successifs qu'ont reçus la théorie des courbes gauches, ainsi que la Géométrie infinitésimale des surfaces. Il rappelle les théories célèbres et les Ouvrages d'Euler, de Monge et de Gauss ainsi que les développements qu'elles ont reçus; la théorie des lignes géodésiques, celle des surfaces à courbure constante, des systèmes triples orthogonaux et des coordonnées curvilignes.

Le Chapitre VI est consacré aux recherches relatives à la forme des courbes des surfaces et des autres figures géométriques, à *Analysus situs* et aux configurations.

Le Chapitre VII traite de la Géométrie de la ligne droite dans l'espace suivant le point de vue de Plücker. C'est, en définitive, la

théorie des complexes et des congruences dont le savant auteur nous fait connaître l'origine et les progrès principaux.

Le Chapitre VIII traite des correspondances, des représentations et des transformations. C'est un des moins homogènes, car on y rapproche l'homographie, les transformations de Cremona, les représentations conformes, les connexes, les transformations de contact et les groupes de transformation.

Le Chapitre IX est consacré à l'histoire de la Géométrie énumérative. Il rappelle les différents travaux de Steiner, de M. de Jonquières, de Chasles, la théorie des caractéristiques, les recherches d'Halphen et de M. Schubert.

Le Chapitre X expose les recherches sur la Géométrie non euclidienne qui prend une place de plus en plus grande dans la Science moderne.

Le Chapitre XI traite de la Géométrie dans les espaces à n dimensions.

Enfin le Chapitre XII, qui termine à l'Ouvrage et qui sert en même temps de conclusion, a permis à M. Gino Loria de rappeler certains travaux ou certains sujets particuliers de recherches qui n'avaient pu trouver place dans les cadres précédents.

L'analyse rapide que nous venons de faire renseignera le lecteur beaucoup mieux que ne pourraient le faire toute appréciation. Il est bien clair que, dans le plan qu'il avait adopté, il était impossible à M. Loria de caractériser chacun des travaux importants qui ont paru en Géométrie, de rattacher ces travaux les uns aux autres de manière à dispenser le lecteur de recourir aux sources. Le but de l'auteur nous a paru différent; il veut avant tout permettre au chercheur de s'orienter en lui donnant les moyens de retrouver tout ce dont il aura besoin, et de ne pas perdre son temps à des études mal dirigées. Il a su, en même temps, rassembler les matériaux les plus utiles à celui qui voudra se guider au milieu de l'infinie variété des Mémoires et des monographies particulières; et son Ouvrage sera accueilli avec faveur, en même temps par les géomètres et les historiens de la Science mathématique.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LORENZ (L.). — ŒUVRES SCIENTIFIQUES. Revues et annotées par *H. Valentiner*. Tome I, premier fascicule; in-8°, 210 p. Copenhague, Lehmann et Stage, 1896.

Nous sommes heureux d'annoncer la publication des Œuvres du savant danois L. Lorenz, dont les travaux de Physique mathématique sont bien connus. Ces Œuvres paraîtront en deux Volumes; elles sont publiées aux frais de la fondation Carlsberg. Le premier Volume contiendra les Mémoires de Lorenz sur la théorie de la lumière et comprendra deux fascicules dont le premier vient de paraître et dont le second est sous presse; le second Volume contiendra le reste des Œuvres physiques de Lorenz et, de plus, ses travaux de Mathématiques pures.

Le présent fascicule contient six Mémoires :

Détermination de la direction des vibrations de l'éther lumineux par la polarisation de la lumière diffractée.

Sur la réflexion de la lumière à la surface de séparation de deux milieux transparents et isotropes.

Détermination de la direction des vibrations de l'éther par la réflexion et par la réfraction de la lumière.

Sur la théorie de la lumière (deux Mémoires).

Sur l'identité des vibrations de la lumière et des courants électriques.

La valeur de cette réimpression est singulièrement augmentée par les Notes de M. Valentiner, qui occupent près du quart du Volume; les unes contiennent d'intéressants renseignements bibliographiques relatifs aux travaux sur les sujets traités par Lorenz, soit qu'ils fussent connus ou non de ce dernier, ou aux critiques dont les Mémoires de Lorenz ont été l'objet : ces critiques sont étudiées et discutées soigneusement; d'autres Notes sont destinées à faciliter l'intelligence du texte, et souvent à apporter quelques améliorations, ou quelques restrictions. D'autres enfin contiennent des développements personnels : nous signalerons,

en particulier, la comparaison que fait M. Valentiner entre la théorie électromagnétique de la lumière d'après Lorenz et d'après Maxwell.

Les résultats de ces deux théories sont essentiellement identiques; elles ont été regardées comme équivalentes, et telle paraît avoir été l'opinion de Maxwell. M. Valentiner reprend, d'une façon très personnelle, l'exposition des deux théories et montre qu'elles sont construites sur des bases très différentes : c'est parce qu'il y a une *double* différence entre les deux théories que les résultats arrivent à concorder. J. T.

O. STAUDE. — Die focaleigenschaften der Flachen zweiter Ordnung. Ein neues Capitel zu den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes. In-8°, VIII-185 p. Leipzig, Teubner, 1896.

Dans son Aperçu historique, l'illustre Chasles a consacré une Note des plus élégantes à la théorie des surfaces homofocales du second degré, et il a, le premier, montré, par une foule de propositions, comment on pouvait généraliser la théorie des foyers dans les coniques et étendre cette théorie en introduisant certaines courbes déjà rencontrées par Dupin et auxquelles Chasles a réservé le nom de *focales*. Pour ne prendre qu'un exemple, le théorème d'après lequel la tangente fait des angles égaux avec les rayons vecteurs qui joignent un point d'une conique à ses deux foyers pouvait prendre la forme suivante : la normale à la conique est l'un des axes de la ligne du second degré formée par les droites qui joignent le pied de la normale aux deux foyers; et, sous cette forme, Chasles lui trouvait immédiatement la généralisation suivante : la normale à une surface du second degré est l'un des axes du cône ayant pour sommet le pied de cette normale et pour base l'une des focales de la surface. Il faut recommander aux jeunes géomètres la lecture de cette Note XXXI de l'Aperçu historique. La démonstration aujourd'hui facile des propositions si nombreuses qu'elle renferme constitue un des exercices les plus attrayants et les plus instructifs.

Pourtant, malgré l'abondance des résultats qu'il avait obtenus,

Chasles sentait que ces résultats comprenaient une lacune et il disait : « Il est une propriété principale des coniques qui se retrouve dans les cônes et dont nous n'avons point fait encore mention relativement aux surfaces du second degré. C'est que : la somme ou la différence des rayons vecteurs menés d'un point d'une conique aux deux foyers est constante. Nous avons fait pendant longtemps des tentatives pour trouver quelque chose d'analogue dans les surfaces, mais sans obtenir aucun succès. Aussi désirons-nous vivement que cette matière offre assez d'intérêt pour provoquer d'autres recherches. »

Depuis 1837, la théorie des surfaces homofocales a fait de grands progrès dans différentes directions. En particulier, Liouville, Chasles, Heilermann ont pu croire qu'ils avaient obtenu la généralisation désirée en donnant des constructions, à l'aide de fils, soit des lignes de courbure, soit des lignes géodésiques des surfaces du second degré. Jacobi lui-même, qui s'était occupé de la question, semblait l'avoir épuisée complètement en faisant connaître une conséquence du théorème d'Ivory que nous avons étudiée autrefois dans un opuscule ([1]).

Les théorèmes de Jacobi ont été publiés en 1834 et reproduits en 1846 dans le *Journal de Crelle;* ils constituent incontestablement une extension à l'espace des propriétés métriques des foyers des coniques, c'est-à-dire de l'équation qui relie les distances d'un point quelconque de la courbe à ses deux foyers.

Cette relation peut, en effet, s'énoncer comme il suit :

Il existe entre les distances d'un point d'une conique à ses deux foyers la même relation qu'entre les distances d'un point variable d'une droite à deux points fixes pris sur cette droite.

Jacobi montre de même qu'il existe entre les distances d'un point d'une quadrique à trois foyers, pris sur la même focale, la même relation qu'entre les distances d'un point variable d'un plan à trois points, convenablement choisis, mais fixes de ce plan.

Cette découverte de Jacobi donnait satisfaction au désir exprimé par Chasles; mais il est arrivé dans cette question,

---

([1]) Darboux (G.), *Sur les théorèmes d'Ivory relatifs aux surfaces homofocales du second degré.* Paris, Gauthier-Villars, 1872.

comme dans beaucoup d'autres, qu'une proposition déterminée était susceptible de plusieurs généralisations, toutes très directes, dans des sens différents. Celles que l'on doit à M. Staude sont extrêmement intéressantes et elles conduisent à des constructions, *à l'aide de fils tendus*, de toutes les surfaces du second degré. L'auteur, qui les a fait connaître dans les Mémoires de l'Académie de Saxe et dans les Tomes XX et XXVII des *Mathematische Annalen*, les a beaucoup développées et simplifiées, et il a tenu avec raison à les exposer d'une manière systématique et relativement élémentaire, de telle sorte qu'elles puissent prendre place dans tous les Traités de Géométrie analytique, à côté des propriétés focales des coniques.

L'Ouvrage se divise en deux Parties. La première est consacrée aux surfaces à centre unique. Elle contient quelques propriétés des surfaces homofocales, des coordonnées elliptiques qui sont nécessaires pour l'objet que l'auteur a en vue; puis un Chapitre spécial contient la théorie de ce que l'auteur appelle la *distance focale brisée*. Si l'on considère une courbe quelconque (C) et deux points P et Q pris en dehors de cette courbe, on peut se rendre de P à Q en passant par un point quelconque M de (C). Lorsque la bissectrice de l'angle PMQ est normale en M à la courbe, on a un fil PMQ, composé de deux brins tendus PM, MQ, qui est, comme on sait, en équilibre; la longueur PM + MQ est l'élément essentiel sur lequel reposent les théorèmes de M. O. Staude; il lui donne le nom de *distance d'équilibre* des deux points P, Q par la courbe (C). En introduisant les foyers des deux focales et en calculant les distances d'équilibre d'un point quelconque de l'espace aux deux focales de la quadrique, M. Staude parvient sans difficulté aux propositions qui sont nécessaires pour sa construction. Cette construction repose sur l'emploi d'un fil dont les extrémités sont fixes et qui glisse sans frottement sur ces deux focales.

La seconde Partie de l'Ouvrage reproduit les mêmes recherches et des conclusions analogues pour un système de paraboloïdes homofocaux.

Nous ne pouvons sans figures entrer dans un exposé plus détaillé; nous espérons en avoir assez dit pour engager le lecteur à prendre connaissance de l'Ouvrage si sérieusement écrit de

M. Staude. Il apporte, on le voit, une généralisation nouvelle des propriétés focales des coniques; mais, par cela seul qu'il présente des résultats dignes d'intérêt après ceux que l'on doit à Chasles, à Jacobi, à Liouville, il montre que, même sur ce sujet, le dernier mot n'est jamais dit. Il peut s'ouvrir d'autres voies encore dans lesquelles le chercheur pourra s'engager avec succès, pour étendre nos connaissances et découvrir d'autres propositions qui pourraient, elles aussi, être considérées comme les analogues des propriétés focales des coniques. C'est là une raison de plus pour étudier le Traité dont nous avons à rendre compte. G. D.

A. REBIÈRE. — Les femmes dans la Science. 2ᵉ édition. 1 vol. in-8°, IX-360 pages. Paris, Nony et Cⁱᵉ, 1897.

D'une petite brochure de 87 pages, qui avait parue il y a un peu plus de deux ans, M. Rebière vient de faire un fort Volume de 360 pages, illustré par de jolies gravures et des fac-simile d'autographes. Au rebours de ce qui arrive souvent en pareille occasion, ce Livre, déjà très intéressant, a encore gagné dans sa nouvelle transformation et a revêtu l'aspect d'un véritable Ouvrage d'Histoire, fortement documenté.

Pour écrire un Volume sur *les femmes dans la Science* il y avait deux méthodes en présence : l'une qui consistait à faire un choix parmi les femmes célèbres pour leurs aptitudes ou leurs travaux scientifiques, à les comparer, à les juger; l'autre, plus modeste, mais plus utile, qui se bornait à recueillir patiemment, sans parti pris, le plus grand nombre de documents possible et à les présenter sous une forme qui facilitât les recherches ultérieures. C'est la seconde que l'auteur a choisie et nous ne saurions trop l'en féliciter, car lorsqu'on se hasarde, en une telle matière, à émettre des jugements ou à faire une sélection, on risque fort de se voir bientôt démenti et, à coup sûr, on ne fait qu'une œuvre incomplète.

Le Livre de M. Rebière est donc une sorte de dictionnaire biographique où, rangées par ordre alphabétique, se trouvent réunies des Notices sur toutes les femmes qui, de près ou de loin, ont

exercé une heureuse influence sur la Science. Les mathématiciennes y tiennent une grande place et la liste est longue, depuis Hypathie d'Alexandrie (4 siècles après J.-C.) qui fut, vraisemblablement, martyre de la Science, jusqu'à Mlle Dorothée Klumpke, la récente doctoresse ès Sciences mathématiques.

Si j'osais me lancer dans une classification, je proposerais de donner la palme à Sophie de Kowalewski, car c'est elle qui, me semble-t-il, a eu les vues les plus profondes et dont les travaux paraissent avoir ce caractère de solidité qui préserve d'un oubli rapide. Sa thèse sur les équations aux dérivées partielles et surtout son Mémoire, couronné par l'Académie des Sciences, sur le problème du mouvement d'un corps solide ayant un point fixe attestent de hautes aptitudes mathématiques. M. Rebière porterait peut-être plutôt ses préférences sur Sophie Germain. Elle fut, certes, une femme très distinguée, mais n'y a-t-il pas quelque exagération à lui accorder le titre de *fondatrice de la Physique mathématique?* La lecture de la Correspondance de Lagrange ne laisse, malheureusement, subsister aucun doute sur la difficulté qu'elle a éprouvée à établir l'équation exacte des surfaces élastiques, équation que plus d'un mathématicien de son époque eût pu établir aisément.

Un fait qui frappe, lorsqu'on parcourt cette nomenclature, c'est le nombre relativement considérable de femmes *astronomes*. Les calculs astronomiques interminables, les observations patientes ont, peut-être, un charme plus particulier pour la nature persévérante de la femme. Voici Caroline Herschel, la sœur du grand Herschel, qui non seulement a été une précieuse auxiliaire de son frère mais qui, à elle seule, a découvert sept comètes; Maria Mitchell qui devint directrice de l'observatoire de Vassar College; la nièce de Lalande, Madame Lepaute; puis, parmi nos contemporaines, Miss Clerke; et bien d'autres que je passe. On voudrait tout citer, mais il faut savoir se borner et je veux encore laisser de nombreuses surprises à ceux à qui cette courte analyse aura donné l'envie de lire le Livre de M. Rebière; et je souhaite qu'ils soient légion. C. Bourlet.

BURKHARDT (H.). — Einführung in die Theorie der analytischer Functionen Veränderlichen. Un vol. in-8°. XII-213 p. Leipzig. Veit et Cie, 1897.

Ce petit Volume semble devoir rendre des services pour l'enseignement : il contient, exposées avec rigueur et clarté, les propositions fondamentales de la théorie des fonctions d'une variable complexe dans le sens de Cauchy et de Riemann. L'auteur est de ceux qui pensent que la théorie des séries entières, si puissante et si essentielle qu'elle soit, ne doit pas faire oublier les voies ouvertes par ces grands géomètres, qu'une intégrale est en soi une chose aussi claire qu'une série, et que les images géométriques ne détruisent pas nécessairement la rigueur des démonstrations. Son Livre est d'ailleurs sage et bien conçu. Il regarde les nombres complexes comme des systèmes de deux nombres réels, avec lesquels il apprend à calculer par des règles déterminées ; c'est, après tout, le point de vue auquel aboutissent toutes les théories, et rien n'empêche de le prendre pour point de départ. Avant de donner la définition générale d'une fonction d'une variable complexe, il a eu l'heureuse idée d'étudier les fonctions rationnelles et de montrer quel intérêt géométrique s'attache à cette étude ; il introduit, à cette occasion, la notion du groupe des transformations linéaires et la notion des fonctions automorphes. Tout cela est fait avec discrétion et de façon à intéresser l'étudiant, même novice. Encore, avant d'entrer dans la théorie générale, il convient que l'étudiant se rappelle clairement les définitions et propositions fondamentales de la théorie des fonctions d'une variable *réelle*. M. Burkhardt les a résumées dans un court Chapitre, en laissant de côté les démonstrations, qui auraient singulièrement grossi son Livre et, peut-être, écarté le lecteur du but qu'il doit se proposer d'atteindre. Signalons dans le résumé la définition suivante : une portion de chemin (*Wegstück*) est définie par deux équations

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

où les fonctions continues $\varphi(t)$, $\psi(t)$ de la variable réelle t ont des dérivées continues $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ telles que dans l'intervalle de

variation de t, le rapport $\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$ n'aille jamais en décroissant ou jamais en croissant. Une telle *portion de chemin,* si elle ne comprend pas une partie rectiligne, ne sera jamais rencontrée par une droite qu'en un ou deux points. Les lignes que considérera l'auteur, celles en particulier qui limiteront les aires qu'il aura à considérer, seront toujours supposées formées d'un nombre limité de ces *portions de chemin*. C'est là une restriction aussi naturelle que commode.

Entrant enfin dans la théorie générale, l'auteur précise les notions de continuité, de dérivée, de fonction régulière en un point; le théorème fondamental sur les intégrales prises entre des limites imaginaires est établi au moyen de l'intégrale double et des intégrales curvilignes; le développement en série entière est déduit du théorème de Cauchy, ainsi que le théorème de Laurent, etc. Signalons, dans ce Chapitre, l'introduction du théorème de M. Mittag-Leffler dans le cas simple où le degré du polynome auxiliaire reste fini.

L'étude de l'argument d'une variable complexe, regardé comme fonction de cette variable, fournit à M. Burkhardt le moyen d'introduire les surfaces de Riemann. C'est l'hélicoïde gauche défini par les équations

$$x = \cos\varphi, \qquad y = \sin\varphi, \qquad z = \varphi,$$

ou plutôt cette surface indéfiniment aplatie qui fournit ainsi le premier type du plan à plusieurs feuillets : l'étude de cette fonction équivaut évidemment à celle du logarithme et permet d'établir immédiatement les propriétés des fonctions telles que $z^{\frac{1}{n}}$, $\sqrt{(z-a)(z-b)}$, ..., ainsi que les formes des surfaces de Riemann correspondantes. De ces exemples simples l'auteur s'élève à la notion du prolongement d'une fonction quelconque, et enfin à la notion de fonction analytique dans le sens de Weierstrass. Il explique en terminant le principe du prolongement par symétrie et l'applique à la représentation conforme, sur le demi-plan, d'un triangle limité par des arcs de cercle. J. T.

SERRET (J.-A.). — Lehrbuch der Differential und Integral-Rechnung, mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von *Axel Harnack*; zweite durschgesehene Auflage von *G. Bohlmann*. Erster Band : Differential Rechnung. 1 vol. in-8°; 570 p. Teubner, 1897.

Nous sommes heureux d'annoncer la seconde édition allemande du *Traité de Calcul différentiel* de J.-A. Serret. La mort a enlevé le traducteur, M. Axel Harnack, qui avait heureusement remanié sur divers points le texte français, dont les qualités sont assez connues. C'est M. G. Bohlmann qui s'est chargé de revoir cette seconde édition, et de faire les changements nécessaires : ces changements ont surtout pour but d'atteindre la rigueur et la précision que l'on est en droit d'exiger aujourd'hui; pour cela, M. Bohlmann a fait passer dans le texte diverses notes d'Axel Harnack; il a remanié le premier Chapitre relatif aux notions de nombre, de limite, de continuité, etc.; il a enfin introduit diverses améliorations de détail. A la fin du Volume, il a donné quelques indications bibliographiques, qui peuvent être utiles aux étudiants qui veulent s'orienter dans leurs lectures; les indications n'ont nullement la prétention d'être complètes : elles s'adressent à des *commençants* et renvoient rarement aux Mémoires originaux. Enfin, une Table des matières, par ordre alphabétique, ajoute à la commodité de l'Ouvrage. J. T.

ARNAUDEAU. — Table de triangulaires de 1 a 100000, suivie d'une Table de réciproques des nombres, à cinq chiffres de 1 à 100000, et d'une Table de sinus et tangentes naturels variant de 30″ en 30″ de 0° à 90° avec texte explicatif. 1 vol. in-8°. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1896.

Soit $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ le *triangulaire* du nombre entier positif n; les formules

$$ab = S_a + S_{b-1} - S_{a-b} = S_{a-1} - S_{a-b-1} - S_b,$$

et d'autres qu'il est inutile de multiplier ici, montrent que, au moyen d'une Table de triangulaires, on peut ramener les multipli-

cations à des additions et soustractions, tout comme au moyen d'une Table de carrés, en vertu de la formule

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Si la Table de triangulaires demande une recherche de plus, elle offre cet avantage d'être moitié moins volumineuse, pour le même service. L'application à la recherche des racines carrées est évidente. La Table des inverses ramène la division à une multiplication. Enfin, la Table des sinus et tangentes naturels permet, avec les précédentes, de résoudre les triangles dans les cas classiques.

J. T.

MÉLANGES.

SUR LA TORSION SPHÉRIQUE DES COURBES GAUCHES ET LA TORSION GÉODÉSIQUE DES LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE;

Par M. DEMARTRES.

I. *Expression de la torsion sphérique.* — Nous appelons *torsion sphérique totale* d'un arc de courbe MM′ l'angle sous lequel se coupent les deux sphères osculatrices Σ, Σ' aux points M, M′. Le rapport de cet angle à la longueur de l'arc est la torsion sphérique moyenne, et la limite de ce rapport, lorsque M′ tend vers M, est la *torsion sphérique* au point M.

Si ρ désigne le rayon de la sphère osculatrice en M; R, T les rayons de courbure et de torsion, la distance des centres de Σ, Σ' est donnée par la formule

(1) $$\delta = \frac{\rho\, d\rho}{\mathrm{T}\, d\mathrm{R}}\, ds.$$

Donc : *si le rayon de la sphère osculatrice est constant, la courbe est une ligne sphérique, ou une ligne à courbure constante.*

D'autre part, l'angle $\Sigma\Sigma'$ a pour expression

$$(2) \qquad (\widehat{\Sigma, \Sigma'}) = \sqrt{\frac{\rho^2 - d\rho^2}{\rho^2}} = \frac{ds}{T}\,\frac{d\,\mathrm{Log}\,\rho}{d\,\mathrm{Log}\,R}.$$

L'angle $\Sigma\Sigma'$ se conserve quand on transforme la courbe donnée par une inversion ; comme d'ailleurs les arcs élémentaires homologues sont évidemment proportionnels à leurs distances au pôle d'inversion O, on en conclut que le produit

$$\frac{\mathrm{OM}}{T}\,\frac{d\,\mathrm{Log}\,\rho}{d\,\mathrm{Log}\,R}$$

a la même valeur sur la courbe donnée et sur sa transformée.

II. *Courbe tracée sur une surface. Torsion sphérique relative.* — Lorsque la courbe appartient à une surface particulière, on peut, en outre de la sphère osculatrice Σ, considérer la sphère *semi-osculatrice* σ ; nous entendons par là la sphère qui touche la surface au point M et qui contient le cercle osculateur de la courbe. Le rapport $\frac{(\widehat{\sigma, \sigma'})}{ds}$ pourra être appelé la *torsion sphérique relative*, $\frac{(\widehat{\Sigma, \Sigma'})}{ds}$ étant alors la torsion sphérique absolue.

Si m, m' sont les centres de courbure normale pour M et M', on a évidemment

$$\mathrm{M}'m' - \mathrm{M}m = mm' \times \varepsilon,$$

ε étant le cosinus de l'angle sous lequel la normale en M rencontre le lieu du point m.

Dire que la normale est développable, c'est dire que, pour les sphères σ, σ', la distance des centres est égale à la différence des rayons ; en d'autres termes :

Une ligne de courbure est une ligne le long de laquelle chaque sphère σ est tangente à la sphère σ' infiniment voisine.

Cette définition met en évidence la conservation des lignes de courbure dans les transformations par inversion. Mais on peut aller plus loin et démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *La torsion sphérique relative d'une ligne quelconque est égale à la torsion géodésique.*

Si l'on désigne, en effet, par $\mathcal{R}$ le rayon de courbure normal, par $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ les rayons de courbure principaux en M, par φ l'inclinaison de la ligne considérée sur la première ligne de courbure, on obtient immédiatement, pour la distance δ des centres de σ et σ',

$$\delta^2 = ds^2\left[\left(1-\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_1}\right)^2\cos^2\varphi+\left(1-\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_2}\right)^2\sin^2\varphi\right]+d\mathcal{R}^2;$$

d'où

$$\frac{\delta^2-d\mathcal{R}^2}{\mathcal{R}^2} = ds^2\left[\left(\frac{1}{\mathcal{R}}-\frac{1}{\mathcal{R}_1}\right)^2\cos^2\varphi+\left(\frac{1}{\mathcal{R}}-\frac{1}{\mathcal{R}_2}\right)^2\sin^2\varphi\right];$$

d'où, en tenant compte de la formule

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{\mathcal{R}_1}\cos^2\varphi+\frac{1}{\mathcal{R}_2}\sin^2\varphi,$$

$$\left(\widehat{\sigma\sigma'}\right)^2 = \frac{\delta^2-d\mathcal{R}^2}{\mathcal{R}^2} = \left(\frac{1}{\mathcal{R}_2}-\frac{1}{\mathcal{R}_1}\right)^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\, ds^2,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Il résulte de là :

1° Que les lignes de courbure se conservent dans l'inversion et que, par suite, l'angle φ, relatif à une ligne quelconque, est un invariant de cette transformation ;

2° Que quand on passe d'une surface à sa transformée, chacun des éléments

$$\mathrm{OM}\left(\frac{1}{\mathcal{R}_2}-\frac{1}{\mathcal{R}_1}\right),\quad \mathrm{OM}\left(\frac{1}{\mathcal{R}_2}-\frac{1}{\mathcal{R}_1}\right)\cos\varphi,\quad \mathrm{OM}\left(\frac{1}{\mathcal{R}_2}-\frac{1}{\mathcal{R}_1}\right)\sin\varphi;$$

conserve sa valeur ; on en conclut tous les théorèmes bien connus sur la transformation d'une surface par rayons vecteurs réciproques. (*Voir* P. Serret, *Méthodes en Géométrie*, p. 23.)

III. *Angle sous lequel la sphère osculatrice d'une courbe coupe la surface.* — Soient k la courbure normale de la ligne, h sa courbure géodésique, q sa torsion géodésique, θ l'angle que fait la normale principale avec la normale à la surface, Θ l'angle sous

lequel la sphère osculatrice coupe la surface, on a évidemment

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{R\sin\theta + T\dfrac{dR}{ds}\cos\theta}{R\cos\theta - T\dfrac{dR}{ds}\sin\theta}, \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{h}{k};$$

d'où

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{Rh + kT\dfrac{dk}{ds}}{Rk - hT\dfrac{dk}{ds}};$$

d'où, en réduisant,

(3) $$\operatorname{tang}\theta = \frac{\dfrac{dk}{ds} + qh}{\dfrac{dh}{ds} + qk}.$$

Nous ajouterons, sans les démontrer, les résultats suivants, qu'on vérifiera sans difficulté. Si l'on pose

(4) $$A = \frac{dk}{ds} + qh, \qquad B = \frac{dh}{ds} - qk,$$

on a

(5) $$\frac{1}{T} = \frac{kB - hA}{h^2 + k^2},$$

(6) $$T\frac{dR}{ds} = R\frac{kA + hB}{hA - kB},$$

(7) $$\rho^2 = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{hA - kB},$$

ρ désignant, comme plus haut, le rayon de la sphère osculatrice. Si enfin on applique la formule (2), on obtient, en tenant compte des relations précédentes,

(8) $$(\widehat{\Sigma\Sigma'}) \pm (\widehat{\sigma, \sigma'}) \pm d\theta = 0,$$

formule remarquable, analogue à la formule connue

$$\frac{ds}{T} + q\,ds = d\theta,$$

et d'où l'on déduirait, de la même manière, les théorèmes de Joachimstal, sur la courbe d'intersection de deux surfaces.

Remarques. — Les angles Θ, φ sont des invariants absolus de la transformation par inversion. L'équation $A = 0$ convient aux lignes dont la sphère osculatrice touche la surface en chaque point. M. Darboux a, le premier, appelé l'attention sur ces lignes et ramené, dans le cas des cyclides, leur détermination aux quadratures. Il y a lieu de chercher les propriétés qu'elles peuvent présenter dans le cas particulier des surfaces cerclées. Je me contenterai ici de faire remarquer que, le long de tout cercle tracé sur une surface, on a simultanément $A = 0$, $B = 0$, la sphère osculatrice étant indéterminée.

Si une courbe est à la fois une ligne de courbure et un cercle géodésique, il résulte immédiatement des formules (3) et (7) que $\Theta = \frac{\pi}{2}$ et que ρ est constant. D'après le premier théorème énoncé dans cette Note, la courbe est alors ou plane ou sphérique. De ce théorème, dû à Ribaucour, on déduit immédiatement (Darboux, *Théorie générale des surfaces*) les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont des cercles géodésiques.

IV. *Sphères principales.* — Les sphères σ relatives aux deux lignes de courbure présentent un intérêt particulier. Nous appellerons ces deux sphères σ_1, σ_2 les *sphères principales* au point M. Les invariants différentiels dont nous avons parlé plus haut s'expriment aisément, au moyen des angles que font les sphères principales, en deux points consécutifs d'une ligne quelconque. Nous nous contenterons d'énoncer les résultats suivants, sans donner le calcul, d'ailleurs très simple, qui y conduit. On a, k_1, k_2 étant les courbures principales, et en distinguant par un accent les éléments relatifs à un point M′, infiniment voisin de M :

$$(9)\quad \begin{cases} ds(k_2 - k_1)\cos\varphi = (\widehat{\sigma_2\sigma'_2}), \\ (k_2 - k_1)\sin\varphi\, ds = (\widehat{\sigma_1\sigma'_1}), \\ (k_2 - k_1)\, ds = \dfrac{(\widehat{\sigma_1\sigma'_1})(\widehat{\sigma_2\sigma'_2})}{(\sigma, \sigma')}; \end{cases}$$

$$(10)\quad \frac{1}{(\widehat{\sigma\sigma'})^2} = \frac{1}{(\widehat{\sigma_1\sigma'_1})^2} + \frac{1}{(\widehat{\sigma_2\sigma'_2})^2}.$$

Ces invariants différentiels sont ainsi exprimés sous forme d'angles de sphères infiniment voisines.

N. B. — Les formules et les propositions qui précèdent sont tellement simples qu'elles sont probablement connues; j'ai cru cependant utile de les réunir dans la présente Note, d'abord parce qu'elles ne sont énoncées explicitement, à ma connaissance, dans aucun Ouvrage didactique; ensuite, parce qu'en raison de leur simplicité même elles paraissent susceptibles d'applications extrêmement variées.

SUR LA COMPARAISON DES MÉTHODES DE CAUCHY ET DE JACOBI ET MAYER POUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE;

Par M. Étienne DELASSUS,
Professeur au Lycée de Douai.

La théorie générale des *multiplicités caractéristiques*, qui est due à Lie, fournit une méthode générale d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Suivant la façon dont on l'applique, on retrouve soit la méthode de Jacobi et Mayer, soit la généralisation directe de la méthode de Cauchy.

Cela tient à ce que le problème de l'intégration est remplacé par un autre *équivalent*, qui est celui de la recherche des multiplicités caractéristiques; tout procédé fournissant ces multiplicités constituera alors une méthode d'intégration.

Considérons un système Σ du premier ordre et désignons par J.M l'ensemble des opérations exigées pour l'intégrer par la méthode de Jacobi et Mayer. Si l'on cherche à lui appliquer la méthode de Cauchy généralisée, on est conduit à intégrer un ensemble σ d'équations différentielles ordinaires, et cette intégration exige des opérations, dont nous désignerons l'ensemble par C. Les opérations C étant plus compliquées que les opérations J.M, on en conclut que la méthode de Jacobi et Mayer est beaucoup plus simple que celle de Cauchy.

Cependant, au moyen des opérations J.M, on a l'équation gé-

nérale des multiplicités caractéristiques et, par conséquent, l'intégrale générale des équations σ. *A priori*, il est donc manifeste que ces équations σ peuvent être intégrées en ne faisant que des opérations J.M. Effectivement, les opérations fournissent une intégrale complète et l'on démontre par le calcul que, connaissant cette intégrale complète, on peut écrire immédiatement l'intégrale générale des équations σ.

A la rigueur, on peut donc considérer la méthode de Jacobi et Mayer comme un moyen commode, mais très détourné, d'appliquer celle de Cauchy.

Cette réduction des opérations nécessaires pour intégrer σ s'explique géométriquement avec la plus grande facilité. Au point de vue analytique, elle ne peut provenir qne de la forme particulière des équations σ et l'on doit pouvoir mettre ce fait en évidence par un calcul direct.

Nous sommes ainsi amenés tout naturellement au problème suivant :

Intégrer les équations σ en profitant de leur forme particulière.

Pour ne pas compliquer inutilement les calculs, nous appliquerons la méthode de Cauchy à une équation isolée

$$(1) \qquad F_1(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0.$$

Les raisonnements s'étendront sans peine aux systèmes d'équations du premier ordre.

La méthode de Cauchy ramène l'intégration de (1) à celle de l'équation linéaire et homogène

$$(2) \qquad [F_1, \Phi] = 0,$$

qui contient $2n+1$ variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ et dont on connaît déjà une intégrale

$$F_1 = \text{const.}$$

On aura une seconde intégrale

$$F_2 = \text{const.}$$

par une opération d'ordre $2n-1$.

Si l'on en cherche une troisième sans s'occuper de sa forme spéciale, on a à faire une opération d'ordre $2n-2$. Mais remarquons que, d'après des propriétés connues, le système

$$(3) \qquad [F_1, \Phi] = 0, \qquad [F_2, \Phi] = 0$$

est complet et qu'on en connaît deux intégrales F_1 et F_2; on aura donc une intégrale de (3) et, par suite, de (2), par une opération d'ordre $2n+1-2-2$, c'est-à-dire $2n-3$.

Soit $F_3 = \text{const.}$, cette intégrale; pour en avoir une nouvelle, nous considérerons le système

$$(4) \qquad [F_1, \Phi] = 0, \qquad [F_2, \Phi] = 0, \qquad [F_3, \Phi] = 0,$$

qui est complet et dont nous connaissons trois intégrales F_1, F_2, F_3. On en aura une nouvelle par une opération d'ordre $2n+1-3-3$, c'est-à-dire $2n-5$; et ainsi de suite. Quand on aura trouvé μ intégrales $F_1, F_2, \ldots, F_\mu$, pour en avoir une nouvelle, il faudra considérer le système

$$(5) \qquad [F_1, \Phi] = 0, \qquad [F_2, \Phi] = 0, \qquad \ldots \qquad [F_\mu, \Phi] = 0,$$

composé de μ équations et dont on connaît déjà μ intégrales, et l'on aura à faire une opération d'ordre $2n+1-\mu-\mu$ ou $2n+1-2\mu$.

En continuant ainsi, on voit qu'on arrivera, par des opérations d'ordres

$$2n-1, \quad 2n-3, \quad \ldots, \quad 5, \quad 3,$$

à avoir n intégrales de l'équation (2), ce qui, si l'on n'avait pas tenu compte de la forme particulière de cette équation, aurait exigé des opérations d'ordres

$$2n-1, \quad 2n-2, \quad \ldots, \quad n-1.$$

En outre, nous remarquons que ces opérations sont précisément celles de la méthode de Jacobi et Mayer. Soient F_1, $F_2, \ldots, F_n$, ces n intégrales et supposons que l'on ait

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(p_1, p_2, \ldots, p_n)} \gtrless 0.$$

Cherchons à achever l'intégration de (1). Nous devons, pour

utiliser les n intégrales connues, faire le changement de variables

$$x_1 = x_1, \quad \ldots, \quad x_n = x_n, \quad z = z, \quad F_1 = \xi_1, \quad \ldots, \quad F_n = \xi_n.$$

Des n dernières équations on tire

$$p_1 = \Psi_1(x_1, \ldots, x_n, z, \xi_1, \ldots, \xi_n), \quad \ldots, \quad p_n = \Psi_n(x_1, \ldots, x_n, z, \xi_1, \ldots, \xi_n),$$

et l'on a les formules de transformation

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\frac{\partial}{\partial p_1} = \sum \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial p_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial}{\partial p_n} = \sum \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial p_n}.$$

L'équation transformée admettra les intégrales

$$\xi_1 = \text{const.}, \quad \xi_2 = \text{const.}, \quad \ldots, \quad \xi_n = \text{const.};$$

de sorte que les $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$ ne devront pas y figurer; elle se réduira à

$$P_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \ldots + P_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + (P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

ce que nous écrirons

$$(6) \qquad P_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \ldots + P_n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0,$$

et dans cette équation, les p ne sont que des abréviations pour représenter les fonctions Ψ et l'intégration doit être faite en considérant les ξ comme des constantes.

Considérons alors le système

$$(7) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

Si l'on en a une intégrale, ce sera aussi une intégrale de (6). On obtient le système (7) en partant du système

$$(8) \qquad \frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n,$$

et y faisant la transformation qui fait disparaître l'inconnue, c'est-à-dire en essayant de déterminer z par une équation implicite

$$\Phi = 0.$$

Mais, de ce que les fonctions F vérifient les relations

$$[F_i, F_k] = 0,$$

résulte, par un théorème de Jacobi, que le système (8) est canonique; il s'intègre par une équation différentielle ordinaire dont l'intégrale générale sera

$$V(x_1, \ldots, x_n, z, \xi_1, \ldots, \xi_n) = a_{n+1},$$

et la fonction V sera une intégrale de (7). Nous remarquons que ce calcul fait encore partie de la méthode de Jacobi et Mayer.

Maintenant, nous allons avoir sans aucune intégration de nouvelles intégrales de (6), ce sont les fonctions

$$\frac{\partial V}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi_3}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi_n}.$$

En effet, différentions par rapport à ξ_2 les équations (7), où Φ a été remplacée par V, nous aurons

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\dfrac{\partial V}{\partial \xi_2} + p_1\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial V}{\partial \xi_2} + \dfrac{\partial V}{\partial z}\dfrac{\partial p_1}{\partial \xi_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n}\dfrac{\partial V}{\partial \xi_2} + p_n\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial V}{\partial \xi_2} + \dfrac{\partial V}{\partial z}\dfrac{\partial p_n}{\partial \xi_2} = 0. \end{array}\right.$$

Multiplions-les respectivement par $P_1, \ldots, P_n$, ajoutons et remarquons que, en vertu de

$$F_1(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = \xi_1,$$

on a

$$P_1\frac{\partial p_1}{\partial \xi_2} + \ldots + P_n\frac{\partial p_n}{\partial \xi_2} = 0.$$

On obtiendra ainsi l'équation (6) dans laquelle Φ aurait été remplacée par $\dfrac{\partial V}{\partial \xi_2}$.

Nous avons actuellement $2n$ intégrales de (6), à savoir :

$$\xi_1, \quad \ldots, \quad \xi_n, \quad V, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi_n};$$

il reste à démontrer qu'elles sont indépendantes.

Pour cela, commençons par remarquer que $p_1, \ldots, p_n$ étant

bien déterminées par les équations

$$F_1 = \xi_1, \quad F_2 = \xi_2, \quad \dots, \quad F_n = \xi_n,$$

il n'existe entre $p_1, p_2, \dots, p_n$ qu'une seule relation indépendante de $\xi_2, \dots, \xi_n$: c'est

$$F_1 = \xi_1.$$

Supposons que p_n, par exemple, figure dans F_1 ; on pourra affirmer qu'entre $p_1, \dots, p_{n-1}$ il n'y a aucune relation indépendante de $\xi_2, \dots, \xi_n$, c'est-à-dire que l'on a

$$\delta = \frac{D(p_1, \dots, p_{n-1})}{D(\xi_2, \dots, \xi_n)} \neq 0.$$

Supposons alors que nos $2n$ intégrales ne soient pas indépendantes, c'est-à-dire qu'il existe entre elles une relation indépendante de $x_1, x_2, \dots, x_n, z$, ou, plus simplement, qu'il existe, entre

$$V, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi_n},$$

une relation indépendante de $x_1, x_2, \dots, x_n, z$; de là résulte

$$\Delta = \frac{D\left(V, \frac{\partial V}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial \xi_n}\right)}{D(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z)} = 0.$$

En vertu des équations (7) et (9) on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} -p_1 \frac{\partial V}{\partial z} & -p_1 \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial \xi_2} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial p_1}{\partial \xi_2} & \dots & -p_1 \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial \xi_n} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial p_1}{\partial \xi_n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ -p_{n-1} \frac{\partial V}{\partial z} & -p_{n-1} \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial \xi_2} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \xi_2} & \dots & -p_{n-1} \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial \xi_n} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial V}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant se décompose en une somme de déterminants, car chaque colonne se décompose en deux colonnes partielles. Il n'y a qu'un seul de ces déterminants qui ne soit pas nul, c'est celui obtenu en combinant la première colonne avec les secondes colonnes partielles de toutes les autres colonnes ; tous les autres sont nuls comme ayant une colonne proportionnelle à la première.

On aura ainsi

$$\Delta = (-1)^{n-1}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^n \delta.$$

Or V est supposé contenir z, de sorte qu'on a

$$\Delta \neq 0,$$

ce qui démontre bien que nos $2n$ intégrales sont indépendantes.

L'intégrale générale du système

$$(5)\quad \frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + p_1 Z} = \ldots = \frac{-dp_n}{X_n + p_n Z}$$

sera donc fournie par les formules

$$F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2, \quad \ldots, \quad F_n = a_n,$$
$$V(x_1, \ldots, x_n, z, a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_{n+1},$$
$$\frac{\partial V}{\partial a_2} = a_{n+2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_n} = a_{2n}.$$

Pour avoir les multiplicités caractéristiques, il faudra faire $a_1 = 0$, et cette hypothèse aurait pu être faite au commencement des calculs sans modifier le résultat.

Les multiplicités caractéristiques seront donc représentées par les équations

$$F_1 = 0, \quad F_2 = a_2, \quad \ldots, \quad F_n = a_n,$$
$$V(x_1, \ldots, x_n, z, a_2, \ldots, a_n) = a_{n+1},$$
$$\frac{\partial V}{\partial a_2} = a_{n+2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_n} = a_{2n}.$$

En outre, d'après la façon même dont a été calculée la fonction V, les valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, calculées au moyen de

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

sont précisément celles obtenues en résolvant les équations

$$F_1 = 0, \quad F_2 = a_2, \quad \ldots, \quad F_n = a_n,$$

de sorte que nous retombons rigoureusement sur la recherche d'une intégrale complète par la méthode de Jacobi et Mayer, et sur les équations générales des caractéristiques au moyen de cette intégrale complète. Donc :

Si, pour appliquer la méthode de Cauchy, on cherche à profiter de la forme particulière des équations σ, on retombe forcément sur la recherche d'une intégrale complète par la méthode de Jacobi et Mayer, et sur la théorie de l'intégrale complète de Lagrange.

Ainsi, au lieu de considérer ces deux méthodes comme deux cas particuliers d'une méthode plus générale, ces deux cas étant distincts en théorie et en pratique, nous devons dire :

La méthode de Jacobi et Mayer n'est que la méthode de Cauchy, convenablement appliquée, c'est-à-dire appliquée en profitant de la forme particulière des équations σ.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Hesse (L.-O.). — *Gesammelte Werke.* Herausgeg. von der mathem.-physikal. Classe der königl. bayer. Akademie d. Wissensch. Gr. in-4°, VIII-732 p. avec portrait. München, Franz. 24 m.

Kirchhoff (G.). — *Vorlesungen über mathematische Physik.* 1. Band : Mechanik. 4ᵉ édit. Herausgeg. von W. Wien. Gr. in-8°, x-464 p. avec 18 fig. Leipzig, Teubner. 13 m.

Poincaré (H.). — *Les Rayons cathodiques et la théorie de Jaumann.* In-4°, 15 p. Paris, Carré et Naud.

Arbeiten (*die astronomisch-geodätischen*) *des k. u. k. militärgeographischen Instituts in Wien.* Publicationen für die internationale Erdmessung. IX. Bd. Gr. in-4°. Wien, Lechner's Hofbuchh. 16 m.

Encyklopädie *der Naturwissenschaften.* 3ᵉ partie, 39ᵉ livraison. Gr. in-8°, avec figures. Breslau, Trewendt. Subscr.-Pr. 3 m.

(Handwörterbuch der Astronomie. Herausgeg. von W. Valentiner. 9ᵉ livraison.)

Jahrbuch *über die Fortschritte der Mathematik.* Herausgeg. von E. Lampe. 25ᵉ Volume, années 1893 et 1894. 3ᵉ et dernier Cahier. Gr. in-8°. Berlin, G. Reimer. 19 m.

KIEPERT (L.). — *Grundriss der Differential- u. Integral-Rechnung*. IIe Partie. Integral-Rechnung. 6. Aufl. des gleichnam. Leitfadens von M. Stegmann. Gr. in-8°. XVIII-599 p. avec 139 fig. Hannover. 11 m. 50 pf.

PAINLEVÉ (P.). — *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*. In-4°, 27 p. Paris, Hermann.

SMITH (R.-H.). — *The Calculus for Engineers and Physicists : Integration and Differentiation, with Applications to Technical Problems*. Gr. in-8°, 188 p. London, Griffin. 8 sh. 6 d.

APPELL (P.) et LACOUR (E.). — *Principes de la théorie des fonctions elliptiques et Applications*. In-8°, IX-421 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 12 fr.

CESÁRO (E.). — *Lezioni di geometria intrinseca*. In-8°. Napoli, Tip. dell' Accademia di Scienze. 8 L.

GUNDELFINGER (F.). — *Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämmtlicher trinomischer Gleichungen mit vierstelligen Additions-, Subtractions- u. Briggischen Logarithmen, sowie einer Interpolationstafel f. alle Differenzen unter Hundert*. Gr. in-4°, IV-15 p. Leipzig, Teubner. 1 m. 40 pf.

MÉRAY (Ch.). — *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques*. 3e Partie : *Questions analytiques classiques*. In-8°, VI-206 p. Paris, Gauthier-Villars et fils. 6 fr.

OSTWALD'S *Klassiker der exacten Wissenschaften*. N° 82. In-8°. Leipzig, Engelmann. Cart. 2 m.

Inhalt : Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, m. Berüksichtig der Arbeiten alter u. neuer Geometer über Porismen, Projectionsmethoden, Geometrie der Lage, Transversalen etc. von *J. Steiner*. 1. Thl. Herausgeg. von *A. J. v. Oettingen*. 126 S. m. 14 fig. u. 2 Tafeln.

N° 83. 8° Ebendas. Cart. 2 m. 40 pf.

Inhalt : Dasselbe. 2. Thl. Herausgeg. von *A. J. v. Oettingen*. 162 S. m. 2 fig. u. 2 Taf.

PETERSEN (J.). — *Théorie des équations algébriques*. In-8°. Kopenhagen, Höst et Sohn. 7 kr. 20 ö.

SCHLESINGER (L.). — *Handbuch der Theorie der linearen Differential-Gleichungen*. (In 2 Bänden.) 2. Bd. 1. Thl. Gr. in-8°, XVIII-532 p. avec fig. Leipzig, Teubner. 18 m.

Serret (J.-A.). — *Lehrbuch der Differential- u. Integral-Rechnung. Deutsch bearb. von A. Harnack.* 2. Aufl. v. G. Bohlmann. 1. Bd. Differentialrechnung. Gr. in-8°, xvi-570 p. avec 85 fig. Leipzig, Teubner. 10 m.

Sonnet (H.). — *Premiers éléments du Calcul infinitésimal.* 5e édit. In-8°, iii-360 p. Paris, Hachette et Cie. 6 fr.

Zeuthen (H.-G.). — *Geschichte der Mathematik im Alterthum u. Mittelalter.* In-8°. Kopenhagen, Höst et Sohn. 5 kr. 50 ö.

Evans (T.-J.) and Pullen (W.-W.-F.). — *Practical Plane and Solid Geometry.* In-8°, 408 p. avec 200 illustr. London, Chapman. 9 sh.

Lampe (E.). — *Karl Weierstrass. Gedächtnissrede.* Gr. in-8°, 24 p. Leipzig, Barth. 60 Pf.

Ludendorff (H.). — *Die Jupiter-Störungen der kleinen Planeten vom Hecuba-Typus.* Dissert. In-4°, 40 p. Berlin, Mayer et Müller. 2 m.

Painlevé (P.). — *Leçons sur la Théorie analytique des équations différentielles.* In-4°, 590 p. Paris, Hermann.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

PETERSEN (J.). — Théorie des équations algébriques. Traduction par *H. Laurent.* 1 vol. in-8°, xv-350 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1897.

Le *Bulletin* (¹) a rendu compte du Livre dont M. H. Laurent vient de publier une traduction française, qui sera sans doute d'autant mieux accueillie qu'elle peut intéresser diverses classes de lecteurs déjà rompus au maniement de l'Algèbre, et naturellement désireux d'apporter à leurs connaissances un complément qui, au point de vue logique, est indispensable. Je me bornerai à rappeler que M. Klein (²) signalait récemment le Traité de M. Petersen comme étant le seul Traité didactique qui contînt une théorie des équations résolubles au moyen d'équations du second degré. Bien que les propositions qu'établit M. Petersen résultent aisément de la théorie de Galois, et notamment de ce que le groupe de Galois d'une équation irréductible, que l'on peut résoudre par l'adjonction successive d'irrationnelles du second degré, donne naissance à une suite de groupes

$$P, \quad P_1, \quad \ldots, \quad P_n,$$

dont le premier est le groupe de Galois lui-même, dont le dernier se compose de la substitution identique, et dont chacun est un diviseur invariant du groupe précédent, et d'indice égal à 2 par rapport à lui; une démonstration élémentaire comme celle de M. Petersen, et qui fournit une réponse aux questions que pose la théorie des constructions géométriques par la règle et le compas, n'en offre pas moins un grand intérêt didactique.

Il est d'ailleurs très superflu, dans un Ouvrage de M. Petersen, de louer l'élégance et la concision des démonstrations. Il a, dans ce genre, donné des modèles qui sont classiques. J. T.

(¹) T. II, 1878, p. 275_1.

(²) *Vorträge über ausgewöhlte Fragen der Elementargeometrie,* traduit par M. Griess; voir *Bulletin,* t. XX, p. 65_1, 283_1; 1896.

GUNDELFINGER (S.). — Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämmtlicher trinomischer Gleichungen. Hinzugefügt sind vierstellige. Additions-, Substractions- und Briggische Logarithmen sowie eine Interpolationstafel für alle Differenzen unter Hundert. 15 p. in-4°. Leipzig, Teubner, 1897.

La méthode de calcul, pour laquelle M. Gundelfinger publie ces Tables, est de même nature que la méthode trigonométrique que l'on doit à Gauss. On la saisira aisément sur un cas particulier.

Considérons l'équation trinome

$$x^{m+n} + e x^m - f = 0,$$

où e et f sont des nombres positifs, m et n des nombres entiers; on en tire

$$1 + e x^{-n} = f x^{-m-n}.$$

Si donc on pose, en désignant par le signe log des logarithmes vulgaires,

$$\begin{aligned} A &= \log e - n \log x, \\ B &= \log f - (m+n)\log x, \end{aligned}$$

A et B seront liés par la relation

$$10^B = 1 + 10^A;$$

les équations précédentes donnent d'ailleurs

$$A - \frac{m+n}{n} B = \log e - \frac{n}{m+n} \log f,$$

$$\log x = \frac{\log e - A}{n} = \frac{\log f - B}{m+n}.$$

Or, quand A augmente de $-\infty$ à $+\infty$, la quantité

$$A - \frac{m+n}{n} B = A - \frac{n}{m+n} \log(1 + 10^A)$$

va en augmentant aussi de $-\infty$ à $+\infty$: elle atteindra donc une fois et une seule fois la quantité $\log e - \frac{n}{m+n} \log f$, que l'on peut calculer; si donc on a une Table qui donne les valeurs de $A - \frac{n}{m+n} B$, on pourra inversement en déduire les valeurs de A

et de B, et par conséquent de x. Les autres cas se traitent d'une manière analogue. Une ingénieuse disposition permet de condenser les Tables dont on a besoin dans un très petit espace; elles permettent d'avoir les racines avec trois ou quatre décimales.

J. T.

Louis COUTURAT. — De l'infini mathématique. Thèse pour le Doctorat ès lettres. In-8°, xxiv-668 pages. Paris, F. Alcan, 1896.

Depuis Leibnitz et Newton, depuis le fécond xviie siècle, la tradition des philosophes-mathématiciens s'était un peu perdue. Philosophes et mathématiciens, se dédaignant quelque peu les uns les autres, se cantonnaient les uns dans une philosophie purement *morale,* les autres dans le seul *Calcul.* Cet état de choses, évidemment fâcheux, paraît vouloir prendre fin, car voici une jeune pléiade de philosophes qui tentent résolument de renouer cette tradition.

A vrai dire, ce sont les mathématiciens qui ont fait les premiers pas, et voici déjà de nombreuses années que plusieurs, et non des moins illustres, se livrent à un profond travail d'épuration des fondements de leur propre science. Helmholtz et Weierstrass, MM. Cantor, Kronecker, H. Poincaré et bien d'autres encore s'y sont employés, et ainsi s'est constituée, presque à l'insu des philosophes proprement dits, une nouvelle Philosophie des Mathématiques.

Un philosophe voulant écrire un Livre traitant d'un sujet mathématique se trouvait donc dans la nécessité, pour pouvoir être compris de ses confrères, de leur enseigner, en quelque sorte, les éléments de la Philosophie mathématique tels qu'ils ont été établis par les mathématiciens eux-mêmes. Et voici pourquoi M. Couturat, écrivant une thèse sur l'*Infini mathématique,* a dû grossir son Ouvrage de nombreux développements qui, certes, n'ont souvent qu'un rapport bien lointain avec l'*infini*. Le but principal et final de son travail était de montrer que, du moins au point de vue philosophique, la conception d'un *infini numérique* était possible d'une façon rationnelle et non contradictoire. Mais, pour en arriver là, il fallait d'abord préciser avec soin ce

que l'on entend par *nombre*, et ainsi se justifie la première Partie, purement mathématique, du Livre de M. Couturat, dans laquelle il expose, avec détails, les théories connues qui font dériver la notion des diverses catégories de nombres de celle du nombre entier. Ces théories sont au nombre de trois : la méthode arithmétique ou symbolique, la méthode algébrique et la méthode géométrique.

La *méthode symbolique,* celle de Weierstrass et de M. Méray, consiste au fond, exception faite pour les nombres irrationnels, en ceci : Étant donné un groupe (g) de nombres, bien défini, on crée un nouveau groupe (G) de nombres de la façon suivante :

1° Tout nombre du groupe (G) est, par définition, l'ensemble de deux ou plusieurs nombres du groupe (g).

2° On *définit* l'égalité, l'addition et la multiplication des nombres du groupe (G) entre eux. Ces définitions sont posées *a priori,* mais on les choisit de telle façon que les propriétés commutatives, associatives et distributives des opérations similaires sur les nombres entiers se conservent.

3° Le groupe (G) doit admettre un sous-groupe (G′) tel qu'à tout nombre de (G′) corresponde un nombre et un seul de (g), et réciproquement; tel, en outre, que, si A, B, C sont trois nombres de (G′) et a, b, c les nombres correspondants dans (g), l'égalité

$$A = B \quad \text{entraîne} \quad a = b,$$
$$AB = C \quad \text{»} \quad ab = c,$$
$$A + B = C \quad \text{»} \quad a + b = c.$$

Dans ces conditions, il sera parfaitement légitime d'introduire la *convention* que tout nombre du sous-groupe (G′) est égal au nombre correspondant de (g), c'est-à-dire d'*identifier* les groupes (G′) et (g). Le groupe (G) est bien ainsi une généralisation du groupe (g) qu'il comprend comme sous-groupe.

Du groupe des nombres entiers on déduit celui des nombres rationnels, puis, de ceux-ci, les nombres qualifiés (positifs et négatifs); des nombres qualifiés on s'élève aux nombres imaginaires et l'on pourrait encore aller plus loin en imaginant des nombres complexes à plusieurs unités fondamentales. Le procédé est uniforme, et il faut féliciter M. Couturat d'avoir bien su le mettre en évidence.

La marche précédente ne s'applique plus aux nombres irrationnels : cela tient à ce que, pour ceux-ci, des considérations sur l'*infini* deviennent nécessaires. Cette exception, loin d'être un défaut, est, au contraire, une qualité de la méthode arithmétique ; car, ainsi, est mis en lumière ce fait capital qu'il n'est pas possible de donner un symbole général pouvant représenter un nombre irrationnel *quelconque* au moyen d'un nombre *limité* de symboles de nombres entiers.

Je me suis étendu assez longuement sur la méthode arithmétique, car c'est la méthode mathématique par excellence, et M. Couturat, qui, cependant, ne lui donne pas la préférence, est bien forcé d'avouer lui-même que c'est la plus logique et la plus rigoureuse.

Le principe de la *méthode algébrique* est celui-ci : créer, au fur et à mesure des besoins, de nouveaux symboles propres à donner à toute équation algébrique entière un nombre de solutions égal à son degré. C'est certes celle qui satisfait le moins l'esprit, et cependant, du moins pour les nombres négatifs et imaginaires, c'est celle qui est la plus employée dans l'enseignement. Chaque fois qu'on crée un nouveau groupe de nombres, on fait à peu près le raisonnement que voici : « Cette équation n'a pas de solution ; *par définition*, nous dirons qu'elle en a une. » Je ne connais rien qui fausse l'esprit des élèves comme cette manière de donner, *par définition*, une existence à des nombres dont on vient précisément de constater la non-existence. D'ailleurs, cette méthode est incomplète, car les nombres transcendants comme π et e lui échappent. Le savant géomètre Kronecker, en suivant une voie ouverte par Cauchy pour les nombres imaginaires, est parvenu à donner à cette théorie une forme logique et rigoureuse en substituant aux égalités des congruences relatives à des modules convenablement choisis. Mais, si l'on veut rester rigoureux et fidèle à l'idée de M. Kronecker, il faut bien se garder, comme l'a fait M. Couturat, de passer des congruences aux égalités en annulant le module. Ainsi, M. Kronecker définit $\sqrt[3]{2}$ par la congruence

$$x^3 - 2 \equiv \left(x - \frac{1}{18}z^4\right)\left(x + \frac{1}{2}z + \frac{1}{36}z^4\right)\left(x - \frac{1}{2}z + \frac{1}{36}z^4\right).$$

$$(\text{mod. } z^6 + 108),$$

bien entendu, sans assigner à z une valeur annulant $z^6 + 108$.

La *méthode géométrique* définit tous les nombres comme mesures de grandeurs géométriques. C'est évidemment, en ce qui concerne les nombres réels, celle qui demande le moins d'efforts pour être comprise; mais, lorsqu'il s'agit de nombres imaginaires, elle devient plus artificielle que toutes les précédentes. Pour bien la faire comprendre, M. Couturat ne s'est-il pas vu poussé à faire de la *trigonométrie!* Au point de vue pédagogique, elle est défendable pour les nombres réels; mais au point de vue spéculatif pur elle ne l'est guère, car c'est, par essence, une méthode expérimentale.

M. Couturat, pour faire œuvre de philosophe, ne s'est pas contenté de faire une exposition très claire et très nette de ces diverses théories : il a essayé de les critiquer et de les comparer. Pour lui, « la tâche de toute Critique et de toute Philosophie consiste à choisir, entre plusieurs enchaînements de concepts *également logiques,* le plus *rationnel,* c'est-à-dire celui qui met le plus d'unité, de lumière et d'harmonie dans nos idées en les rattachant à quelques idées primordiales simples ». On pourrait évidemment ergoter sur cette expression *également logiques* et se demander jusqu'à quel point M. Couturat a raison de considérer ces trois méthodes comme telles. Je ne suis pas assez fin discoureur pour engager une discussion à ce sujet, mais ce point mérite qu'on s'yarrête : car, si l'on n'admet pas cette sorte d'axiome que l'auteur nous impose, les raisons qu'il fait prévaloir pour donner la palme à la méthode géométrique sont singulièrement ébranlées. Pour l'analyste, la méthode la meilleure est celle qui se dégage absolument de l'expérience, qui, sous une forme abstraite et formelle, crée tous les nombres, à partir du nombre entier, par un enchaînement logique et serré. Si une telle théorie n'existait pas, il faudrait la fonder, car elle est absolument nécessaire au mathématicien pour lui donner une assurance complète en la solidité de la base sur laquelle il échafaude toutes ses conceptions. On conçoit, cependant, qu'aux yeux d'un philosophe qui étudie la Science mathématique dans ses rapports avec les autres sciences, la méthode géométrique paraisse la plus rationnelle, puisque du même coup elle définit le nombre et l'applique à la mesure des grandeurs concrètes. — Il y a des questions sur lesquelles un

analyste et un philosophe ne s'entendront jamais : celle-ci en est un exemple. Faut-il en conclure qu'ils doivent cesser tout commerce? Certes, non, car l'un et l'autre ne peuvent que gagner à ces joutes pacifiques et idéologiques.

La seconde Partie de la thèse de M. Couturat est surtout philosophique. Je n'en dirai que quelques mots. L'auteur y revient sur la notion du nombre entier, surtout pour discuter la théorie formaliste de von Helmholtz. On sait que l'illustre savant a imaginé une théorie toute symbolique du nombre entier dans laquelle il substitue l'idée de rang à celle de dénombrement. Les nombres (nombres *ordinaux*) ainsi créés n'ont qu'une existence toute formelle. Pour utiliser ces symboles au dénombrement d'un ensemble d'objets, on imagine qu'on applique successivement ces symboles aux objets en les prenant dans leur ordre naturel, et toute la difficulté consiste à montrer que, dans cette application ou correspondance univoque, le dernier symbole employé (nombre *cardinal*) est indépendant de l'ordre dans lequel on prend les objets. M. Couturat fait de subtiles objections à la démonstration de M. Kronecker; mais toutes ces subtilités s'évanouiraient, me semble-t-il, si l'on voulait admettre *a priori* (et, dès qu'on passe au concret, il faut bien admettre quelque chose) que tous les objets peuvent être considérés comme des unités indistinctes, car alors leur ensemble ne changerait pas lorsqu'on les permuterait entre eux.

A ces considérations succède l'étude bien connue des conditions auxquelles doit satisfaire une grandeur mesurable; et, enfin, le Volume se termine par une longue discussion dialoguée où l'auteur essaye d'établir, en s'inspirant des idées de M. Cantor, la légitimité d'une conception de *nombres infinis*.

Cet Ouvrage, on le voit, quoique plus spécialement destiné à des lecteurs philosophes, pourra intéresser bon nombre de mathématiciens que les questions de principes ne laissent pas indifférents. M. Couturat nous y a prouvé qu'il connaissait les Mathématiques et qu'il avait réfléchi profondément sur les fondements de notre Science : c'est un bel exemple à suivre et à signaler.

C. Bourlet.

GOETTLER (J.). — Conforme Abbildung eines von concentrischen, gleichseitigen Hyperbeln oder gewissen Kurven n^{ter} Ordnung begrenzten Flächenstückes auf den Einheitskreis. Gekrönte Preisschrift der Hohen philosophischen Fakultät (II. Section) der Königl. Ludwig-Maximilians-Universität München. Derselben als Inaugural-Dissertation. 75 p. in-8°, Munich, Straub, 1897.

Le problème que traite M. Goettler dans la première Partie de sa Dissertation inaugurale consiste à déterminer la fonction qui permet la représentation conforme sur la partie supérieure du plan d'une portion de plan limitée par des hyperboles équilatères ayant leur centre au point o. La méthode qu'il suit repose essentiellement sur le théorème fondamental de M. Schwarz. Il débute par quelques généralités sur la représentation conforme d'aires limitées par des courbes définies par des équations telles que

$$\alpha\varphi(z) + \alpha_1\varphi_1(z_1) - \beta = 0,$$
$$\varphi(z)\varphi_1(z_1) + \alpha\varphi(z) + \alpha_1\varphi_1(z_1) + \beta = 0,$$
$$2\varphi(z)\varphi_1(z_1)(a^2 + b^2 - 2\lambda) + [\varphi^2(z) + \varphi^2(z_1)](b^2 - a^2) - b(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) = 0.$$

Dans ces diverses équations $\varphi(z)$, $\varphi_1(z_1)$ sont des fonctions conjuguées des variables conjuguées z, z_1; dans les deux premières, α, α_1 sont des constantes conjuguées qui varient, ainsi que la constante β, d'une courbe à une autre; dans la dernière équation, c'est le paramètre λ qui varie d'une courbe à l'autre.

Dans le premier cas, par exemple, la représentation conforme sur le demi-plan est obtenue au moyen d'une fonction définie par l'équation

$$\frac{d}{dZ}\left\{\log\left[\varphi'(z)\frac{dz}{dZ}\right]\right\} = \sum_{\mu=1}^{\mu=m}\frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} + R(Z) + c.$$

où c est une constante, $R(Z)$ une fonction rationnelle convenablement choisie de Z, qui doit rester réelle quand Z est réel; les A_μ sont les images des sommets du polygone, auxquels correspondent les angles $\alpha_\mu\pi$. En prenant $\varphi(z) = z^2$, on se trouve dans le cas qui est l'objet principal de l'Auteur, celui où les courbes qui limitent l'aire à représenter sont des arcs d'hyperboles équilatères, ayant leur centre au point o.

Pour achever la solution, il est nécessaire de distinguer plusieurs cas, suivant que le polygone curviligne admet ou non des sommets au point o ou à l'infini, qu'il admet des angles nuls ou égaux à 2π, qu'on en veut représenter l'intérieur ou l'extérieur; par exemple, dans le cas où le polygone est fermé, qu'il contient le point o à l'intérieur et qu'on veut en représenter l'intérieur, on doit avoir, en désignant par m le nombre de ses sommets,

$$\sum_{\mu=m}^{\mu=1} \alpha_\mu = m - 4.$$

et la représentation sur le demi-plan des Z est définie par l'équation suivante, où C, C' désignent des constantes,

$$z^2 = C\int_0^Z \prod_{\mu=m}^{\mu=1} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1}(Z - \Gamma)(Z - \Gamma_1)\,dZ + C';$$

$\Gamma = A + Bi$ est l'image du point o; Γ_1 est la quantité conjuguée. Les différents cas énumérés sont développés avec détail par l'auteur. Le cas particulier où le polygone est symétrique par rapport au point o offre un intérêt particulier; on obtient alors des formules simples pour la représentation sur le cercle de rayon un, formules qui, dans des cas plus particuliers, s'expriment au moyen des fonctions elliptiques; par exemple, la formule

$$\zeta^2 = \mathrm{sn}(Z^2, i)$$

permet de représenter, dans le plan des ζ à l'intérieur du cercle de rayon 1, l'octogone régulier à côtés hyperboliques dont les sommets sont $\pm\sqrt{K}$, $\pm\sqrt{-K}$, $\pm\sqrt{Ki}$, $\pm\sqrt{-Ki}$, où l'on suppose

$$K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} = 1,3110\ldots.$$

Dans la seconde Partie de son Travail, M. Gœttler considère, au lieu des hyperboles équilatères ordinaires, des courbes qu'il appelle *hyperboles régulières* du $n^{\text{ième}}$ ordre, et qui sont définies, dans le même système de notations, par l'équation

$$\alpha z^n + \alpha_1 z_1^n + \beta = 0,$$

des *paraboles* du $n^{\text{ième}}$ ordre ayant le point o pour foyer, définies par l'équation

$$\alpha z^{\frac{1}{n}} + \alpha_1 z_1^{\frac{1}{n}} + \beta = 0,$$

des *lemnicates régulières* du $2n^{\text{ième}}$ ordre, définies par l'équation

$$z^n z^n + \alpha z^n + \alpha_1 z_1^n + \beta = 0,$$

etc. J. T.

MÉLANGES.

GAUSS, LES DEUX BOLYAI ET LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE;

Par MM. Paul STÄCKEL et Friedrich ENGEL.

Traduit par L. LAUGEL.

Math. Annalen, t. XLIX, Cahier 2, p. 149 à 167; 1897.

1. Lorsque dans la cinquième Section de notre Ouvrage : *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie* (Leipzig, 1895) [1], nous avons réuni toutes les remarques de Gauss sur les « premiers principes de la Géométrie » qui nous étaient accessibles, nous déclarâmes que cette Section se trouvait tout à fait incomplète (p. v et 216) [2] et que les matériaux dont nous disposions ne suffisaient pas pour distinguer les rapports entre les recherches des deux Bolyai et celles de Gauss (p. 242).

Les circonstances aujourd'hui sont plus favorables et nous le

(1) *Comparer* le compte rendu de ce Livre, par M. Hadamard, dans le *Bulletin*, p. 279, série II, t. XX, novembre 1896. (L. L.).

(2) Ici et dans la suite les numéros de pages, données sans autre indication, ont trait à notre Livre, déjà cité, sur la Théorie des parallèles.

devons surtout à la persévérance et aux sacrifices de M. Franz Schmidt, architecte à Budapest, qui depuis trente ans a travaillé sans répit à éclaircir et à exposer la part des deux Bolyai dans l'historique de la Géométrie non euclidienne. La Société Royale des Sciences de Göttingue, en décembre 1896, a mis à sa disposition; d'une manière dont on ne saurait trop la remercier, une copie de la Correspondance de Gauss et Wolfgang Bolyai, et, d'accord avec M. Schmidt, l'un de nous a fait paraître un extrait mathématique de ces Lettres dans les *Göttinger Nachrichten* (¹). Nous reproduisons ici ces lettres en y ajoutant *la théorie de Göttingue relative aux parallèles* de Wolfgang Bolyai, qui était jointe à sa Lettre du 16 septembre 1804 et dont le défaut de temps avait empêché la publication dans les *Göttinger Nachrichten*. Pour en faciliter la lecture, à côté du texte latin, nous avons juxtaposé une traduction allemande de cet important Mémoire de W. Bolyai (²).

Mais nous devons encore plus à M. Schmidt. En collaboration avec son fils, M. le professeur Martin Schmidt de Presbourg, il s'est remis à l'étude des papiers laissés par les deux Bolyai et a bien voulu nous faire une série de Communications sur leurs découvertes; nous en avons déjà employé une partie dans notre *Théorie des lignes parallèles*. Il nous a notamment donné accès à quelques écrits jusqu'ici inconnus, en langue magyare, relatifs aux deux Bolyai, qui forment un supplément plein de valeur, nous dirons plus, indispensable, aux Lettres de Gauss et de Wolfgang Bolyai.

(¹) *Mittheilungen aus dem Briefwechsel von Gauss und W. Bolyai*, von Paul Stäckel. (*Göttinger Nachrichten. — Mathematisch-physikalische Classe*, Jahrgang 1897, Heft 1).

(²) *Voir* p. 168-205 des *Math. Annalen*, t. XLIX (1897), Cahier 2. — Il n'a pas semblé nécessaire de traduire en français ce travail publié en latin et traduit en allemand et annoté par MM. Stäckel et Engel. L'intérêt en est surtout documentaire, comme M. Engel a eu la bonté de me le faire remarquer, en ce sens que l'on y voit clairement que les idées de W. Bolyai n'ont eu aucune influence sur celles de Gauss. D'autre part ce travail ne peut, à aucun titre, être rangé parmi ceux des *précurseurs* tels que Saccheri, Lambert, etc., car W. Bolyai, en cherchant uniquement à établir ce « que l'on ne pourra jamais établir *a priori* » (Johann Bolyai, au titre de l'Appendice), fait encore partie des naufragés, qui ont échoué sur le groupe d'écueils dont parle Gauss dans sa réponse à la Lettre d'envoi du Mémoire. (L. L.).

2. Dans des Lettres à Taurinus (8 novembre 1824, p. 249), à Bessel (27 janvier 1829, p. 226) et à Schumacher (17 mai 1831, p. 230 et 28 novembre 1846, p. 225), Gauss dit qu'il s'était occupé depuis déjà très longtemps de la théorie des parallèles, et la réunion de ses diverses indications permet de fixer comme point de départ de ses « méditations » l'année 1792. Il est vrai que la Lettre à Bolyai, du 6 mars 1832, assigne une date plus moderne, 1797 au plus tôt, mais la Lettre à Bolyai du 16 décembre 1799 montre que les travaux de Gauss sur les *Premiers principes de la Géométrie* étaient déjà bien avancés, et son affirmation, que « la voie... ne conduit pas au but que l'on cherche *et que tu affirmes avoir atteint* (¹), mais conduit plutôt à mettre en doute l'exactitude de la Géométrie », jointe à la remarque suivante : « Il serait bien, en effet, possible, quelque éloignés entre eux que l'on choisisse les trois sommets du triangle dans l'espace, que néanmoins son aire fût toujours inférieure (*infra*) à une limite donnée », ne peut guère s'expliquer autrement qu'en supposant que Gauss, en 1799, avait déjà poursuivi dans ses conséquences l'hypothèse de la non-exactitude du cinquième postulat d'Euclide, comme l'avaient déjà fait avant lui Saccheri (1733) et Lambert (1766).

Comparée à la Lettre du 16 décembre 1799, celle du 25 novembre 1804 montre un certain pas en arrière. Gauss y parle d'écueils contre lesquels ont échoué ses méthodes de recherche, et il continue en disant : « J'ai cependant toujours l'espoir que ces écueils finiront, avant la fin de ma vie, par me livrer enfin passage...; crois-moi, cela me réjouirait du fond du cœur si tu me devançais et si tu réussissais à surmonter tous les obstacles. »

Nous pouvons en conclure que ce n'est donc pas par une intuition de génie que Gauss est arrivé à reconnaître que la Géométrie non euclidienne est logiquement inattaquable, mais qu'il a dû, au contraire, livrer un rude combat contre l'antique préjugé; cela coïncide avec ce qu'il dit en 1824 dans sa Lettre à Taurinus, où il

(¹) Ces mots en italiques manquent dans la reproduction de cette Lettre donnée par M. le conseiller privé Schering à l'occasion des fêtes du Centenaire de Gauss, en 1877. Ces mots nous semblent avoir une importance essentielle pour distinguer les rapports entre les recherches de Gauss et celles de W. Bolyai.

parle de ses vains efforts « pour découvrir une contradiction, une inconséquence dans cette Géométrie non euclidienne ».

Il est vrai que nous n'avons pas de données plus exactes sur le développement des idées de Gauss, car nous rencontrons ici une grande lacune dans la correspondance entre lui et W. Bolyai ; nous n'avons ensuite que quelques lettres dont le contenu est purement amical ; mais, de 1808 à 1832, Gauss n'a rien écrit à l'ami de sa jeunesse, et nous n'avons qu'une Lettre de Bolyai à Gauss relative à des choses personnelles et qui resta sans réponse. Nous sommes ainsi, pour ce laps de temps, réduits à d'autres sources qui sont peu abondantes ; en effet, Gauss, persuadé que « le nombre des vrais géomètres est extrêmement restreint, et que la plupart des gens ne sont capables ni de porter un jugement sur les difficultés de pareils travaux ni même de les comprendre », craignait « les clameurs des béotiens », et était extrêmement réservé relativement à ses recherches sur la Géométrie non euclidienne. Ainsi s'explique que dans ses Analyses (¹) de 1816 et 1822 (p. 220 et 223), il laisse seulement entrevoir sa véritable pensée, et qu'il n'octroie un coup d'œil sur ses découvertes qu'à des amis éprouvés, comme Gerling (1819, p. 246), Bessel (27 janvier 1829, p. 226) et Schumacher (12 juillet 1831, p. 232). Ce n'est qu'en apparence que la Lettre à Taurinus (8 novembre 1824, p. 249) semble faire une exception ; en effet, Gauss enjoint expressément à celui-ci de garder le silence sur ses communications.

Il est malheureusement impossible de se faire, à l'aide de ce petit nombre d'indications, une idée de la voie qu'a suivie Gauss dans les recherches qui le conduisirent à « développer d'une manière parfaitement satisfaisante » la Géométrie non euclidienne, de manière « à pouvoir résoudre tout problème de celle-ci » dès 1819. Le fait que la correspondance actuelle entre Gauss et W. Bolyai nous permet d'arriver à une certaine conclusion sur ce sujet n'en est que plus important.

Le 6 mars 1832, en effet, Gauss écrit de nouveau à son *inoubliable ami*, qui lui avait envoyé l'*Opuscule* de son fils Johann Bolyai, c'est-à-dire l'*Appendix* : « Le contenu tout entier de

---

(¹) *Göttingische Gelehrte Anzeigen.* (L. L.).

l'Ouvrage, la voie qu'a frayée ton fils, les résultats auxquels il a été conduit, coïncident presque entièrement avec les propres méditations qui ont occupé mon esprit en partie depuis déjà trente à trente-cinq ans. Aussi ai-je été complètement stupéfait. »

Peu de temps auparavant, le 17 mai 1831, Gauss écrivait à Schumacher : « Depuis quelques semaines, j'ai commencé à mettre par écrit quelques résultats de mes propres méditations sur ce sujet, qui remontent en partie à quarante ans, et dont je n'avais jamais rien rédigé.... Je ne voudrais pourtant pas que tout cela pérît avec moi. » L'on comparera à cela ce qu'il écrit dans la Lettre précitée à Wolfgang Bolyai : « Quant à mon travail personnel, dont d'ailleurs j'ai confié peu de chose jusqu'ici au papier, mon intention était de n'en rien publier de mon vivant.... C'était au contraire mon idée de mettre avec le temps tout ceci par écrit, afin qu'au moins cela ne périsse pas avec moi. Aussi est-ce pour moi une agréable surprise de voir que cette peine peut maintenant m'être épargnée. »

D'après ce qui précède, il y a lieu de craindre que Gauss n'ait pas poursuivi la rédaction de ses méditations, et il ne sera peut-être jamais possible de résoudre la question de savoir si Gauss a relié la Géométrie non euclidienne à ses *Disquisitiones circa superficies curvas* et s'il connaissait déjà ce fait que sa Géométrie non euclidienne est valable pour les triangles géodésiques sur les surfaces à courbure constante négative, et si, par conséquent, en 1854, il s'est rencontré avec Riemann, comme il l'avait fait en 1832 avec Johann Bolyai.

3. Wolfgang Bolyai (1), né le 5 février 1775, après de longues hésitations sur le choix d'une carrière, se rendit en 1796 à Iéna, où étudiait alors son ami et patron le baron Simon Kemény. « C'est alors, en me promenant sur les rives de la Saale, que j'en-

---

(1) Comme source pour ce qui suit, nous avons fait usage d'une biographie de Wolfgang Bolyai par Joseph Koncz, parue en 1887 dans le *Programme du Collège évangélique réformé de Maros Vásárhely*, traduite en allemand par M. le Prof. Martin Schmidt; ce programme, joint à quelques autres, a été réuni à une *Histoire du Collège*, et s'y trouve imprimé p. 271-388. Dans cette biographie sont reproduites quelques indications, que donna W. Bolyai lui-même en 1840 sur sa vie, et qu'il envoya à la Société des Savants hongrois de Budapest.

trai, avec mes connaissances restreintes et en désordre, dans cette voie où je me trouve encore dans ma vieillesse.... Nous nous rendîmes à Göttingue [vers l'automne de 1796], où nous pûmes être reçus par Kæstner et Lichtenberg, et j'y fis alors la connaissance de Gauss qui y étudiait [depuis l'automne de 1795], et dont je suis encore aujourd'hui l'ami, mais combien loin de pouvoir me comparer à lui. Il était très modeste et très réservé; ce n'est pas trois jours, comme avec Platon, mais pendant des années, qu'on eût pu vivre avec lui sans reconnaître combien il était grand. Quel malheur pour moi de n'avoir pas su ouvrir et lire ce livre sans titre et muet, je n'avais pas idée de l'étendue de son savoir, et lui, en voyant mes goûts, m'estima beaucoup sans savoir combien j'étais peu de chose. Ce qui nous unit fut notre passion commune (qui ne se révélait pas extérieurement) pour les Mathématiques et notre conformité morale, de sorte que souvent, occupés chacun de nos propres pensées, nous nous promenions ensemble pendant des heures sans dire un mot. »

Ces communications de W. Bolyai même sont complétées par des paroles que Gauss doit avoir dites, comme le raconte Sartorius von Waltershausen, dans le cours des années précédentes. « Bolyai est le seul qui ait jamais su entrer dans mes idées métaphysiques relatives aux Mathématiques » ([1]).

Avant le départ de Bolyai, le 9 juin 1799, pour retourner dans son pays, il se trouva une dernière fois avec Gauss à Clausthal dans le Harz, le 24 mai 1799; Gauss avait déjà quitté Göttingue vers l'automne de 1798 et était retourné à Brunswick. Il est probable que les deux amis se sont, en cette occasion, entretenus sur la question des parallèles; en effet, après que Bolyai, le 11 septembre 1799, lui eut annoncé de Budapest son retour dans ses foyers, Gauss lui écrit, le 9 décembre 1799 : « Je regrette bien de n'avoir pas profité de notre voisinage rapproché d'autrefois pour connaître davantage tes travaux sur les premiers principes de la Géométrie.... Fais-nous donc bientôt connaître ton travail. » Ce travail où Bolyai, comme il l'avait annoncé à Gauss, dit qu'il est

---

([1]) Sartorius von Waltershausen, *Gauss zum Gedächtniss*. Leipzig, p. 17; 1856.

parvenu à démontrer le cinquième postulat d'Euclide, est bien celui cité dans la Lettre du 16 septembre 1804 et envoyé à cette date à Gauss sous le nom de *Théorie de Göttingue relative aux parallèles,* et dont nous devons ainsi fixer l'origine entre l'automne de 1798 et le mois de juin 1799.

A Göttingue même, Bolyai n'a pas dû manquer d'incitations à s'occuper de la théorie des parallèles. Abstraction faite de cette circonstance que, vers la fin du dix-huitième siècle, cette question excitait un grand intérêt dans un cercle très étendu (p. 211-213), l'on sait que Kæstner s'est occupé sérieusement de l'axiome XI d'Euclide, y a fait allusion dans ses Cours, et que ce fut en 1763 qu'il provoqua la Dissertation de Klügel (p. 140). Mais ce qui est encore plus significatif, c'est que Bolyai avait des relations d'amitié avec un homme très au courant des recherches sur la théorie des parallèles, le professeur d'Astronomie Seyffer, dont nous avons parlé en détail dans notre Livre (p. 214-215). Cela est démontré, non seulement par les nombreux souvenirs et demandes d'informations, relatifs à Seyffer, que l'on rencontre dans les Lettres de Bolyai à Gauss, mais encore par ce qu'il écrit dans son autobiographie : « Je fis [le 9 juin 1799] le chemin à pied. Le professeur d'Astronomie (qui [plus tard] se trouva avec Napoléon à Austerlitz, où il était un de ses colonels du Génie (*Ingenieur-Oberts*)) et d'autres encore m'accompagnèrent à pied jusqu'au premier village » (¹).

Wolfgang Bolyai devint, à partir d'avril 1804, professeur de Mathématiques, de Physique et de Chimie au Collège év. réf. de Maros-Vásárhely. Les espérances qu'il fondait sur son travail ne furent pas réalisées, et plus tard, malgré tous ses efforts, le but qu'il recherchait ne put être atteint. Il écrit à ce propos dans son autobiographie : « Comme je n'étais pas satisfait de mes tentatives pour démontrer l'axiome des parallèles, et qu'après les avoir, pendant bien longtemps, poursuivies jusqu'aux limites du possible,

(¹) K.-F. Seyffer (1762-1822) quitta en 1805 Göttingue, où il était professeur extraordinaire d'Astronomie. De 1805 à 1806, il occupa le poste d'officier du Génie-topographe au quartier général de Napoléon. Plus tard, il devint directeur du Bureau de Topographie et de Statistique à Munich. Comparer *Allgemeine deutsche Biographie*, t. XXXIV, p. 107.

j'en perdais le repos, mon feu pour les Mathématiques s'éteignit et je me tournai vers la poésie. » Il se plaint à son fils Johann en disant : « Si jadis j'eus pu arriver à un résultat dans la question de l'axiome XI, je ne me serais occupé ni de la construction des poêles (*sic*) ni de l'art poétique, et j'eus été un homme et un père de famille meilleur. »

W. Bolyai a exposé ses aperçus sur les principes de la Géométrie dans l'Ouvrage : *Tentamen juventutem studiosam in elementa Matheseos... introducendi* (¹) dont le premier Volume parut en 1832, le second en 1833. Dans le *Generalis conspectus Geometriæ* (t. I, p. 442-502), il rend compte, à partir de la page 490, de ses premiers essais de démonstration du cinquième postulat d'Euclide, et indique en chaque cas quel axiome nouveau il est nécessaire d'admettre, pour que l'essai de démonstration devienne une véritable démonstration. Il parle en le plus de détails d'une tentative de démonstration qui a les plus grands rapports avec celle qu'il communique, en 1804, dans le *Supplementum ad Theoriam parallelarum*.

4. Johann, fils de Wolfgang Bolyai, né le 15 décembre 1802, à Klausenburg, était, comme l'écrit son père à Gauss, le 20 juin 1831, doué d'aptitudes étonnantes pour les Mathématiques. « Son père tint à conserver lui-même la direction de ses études mathématiques; » raconte Koloman Szily (²). « Ses progrès en Mathématiques étaient rapides comme l'éclair, et tels, comme se plaisait à le raconter son père, qu'il n'attendait pas la démonstration des théorèmes et la donnait lui-même le premier. Il faisait un bond vers moi comme un diable (*sic*), disait son père, et me priait d'aller plus vite en avant. »

Quant au cours de ses recherches sur la théorie des parallèles, Johann Bolyai en donna lui-même un exposé dans une autobio-

---

(¹) Une nouvelle et magnifique édition a été donnée sous les auspices de l'Académie Royale des Sciences de Budapest, par M. M.-J. König et M. Rhéty. Le premier Volume, qui vient de paraître (orné d'un portrait de W. Bolyai), ne renferme que la partie arithmétique du premier Volume de l'édition originale.

(²) *Értekezések a mathematikai tudományok köréből*. [*Abhandlungen aus den Gebieten der mathematischen Wissenschaften*]. Bd. XI, Heft 9. Budapest (1884).

graphie, dont M. Franz Schmidt place la date de composition entre 1840 et 1851.

« Il [mon père] me fit remarquer les grandes lacunes et l'insuffisance de la théorie des parallèles; il me fit voir que, bien que procédant beaucoup mieux que ses prédécesseurs, il n'avait cependant encore rien trouvé de satisfaisant ni de convenable, en ce sens qu'aucun de ses nouveaux axiomes, dont chacun d'ailleurs suffisait pour démontrer rigoureusement l'axiome XI, ne possédait le degré nécessaire d'évidence géométrique, quelque admissible et justifiable qu'il semblât au premier coup d'œil. Il affirmait, sans démonstration néanmoins, qu'il est impossible de démontrer l'axiome XI; et en craignant, non sans raison, que je pourrais y passer toute ma vie vainement et infructueusement, il s'efforça de toutes les manières possibles de me détourner de la continuation de mes recherches et de m'en inspirer l'horreur. »

« Comme je lui avais écrit, de l'Académie royale et impériale du Génie de Vienne, que je venais d'entrer dans une voie pouvant mener à la démonstration de l'axiome XI d'Euclide, en prouvant qu'une ligne parallèle à une ligne droite, c'est-à-dire une ligne équidistante d'une ligne droite, dans toute l'étendue du plan, est également une ligne droite, et que j'avais commencé, dans ce but, par le développement des propriétés d'une telle ligne au cas où cette affirmation serait fausse (1), il me répondit comme il suit, dans une remarquable Lettre [la Lettre manque]....................

« C'est en 1823 qu'il [Johann] pénétra la vraie nature de son problème, quoique ensuite il ait ajouté des conditions relatives aux matériaux et à la forme. »

Cette affirmation est prouvée et complétée par une Lettre écrite de Temesvár, le 3 novembre 1823, à son père, par Johann Bolyai. Dans cette Lettre, écrite en langue magyare et retrouvée dans les papiers de Wolfgang Bolyai, par M. le Professeur Martin Schmidt, qui nous en a obligeamment communiqué une traduction, nous lisons :

(1) Donc Johann Bolyai a suivi dans ses recherches géométriques la voie qui avait été déjà inaugurée avec succès par Saccheri (1733) et Lambert (1766).

« Je suis tout à fait décidé à publier un Ouvrage sur la théorie des parallèles, dès que j'aurai mis les matériaux en ordre et que les circonstances le permettront. Je ne l'ai *pas encore* fait, mais la voie que j'ai suivie a certainement, pour ainsi dire, presque atteint le but; le but même n'est pas atteint, mais j'ai découvert des choses si belles que j'en ai été ébloui; il serait à jamais regrettable si elles étaient perdues. Lorsque vous les verrez, vous le reconnaîtrez aussi. En attendant je ne puis ici dire autre chose que ceci : *J'ai du néant tiré un nouvel univers.* Tout ce que je vous ai communiqué jusqu'ici n'est qu'une maison de cartes, comparé à cette tour. Je suis déjà autant persuadé que cela me fera honneur que si cela avait déjà eu lieu. »

Dans son autobiographie Johann continue comme il suit :

« Il [Johann] communiqua ce travail à son père, ainsi qu'à d'autres personnes, parmi lesquelles se trouvait M. Johann Wolter von Eckwehr qui avait été son professeur à l'Académie du Génie, dans un manuscrit de 1825, où se trouvait déjà exposé le principe de toute la question; ce manuscrit sera encore vraisemblablement entre les mains de ce dernier. Après s'être rencontré avec son père, il s'entendit avec lui pour lui en fournir une traduction en latin qui parut en 1832 comme *Appendix* au *Tentamen*. Le *Tentamen* avec l'*Appendix* furent envoyés à Gauss. Sa réponse arriva six semaines après. Gauss commence ainsi : Il ne peut, quelque bizarre que cela puisse sembler au premier abord, louer ce travail et cela, parce que le louer serait se louer lui-même; en effet, le contenu tout entier de l'Ouvrage, la voie que je me suis frayée, comme les résultats auxquels j'ai été conduit, coïncident presque entièrement avec les propres méditations et recherches qui ont occupé son esprit pendant trente ou trente-cinq ans. Dans une première Lettre il écrivait [Gauss, le 25 novembre 1804] : qu'il espérait pouvoir éviter ces écueils. *Il espère donc!!* »

Ces derniers mots révèlent une certaine défiance envers Gauss, qui sera peut-être expliquée par ces mots de Koloman Szily : « Wolfgang et Johann n'étaient pas en bons termes. Le fils fut plein de jalousie et d'ingratitude jusqu'à la fin; ce ressentiment provenait

de ce soupçon non justifié que le père avait divulgué à Gauss les idées exposées dans l'Appendice et que ce dernier voulait alors ravir au fils la priorité de ces conceptions. »

Il est encore nécessaire d'ajouter une remarque à propos de ces mots « Le *Tentamen* comme l'*Appendix* furent envoyés à Gauss. » Du premier volume du *Tentamen*, c'est l'*Appendix* qui fut imprimé le premier, et Wolfgang, à la demande de son fils, envoya cet opuscule à Gauss pour avoir son avis, comme le montre sa Lettre du 20 juin 1831.

D'après l'indication même de W. Bolyai, le porteur de cette lettre était un gentilhomme hongrois, Joseph von Zeyck, dont le père Daniel von Zeyck avait été étudiant à Göttingue en même temps que Gauss et Bolyai. Dans la lettre suivante du 6 janvier 1832, Bolyai écrit à Gauss : « Je t'avais envoyé cet opuscule en même temps que ma première lettre [du 20 juin 1831] et pendant longtemps, durant la fatale épidémie du choléra, je n'ai pas su ce qu'il en était advenu ; je l'envoie maintenant par la poste sous le couvert de H. Joseph von Zeyck [alors à Klausenburg, d'après M. Franz Schmidt] en le priant de te le faire parvenir. » Gauss répondit, le 6 mars 1832 : « Tes deux lettres, qui me sont parvenues par les soins de M. Zeyck, m'ont fait le plus grand plaisir, mon vieil et inoubliable ami. Au reçu de la première, j'ai remis ma réponse jusqu'à l'arrivée de la deuxième, voulant attendre le petit Mémoire annoncé. »

Laissons maintenant parler eux-mêmes les nouveaux documents.

I.

Gauss à W. Bolyai.

Helmstedt, le 16 décembre 1799 (1).

... Je regrette bien de n'avoir pas profité de notre voisinage rapproché

---

(1) Cette lettre a été déjà, quant à ses parties essentielles, publiée par M. le Conseiller privé *Schering*, en 1877, à l'occasion des fêtes du Centenaire de *Gauss*.

d'autrefois, pour connaître davantage tes travaux sur les premiers principes de la Géométrie; je me serais ainsi certainement épargné bien des peines inutiles, et j'aurais eu l'esprit plus en repos, autant que quelqu'un de mon caractère peut l'avoir, lorsqu'il reste encore tant à désirer relativement à un tel sujet. Quant à moi, mes travaux sont déjà bien avancés (autant que m'a permis de le faire le peu de temps que m'ont laissé mes occupations de nature toute différente); mais la voie dans laquelle je suis entré ne conduit pas au but que l'on cherche, et que tu affirmes avoir atteint, mais conduit plutôt à mettre en doute l'exactitude de la Géométrie.

Je suis, il est vrai, arrivé à bien des choses, qui seraient par la plupart des hommes regardées comme une démonstration valable, mais qui, à mes yeux, ne démontrent pour ainsi dire RIEN; par exemple, si l'on pouvait démontrer l'existence possible d'un triangle rectiligne, dont l'aire serait plus grande que toute surface donnée, je serais alors en état de démontrer avec une rigueur parfaite toute la Géométrie.

La plupart, il est vrai, voudraient donner à cela le rang d'un axiome, moi non; il serait bien, en effet, possible, quelque éloignés entre eux que l'on choisisse les trois sommets du triangle dans l'espace, que son aire fût néanmoins toujours inférieure (*infra*) à une limite donnée. Je possède quelques théorèmes pareils, mais je ne trouve en aucun d'eux quelque chose de satisfaisant. Fais-nous donc bientôt connaître ton travail; tu auras acquis alors droit à la reconnaissance, mais non pas celle, il est vrai, du gros du public (auquel appartiennent cependant nombre de gens regardés comme d'habiles mathématiciens); je m'aperçois, en effet, davantage chaque jour que le nombre des vrais géomètres est extrêmement restreint, et que la plupart des gens ne sont capables ni de porter un jugement sur les difficultés de pareils travaux, ni même de les comprendre; mais jouis de la reconnaissance de tous ceux dont l'opinion seule peut avoir effectivement du prix pour toi!

Il se trouve, à Brunswick, un émigré nommé Chauvelot, qui n'est pas mauvais géomètre, et qui prétend avoir complètement établi la théorie des droites parallèles; son travail sera imprimé bientôt, mais je n'en attends rien de bon. Dans les *Archives de Hindeburg*, neuvième Partie, se trouve également une nouvelle recherche, d'un certain Hauff, sur le même sujet; c'est au-dessous de toute critique.

II.

W. Bolyai à Gauss.

Maros Vásárhely, le 16 septembre 1804.

Il m'est venu l'idée, au lieu d'attendre plus longtemps (*nonum an-*

num) [1], une occasion favorable de t'envoyer quelque chose. Je ne t'envoie que des demi-feuilles, pour que ma lettre ne soit pas suspecte [2].

Sous le couvert de celle-ci, je t'envoie ma théorie, de Göttingue, relative aux parallèles; par la poste suivante je voudrais t'envoyer les principes de l'Arithmétique et de la Géométrie ; cela peut aller jusqu'à trois courriers : si le système lui-même pouvait t'intéresser, j'en serais très heureux. J'ai laissé de côté cette théorie pendant environ trois ans, car les événements m'ont empêché d'y travailler; j'ai dû maintenant la reprendre en vue de l'enseignement et je l'ai renfermée dans un espace plus restreint. Je ne puis y découvrir d'erreurs; éprouves-en l'exactitude et écris-moi le plus tôt possible; écris-moi tes objections ; dis-moi, ou si je me suis mal exprimé, ou peut-être trop en abrégé; je l'ai fait écrire par un étudiant, car je n'écris pas bien, mais j'ai eu de la peine à corriger les fautes et il peut encore m'en être échappé dans quelques lettres. Ici, il n'y a aucun goût pour ce genre de choses; aussi suis-je, en général, exécré par les prétendus savants arriérés d'ici. Si tu juges que ce petit opuscule en vaut la peine, envoie-le à une Académie capable de le juger et de lui donner le sceau de son approbation. Je suis préparé à entendre des jugements défavorables, aussi je ne disconviens pas que je n'aurais pas encore publié cela, si, pour pouvoir vivre en paix parmi mes nombreux critiques, il n'avait pas fallu hasarder quelque réputation extrinsèque. Tu sais, n'est-ce pas, ce que dit Hamlet : « The spurns, that patient merit of th'unworthy takes ».

III.

Gauss à W. Bolyai.

Brunswick, le 25 novembre 1804.

Maintenant, ... encore quelque chose à propos de ta Communication géométrique. J'ai lu ton Mémoire avec le plus grand intérêt et la plus grande attention et j'ai été vraiment réjoui de la profonde perspicacité dont tu fais preuve. Mais ce n'est pas une louange inutile que tu désires; celle-ci, à un certain point, pourrait aussi sembler partiale, car la marche de tes idées a beaucoup de similitude avec celle que j'ai autrefois moi-même employée dans la recherche de la solution de ce nœud gordien, recherche vaine encore jusqu'ici. C'est seulement mon jugement sincère et sans détour que tu désires. Le voici : ta méthode ne me satisfait *pas* encore. Je vais chercher à mettre en pleine lumière, avec toute la clarté possible, la pierre d'achoppement que j'y trouve encore (et qui appartient aussi au

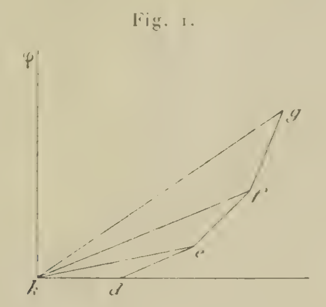
(1) *Nonum prematur in annum* (Horace). (L. L.).

(2) Bolyai craignait le cabinet noir du Gouvernement autrichien. (L. L.).

même *groupe* d'écueils sur lesquels ont échoué jusqu'ici mes propres recherches). J'ai cependant toujours l'espoir que ces écueils finiront, avant la fin de ma vie, par me livrer enfin passage. Mais j'ai ici, en ce moment, tant d'autres affaires en train, que je ne puis actuellement y penser; crois-moi, cela me réjouirait du fond du cœur, si tu me devançais et si tu réussissais à surmonter tous les obstacles. Je ferais alors, avec le plus grand plaisir, tout ce que je puis pour faire reconnaître ton mérite et pour le mettre en pleine lumière. J'arrive maintenant à la question.

A toutes les *autres* conclusions, je ne trouve aucune objection essentielle à faire : ce qui, pour moi, n'est *pas* concluant, c'est simplement le raisonnement dans l'Article XIII. Tu supposes ici prolongée, d'une manière indéterminée, une ligne Π. ... *kdefg* ... formée de segments tous rectilignes et égaux *kd*, *de*, *ef*, *fg*, etc., et où les angles *kde*, *def*, *efg*, etc., sont égaux entre eux, et tu veux démontrer qu'en procédant ainsi plus ou moins longtemps Π devra nécessairement dépasser $k\varphi$. A cet effet, tu fais tourner la ligne droite $kd\infty = Q$, autour de k, du côté où est situé Π, en sorte qu'elle passera successivement, en le rencontrant, de chaque côté du polygone Π au côté suivant. Tu fais voir à merveille que Q, passant à la façon d'échelons par *d*, *e*, *f*, *g*, etc., se rapproche chaque fois davantage de $k\varphi$; contre tout ceci, *aucune* objection à faire; mais maintenant tu continues ainsi :

Fig. 1.



« Quapropter Q moveri potest modo prescripto, usque dum in $k\varphi\varphi'\infty$ pervenerit ... » et voilà la conclusion qui ne me semble pas évidente. De ton raisonnement, à mon avis, il ne s'ensuit pas le moins du monde que l'angle, autour duquel Q ... ([1]), en cheminant le long d'un côté de Π qui se rapproche de $k\varphi$, ne devienne pas toujours moindre; de la sorte, l'agrégat de tous les rapprochements successifs, quel que fût leur nombre, pourrait bien ainsi n'être jamais [suffisamment] grand pour amener Q en $k\varphi$; si tu pouvais *démontrer* que $dke = ekf = fkg$, etc., alors la

([1]) Ici se trouvent des lettres devenues illisibles par l'effet de l'usure d'un pli dans le papier de la lettre.

chose serait nette et claire. Le théorème est du reste exact, mais difficile à démontrer en toute rigueur sans présupposer d'avance la théorie des parallèles. On pourrait donc toujours appréhender que les angles *dke*, *ekf*, *fkg*, etc. ne diminuassent successivement.

Si cela avait lieu (*exempli gratiâ* seulement) en progression géométrique, de sorte que l'on eût $ekf = \psi \times dke$, $fkg = \psi\, dke$, etc. (ψ étant plus petit que 1), alors la somme de tous les rapprochements, quelque grand que l'on prenne leur nombre, resterait toujours inférieure à $\frac{1}{1-\psi} \times ekf$, et cette limite pourrait encore alors être toujours inférieure à l'angle droit $dk\varphi$. Tu as exigé de moi un jugement sans détour; je te l'ai donné, et je te répète encore l'assurance que cela me ferait le plus grand plaisir si tu surmontais toutes ces difficultés.

IV.

W. Bolyai à Gauss.

Maros-Vásárhely, le 20 juin 1831.

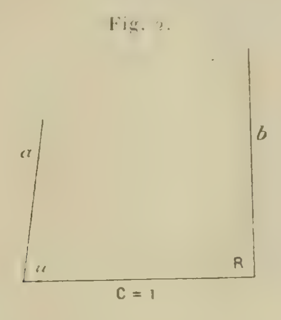
[Mon fils] est déjà lieutenant en premier dans le Corps du Génie et sera bientôt capitaine; c'est un beau garçon, un virtuose sur le violon; il est fort en escrime et brave, mais il s'est souvent battu en duel, et c'est encore un militaire un peu trop bouillant, mais aussi un parfait galant homme : de la lumière dans les ténèbres, des ténèbres dans la lumière. Il est passionné pour les Mathématiques et possède pour elles de rares aptitudes d'esprit, il est maintenant en garnison à Lemberg; il a pour toi la plus grande vénération, il est capable de te comprendre et de t'apprécier. C'est à sa demande que je t'envoie ce petit opuscule de lui; aies la bonté de le juger avec tes yeux si perspicaces, et, dans la réponse que j'attends impatiemment, écris-moi ton arrêt sans ménagement. C'est le premier commencement de mon œuvre qui est sous presse; j'aurais bien voulu t'envoyer le premier Volume, mais il n'est pas encore publié.

[A l'intérieur de l'enveloppe de la lettre, W. Bolyai écrit encore ce qui suit] :

A mon avis, dans l'opuscule de mon fils, *u* est construit géométriquement (c'est-à-dire où *a* ne coupe pas la première fois *b*, pour $c =$ l'unité de la droite) mais la grandeur de *u*, de 0 à R (le premier exclus, le second inclus), n'est pas déterminée. Et chaque théorème en Géométrie ou bien dépend de *u*, ou bien en est indépendant; par exemple, au § 26, la Trigonométrie sphérique est établie indépendamment de *u*, de même que l'aire de la sphère ou de la zone, etc. Mais tout ce qui dépend de *u* sera ex-

primé par une certaine fonction de u, où rien ne reste indéterminé hormis la grandeur de u et sera vrai pour chaque valeur *subjectivement* possible de u. Ainsi, quand on a pour un certain cas $f(u) = y$, et que u

Fig. 2.



est représenté par l'abscisse (croissante de o à R) et y par l'ordonnée correspondante, alors la grandeur de y sera donnée par l'expression générale qui dépend de u, pour chaque valeur de u et aussi à la limite pour $u = R$. Il se sert de certaines lettres majuscules et minuscules; elles sont d'ailleurs toutes de certaines fonctions de u; il eût été plus élégant et plus clair de les exprimer ainsi, puisque cela se déduit aisément du travail même; du reste, cette façon de parler ne diffère que par les mots seuls de ce qui se trouve dans l'Ouvrage. A la fin, il fait voir que, si u n'est pas égal à R, l'on a la quadrature du cercle.

V.

Maros Vásárhely, le 16 janvier 1832.

[W. Bolyai envoie à Gauss l'Appendice, et écrit à cette occasion] :

Mon fils était absent lorsque son Travail a été imprimé, il a fait corriger les erreurs (dans l'*Errata* à la fin). J'en ai corrigé la plupart à la plume, pour t'éviter cet ennui. Il m'écrit de Lemberg qu'il a depuis rendu beaucoup d'endroits plus simples et plus élégants, et qu'il a démontré l'impossibilité de déterminer *a priori* si l'axiome XI est vrai ou non.

VI.

Gauss à W. Bolyai.

Göttingue, le 6 mars 1832.

... Parlons maintenant un peu du travail de ton fils.

Si je commence en disant que *je ne puis louer ce travail,* tu pourras bien un instant reculer d'étonnement; mais je ne puis dire autre chose; le louer serait me louer moi-même; en effet, le contenu tout entier de l'Ouvrage, la voie qu'a frayée ton fils, les résultats auxquels il a été conduit coïncident presque entièrement avec mes propres méditations qui ont occupé en partie mon esprit depuis déjà trente à trente-cinq ans. Aussi ai-je été complètement stupéfait. Quant à mon travail personnel, dont d'ailleurs j'ai confié peu de chose jusqu'ici au papier, mon intention était de n'en rien laisser publier de mon vivant. En effet, la plupart des hommes n'ont pas l'esprit juste sur les questions dont il s'agit, et j'ai trouvé seulement bien peu d'entre eux qui prissent un intérêt particulier à ce que je leur ai communiqué à ce sujet. Pour pouvoir prendre cet intérêt, il faut d'abord avoir senti bien vivement ce qui fait essentiellement défaut, et sur ces matières la plupart des hommes sont dans une obscurité complète. C'était, au contraire, mon idée de mettre, avec le temps, tout ceci par écrit afin qu'au moins cela ne périsse pas avec moi.

Aussi est-ce pour moi une agréable surprise de voir que cette peine peut maintenant m'être épargnée, et je suis rempli d'une joie extrême que ce soit précisément le fils de mon vieil ami qui m'ait devancé d'une manière si remarquable.

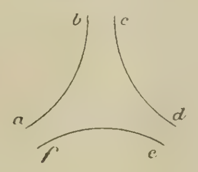
Je trouve les notations très précises et propres à abréger le discours; cependant je crois qu'il serait bon, pour quelques-unes des notions principales, de choisir non seulement des symboles ou lettres mais encore une terminologie déterminée, et j'ai déjà depuis assez longtemps pensé à de pareilles désignations. Tant que l'on ne fait que réfléchir aux questions au moyen de l'intuition directe, l'on n'a besoin ni d'appellations, ni de symboles; ils ne deviennent nécessaires que lorsque l'on veut éclairer les autres hommes. L'on pourrait, par exemple, donner à la surface que ton fils désigne par F le nom de *parasphère;* à la ligne L le nom de *paracycle;* ce sont, en principe, la surface de la sphère et la circonférence du cercle dont le rayon est infini. On pourrait nommer *hypercycle* le complexe de tous les points équidistants d'une droite située dans le même plan qu'eux; de même l'on pourrait parler d'une *hypersphère.* Mais tout cela n'est qu'une question accessoire sans importance. La chose principale c'est le fond et non la forme.

Dans quelques parties de ces recherches, j'ai suivi une autre voie; comme spécimen, je joins ici une démonstration purement géométrique

(esquissée à grands traits) de ce théorème que la quantité dont la somme des angles d'un triangle diffère de 180° est proportionnelle à l'aire du triangle.

I. Le complexe de trois droites *ab*, *cd*, *ef*, telles que l'on ait *ab* ||| *dc*,

Fig. 3.

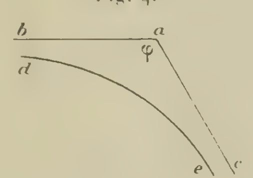


cd ||| *ef*, *ef* ||| *ba*, forme une figure que je nomme T. L'on peut démontrer que cette figure est toujours située dans un plan.

II. Cette partie du plan qui est située entre [1] les trois droites *ab*, *cd*, *ef*, possède une aire finie déterminée; désignons-la par t.

III. Deux droites *ab*, *ac* se coupant en a sous un angle φ, l'on peut déterminer une troisième droite de telle sorte que l'on ait *ab* ||| *ed*, *ac* ||| *de*; alors *de* est aussi située dans un plan avec *ab* et *ac*, et l'aire de

Fig. 4.



la surface comprise entre ces droites est finie, et ne dépend que de l'angle φ. Évidemment en Σ, *de* et *bac* ne forment qu'une ligne droite lorsque $\varphi = 180^\circ$, et, par conséquent, la valeur de cette aire s'évanouit en même temps que $180^\circ - \varphi$. L'on posera donc, en général, que l'aire $= F(180^\circ - \varphi)$, F désignant un symbole fonctionnel.

IV. Théorème. — *On a toujours*

$$F(\varphi) + F(180^\circ - \varphi) = t.$$

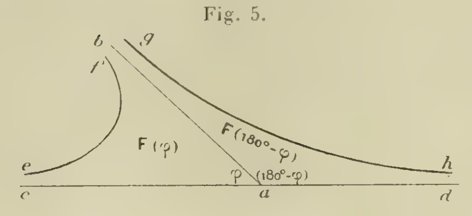
La démonstration est donnée par la figure, où $bac = \varphi$, $bad = 180^\circ - \varphi$,

---

(1) Dans une exposition complète, il faut aussi que des mots tels que « entre » soient ramenés à des *définitions* claires, cela s'entend de soi, mais c'est ce que je n'ai jamais trouvé nulle part.

$ac \parallel\!\parallel fe$, $ef \parallel\!\parallel ab$, $ab \parallel\!\parallel hg$, $ad \parallel\!\parallel gh$, et où l'aire est inscrite en encre rouge ([1]).

Fig. 5.



V. Théorème. — *L'on a toujours*

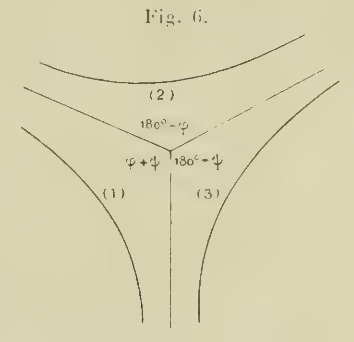
$$F(\varphi) + F(\psi) + F(180^\circ - \varphi - \psi) = t.$$

La démonstration se voit clairement sur la figure (6), où les trois portions d'aire (1), (2), (3) ont pour valeur

$$(1) = F(180^\circ - \varphi - \psi),$$
$$(2) = F(\varphi),$$
$$(3) = F(\psi),$$

et leur somme est $= t$.

Fig. 6.



VI. Corollaire. — On a, par conséquent,

$$F(\varphi) + F(\psi) = t - F(180^\circ - \varphi - \psi) = F(\varphi + \psi),$$

d'où l'on conclut facilement que

$$\frac{F(\varphi)}{\varphi} = \text{const.},$$

et que celle-ci

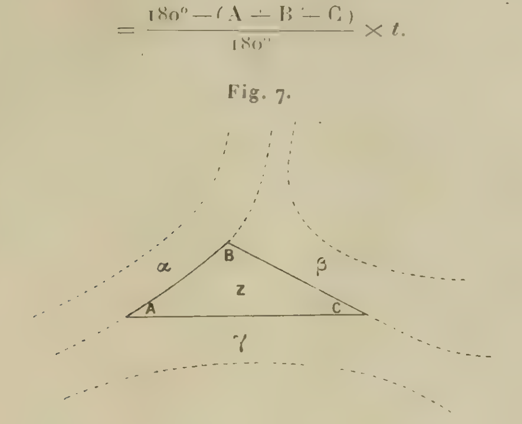
$$= \frac{t}{180^\circ}.$$

([1]) Ce sont $F(\varphi)$ et $F(180^\circ - \varphi)$ qui sont supposés inscrits en encre rouge. (L. L.).

VII. Théorème. — *L'aire d'un triangle dont les angles sont* A, B, C *est*

$$= \frac{180^\circ - (A + B + C)}{180^\circ} \times t.$$

Fig. 7.



La figure fournit la démonstration. On a, pour l'aire,

$$\alpha = F(A) = \frac{A}{180^\circ} t,$$

$$\beta = F(B) = \frac{B}{180^\circ} t,$$

$$\gamma = F(C) = \frac{C}{180^\circ} t;$$

$$t = \alpha + \beta + \gamma + Z = \frac{A + B + C}{180^\circ} t + Z.$$

J'ai voulu ici simplement esquisser la démonstration, sans aucun travail de la lime, et le temps m'a manqué jusqu'ici pour la polir. Tu es libre de la communiquer à ton fils ; je te prie, en tout cas, de le saluer cordialement de ma part et de l'assurer de ma haute estime ; propose-lui en même temps de s'occuper du problème suivant :

Déterminer le volume du tétraèdre (espace encadré par quatre plans).

Puisque la surface d'un triangle peut être assignée si aisément, on eût pu s'attendre à trouver, pour le volume précité, une expression également simple ; mais cette attente, paraît-il, a été déçue.

Pour traiter la Géométrie, dès les débuts, d'une manière bien ordonnée, il est indispensable de démontrer la possibilité de l'existence du plan. La définition habituelle renferme trop de choses et implique déjà un théorème à proprement dire tacite. L'on doit s'étonner que tous les écrivains, depuis Euclide jusqu'à nos jours, se soient mis à l'œuvre d'une façon si négligente. Mais cette difficulté est d'une [nature] complètement différente de celle qui consiste à faire la distinction entre Σ et S, et elle n'est

pas très difficile à lever. Probablement, sur ce sujet, je trouverai ton livre satisfaisant.

Par l'impossibilité où l'on est de distinguer *a priori* entre Σ et S, se trouve précisément démontré le plus clairement que Kant a eu tort d'affirmer que l'espace est *seulement la forme* de notre intuition. J'en ai indiqué une raison tout aussi probante dans une petite Note qui a paru dans les *Göttingische Gelehrte Anzeigen*, en 1831, Partie 64, p. 625 ([1]). Peut-être ne regretteras-tu pas de prendre la peine de te procurer ce Volume des *G. G. A.* (que tout libraire de Vienne ou de Ofen [Budapest] te fournira), car, parmi d'autres choses, tu y trouveras exposée, en deux pages, la quintessence de mes idées relativement aux grandeurs imaginaires.

VII.

W. Bolyai à Gauss.

Máros-Vásárhely, le 20 avril 1835.

[W. Bolyai envoie à Gauss les deux Volumes du *Tentamen*... et écrit, entre autres choses] :

A la fin du deuxième Volume, à côté de l'explication de beaucoup de notions données dans le premier Volume se trouve aussi une certaine réunion des deux trigonométries, suivant les idées de mon fils. J'aurais volontiers imprimé la solution relative au tétraèdre (trouvée par mon fils une année avant la publication de son *Appendix*); mais les formules que j'y ai vues étaient trop compliquées et je ne les connais pas bien. Avant tout,

---

([1]) Gauss fait allusion à l'analyse de son Mémoire : *Theoria residuorum biquadraticorum; Commentatio secunda*, qu'il publia dans les *G. G. A.* Il y dit à la page 637 (Gauss, *Œuvres*, t. II, p. 177; 1876) : « Cette distinction entre la droite et la gauche serait... *en soi* complètement déterminée, si toutefois nous pouvions communiquer notre intuition de cette distinction à d'autres *seulement* par une preuve reposant sur les êtres matériels en présence effective desquels l'on serait. » Gauss ajoute en note, au bas de la page : « Les deux remarques ont été déjà faites par Kant, mais on ne conçoit pas comment ce philosophe perspicace pouvait croire trouver dans la première une démonstration de son opinion, que l'espace est seulement une forme de notre intuition extérieure, puisque la deuxième remarque démontre si clairement le contraire, et que l'espace doit avoir une signification réelle indépendamment de notre mode d'intuition. » Kant, en 1783, dans les *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik* (§ 13), a cherché à employer l'existence de figures symétriques pour la démonstration de l'idéalité de l'espace, tandis qu'en 1768, dans le Mémoire *Von dem ersten Grunde dus Unterschiedes der Gegenden im Raume,* il avait, de cette même remarque, déduit « la réalité effective de l'espace absolu. »

j'aurais aimé à faire imprimer la démonstration qu'il est absolument impossible à l'esprit humain d'affirmer si l'axiome XI est vrai ou faux ; mon fils prétend en avoir la démonstration évidente : d'ailleurs, je ne puis encore démontrer que l'existence aussi bien que la non-existence de cette proposition peut être compatible avec les autres axiomes d'Euclide, et que l'on a ainsi deux systèmes différents (chacun valable quant à soi), chose que je sais déjà être vraie depuis bien des années. Mais il s'agit de savoir aussi s'il n'y pas un autre axiome, d'importance au moins égale à celui qu'Euclide et les autres admettent tacitement, et que l'on doit admettre comme vrai dans les deux systèmes. Ce que que j'ai fait avant mon fils se trouve dans le Tome I, p. 488....

SUPPLÉMENT.

Wolfgang Bolyai à Sartorius von Waltershausen.

Máros-Vásárhely, le 13 juillet 1856.

... Je partis alors pour Vienne... une circonstance particulière me fit passer d'abord par Iéna... Je ne suivis pas de cours de Mathématiques, mais, me promenant seul sur les bords de la Saale, à l'aide des souvenirs éparpillés dans ma mémoire, je commençai, sans livres, à spéculer sur les principès des Mathématiques, et comme je pensais à faire aussi quelque chose, ce fut sur ces bords de la Saale que prirent leurs premières racines ces idées que je cherchai plus tard à raffiner et à étendre. De Iéna, je me rendis à Göttingue ; c'est là que, chez le bienveillant professeur Seyffer, je vis Gauss *pour la première fois,* et moi, avec mon peu de savoir, j'eus l'audace de lui tenir des discours (résonnant comme un tonneau vide), sur le peu de profondeur du traitement des principes des Mathématiques, relativement à la multiplication, la division, l'élévation aux puissances..., la ligne droite, le plan, les égalités à leurs divers points de vue, et ainsi de suite. Après, nous nous rencontrâmes chacun seul, sur les remparts ; nous nous promenions ensemble, nous nous donnions rendez-vous, et bientôt nous nous enrôlâmes ensemble, en frères, sous le drapeau de la vérité. Depuis lors, c'est avec moi qu'il venait ainsi, le plus souvent, se reposer de ses profonds travaux ; il n'en parlait jamais ni d'avance, ni même quand ils étaient accomplis ; une seule fois j'aperçus en lui une satisfaction modérée, ce fut lorsqu'il me donna, comme souvenir, un petit Tableau où il avait inscrit les calculs des *Disquisitiones arithmeticæ*, art. 662, relatifs au polygone de 17 côtés.

Nous allâmes aussi tous les deux, à pied, voir ses parents à Brunswick ; sa mère me demanda si son fils deviendrait quelque chose ; en entendant ma réponse : *le premier mathématicien de l'Europe!* elle fondit en larmes.

Correspondance de Gauss et W. Bolyai [1].

Gauss a Bolyai.		Bolyai a Gauss.	
1.....	Brunswick, 29 sept. 1797.		
2.....	» 21 avril 1798.		
3.....	» 30 sept. 1798.	1.	Göttingue, 31 octobre 1798.
4.....	» 29 nov. 1798.	2.	» 30 déc. 1798.
5.....	» 9 janvier 1799.	3.	» 4 mars 1799.
		4.	» 20 mars 1799.
		5.	» 9 avril 1799.
6.....	» 22 avril 1799.	6.	» 12 mai 1799.
7.....	» 17 mai 1799.	7.	» 20 mai 1799.
		8.	» 27 mai 1799.
8.....	» 29 mai 1799.	9.	Pesth, 11 sept. 1799.
9.....	*Helmstedt*, 16 *déc.* 1799.	10.	Clausenburg, 13 avril 1800.
		11.	Domáld, 11 sept. 1802.
10.....	Brunswick, 3 déc. 1802.	12.	Clausenburg, 24 février 1803.
11.....	» 20 juin 1803.	13.	Domáld, 1er mars 1804.
12.....	» 28 juin 1804.	14.	*Maros Vásárhely*, 16 *sept.* 1804.
13.....	*Brunswick*, 25 *nov.* 1804.	15.	» 18 déc. 1807.
14.....	Göttingue, 20 mai 1808.		
15.....	» 2 sept. 1808.	16.	» 27 déc. 1808.
		17.	» 10 avril 1816.
		18.	*Maros Vásárhely*, 20 *juin* 1831.
		19.	*Maros Vásárhely*, 16 *janv.* 1832.
16.....	*Göttingue*, 6 *mars* 1832.	20.	*Maros Vásárhely*, 20 *avril* 1835.
		21.	» 4 oct. 1835.
		22.	» 3 oct. 1836
17.....	» 23 octobre 1836.	23.	» 18 janv. 1848.
18.....	» 20 avril 1848.	24.	» 6 fév. 1853.

[1] La date et le lieu d'origine des lettres dont nous venons de communiquer les extraits sont imprimés dans cette Table en caractères italiques.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

WESSEL (C.). — ESSAI SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DE LA DIRECTION. Publié par l'Académie Royale des Sciences et Lettres de Danemark. In-4°, XIV-60 p. Copenhague, Höst et Sön, 1897.

Le Mémoire sur lequel l'Académie royale de Copenhague a voulu, avec juste raison, attirer l'attention des géomètres n'est qu'une traduction en français d'un Mémoire qui lui a été présenté il y a un siècle, le 10 mars 1797, et qui est intitulé : *Om Directionens analytiske Betegning*. C'est un travail conçu dans le même esprit que l'Ouvrage célèbre d'Argand : *Essai sur une manière de représenter des quantités imaginaires;* mais, tandis que l'Ouvrage d'Argand remonte à 1806, le présent Mémoire a été imprimé dès 1798; s'il est moins riche en applications intéressantes que l'opuscule d'Argand, il contient une théorie tout aussi complète et, à quelques égards, plus précise et plus ferme. Le Mémoire de Wessel a d'ailleurs un autre avantage : il renferme une théorie des opérations algébriques faites avec des lignes dans l'espace, qui permet de considérer Wessel comme un précurseur d'Hamilton en ce qui concerne les quaternions. Mais, tandis que les idées d'Argand ont été reproduites en 1813 et portées à la connaissance des géomètres dans les *Annales de Gergonne,* le Mémoire de Wessel n'a attiré l'attention de personne; son mérite et son importance n'avaient même pas été signalés dans l'*Histoire de l'Académie des Sciences,* publiée en 1843 par Molbeck.

En publiant ce Travail, l'Académie de Danemark répare donc un oubli et une injustice; elle rend en même temps un service à l'histoire des Mathématiques, car il est très important pour l'historien et le philosophe de savoir comment naissent et se développent les idées directrices qui sont appelées à modifier complètement la marche de la Science. Ce qu'il faut remarquer, ici encore, c'est que ni Wessel, ni Argand n'ont été des géomètres proprement dits. En particulier, Wessel, qui était un arpenteur et un cartographe de grand mérite, n'a jamais publié que le Mémoire dont la traduction française nous est donnée aujourd'hui.

Cette traduction, qui est claire et correcte, conforme au texte

original, accompagnée des planches primitives, a été faite par M. Zeuthen; elle est précédée de deux intéressantes Préfaces, dues à M. H. Valentiner et à M. Thièle. La première contient des renseignements biographiques sur Wessel et sur la représentation analytique des directions dans le plan, la seconde traite de la détermination analytique de la position des points dans l'espace à trois dimensions.

BOEHM (K.). — Allgemeine Untersuchungen ueber die Reduction partieller Differentialgleichungen auf gewoehnliche Differentialgleichungen mit einer Anwendung auf die Theorie der Potentialgleichung. In-8°, 58 p. Leipzig, Teubner, 1896.

Le but principal de ce petit Ouvrage est l'étude des équations aux dérivées partielles à n variables indépendantes $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, qui admettent une infinité de solutions de la forme

$$\varphi_1(\rho_1)\,\varphi_2(\rho_2)\ldots\varphi_n(\rho_n),$$

les fonctions $\varphi_i(\rho_i)$ étant déterminées par la condition de satisfaire à des équations différentielles de telle manière que l'équation aux dérivées partielles soit une simple conséquence des équations différentielles auxquelles satisfont les fonctions $\varphi_i(\rho_i)$. L'origine de cette recherche est dans la découverte capitale de Lamé, qui a montré que l'équation du potentiel admet une infinité de solutions de la forme

$$f(\rho)f_1(\rho_1)f_2(\rho_2),$$

où ρ, ρ_1, ρ_2 sont les paramètres de trois familles homofocales du second degré. Depuis, M. Wangerin a montré que la même équation admet une infinité de solutions de la forme

$$\mathrm{N}f(\rho)f_1(\rho_1)f_2(\rho_2),$$

où ρ, ρ_1, ρ_2 sont maintenant les paramètres de trois familles de cyclides homofocales. Enfin, dans un Mémoire sur les coordonnées curvilignes, publié en 1873 dans les *Annales de l'École Normale*, M. Darboux s'est proposé de définir tous les cas dans lesquels l'équation du potentiel admet des solutions de la forme précédente;

ρ, ρ_1, ρ_2 étant maintenant des coordonnées curvilignes quelconques. M. Boehm ne paraît pas connaître ces derniers travaux; mais les recherches contenues dans la première Partie de son Opuscule, et relatives aux équations aux dérivées partielles les plus générales, offrent un sujet d'études de grand intérêt.

RUHL GENTRY. — ON THE FORMS OF PLANE QUARTIC CURVES. A dissertation presented to the Faculty of Bryn Mawr College for the degree of doctor of Philosophy. Un vol. in-8°, 74 p. New-York, R. Drummond, 1896.

Dès le début de la Géométrie analytique, on s'est préoccupé d'obtenir toutes les formes possibles des courbes du troisième ordre, et le problème a pu être résolu sans trop de peine; mais la recherche de toutes les formes possibles des courbes du quatrième ordre présentait infiniment plus de difficulté. En dehors de la complication qui résulte de l'élévation du degré de la courbe, il se présente, dans la courbe du 4e ordre, un élément nouveau, la tangente double dont la présence introduit une grande variété et exige une discussion assez délicate.

C'est M. Zeuthen qui, dans un grand nombre de remarquables Travaux et, en particulier, dans un Mémoire inséré au Tome VII des *Mathematische Annalen*, a le premier fait connaître toutes les formes possibles de la courbe générale du 4e ordre. Il restait à résoudre une question certainement moins difficile, mais présentant encore un vif intérêt, celle des différentes formes des courbes du 4e ordre à point multiple. L'auteur du petit Ouvrage dont nous avons à rendre compte a donc repris la question dans son ensemble; et il s'est proposé de nous faire connaître toutes les formes possibles des courbes du 4e ordre. Bien entendu, on ne considère pas comme différentes deux de ces formes qui se déduisent l'une de l'autre par une perspective réelle.

M. Gentry adopte d'abord une distinction essentielle, proposée par M. Zeuthen. Quand la courbe a des traits différents, il peut y avoir des tangentes doubles réelles dont les points de contact sont sur des branches différentes; il peut y en avoir aussi dont les points de contact sont imaginaires conjugués ou sur une même

branche de courbe. M. Zeuthen avait démontré le résultat très élégant que le nombre de ces tangentes ne saurait dépasser *quatre;* et M. Klein avait, à leur sujet, établi une relation très élégante applicable à une courbe algébrique quelconque et qui a permis à l'auteur d'approfondir tous les cas particuliers.

La recherche est divisée en quatre Parties.

La première concerne les quartiques non singulières; elles se divisent en cinq classes qui peuvent avoir un nombre pair d'inflexions réelles, égal ou inférieur à huit, et qui peuvent avoir des tangentes doubles *à contacts imaginaires* en nombre égal ou inférieur à quatre, ces deux nombres I et T étant liés par la relation

$$I + 2T = 8.$$

L'auteur a été conduit ainsi à trente-six formes pouvant toutes être réalisées et dont il a donné le dessin.

La seconde catégorie comprend les courbes unicursales. En s'appuyant sur une forme générale de leur équation, on obtient cinquante et un types différents dont plusieurs donnent des formes distinctes.

Il ne reste plus qu'à examiner les courbes à un seul point double (qui sont du genre 2) et les courbes à deux points doubles (qui sont elliptiques). Les premières fournissent encore dix-sept types, les secondes quarante types différents.

Toutes ces formes sont groupées en quatre séries de Planches à la fin du Volume, qui sera lu avec profit par tous ceux qu'intéresse la théorie si vaste et si féconde des courbes du quatrième ordre.

IAGGI (E.). — RECHERCHES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS. In-4°: lith. 123 p. Besançon. Ch. Marion, 1897.

Le travail de M. Iaggi dénote un effort personnel très notable. L'auteur est de ceux qui suivent leur pensée plus volontiers que celle des autres ; il est aussi de ceux qui se plaisent aux idées générales ; malheureusement, les *vues* lui suffisent un peu trop ; il n'en manque pas dans ses *Recherches* qui semblent justes et

même pénétrantes, et qui sont de celles qui peuvent guider un mathématicien ; mais la critique du détail est souvent insuffisante et la *vue* reste vague.

Sans doute, M. Iaggi a reculé devant des développements qui auraient démesurément grossi son Mémoire ; mais quelques-uns de ces développements, au moins, auraient été indispensables pour préciser sa pensée.

Dans la première Partie, M. Iaggi expose ses idées sur les fonctions d'une ou de plusieurs variables complexes. Bornons-nous, pour plus de précision, au cas d'une seule variable. Pour lui, la notion d'une fonction u d'une variable indépendante x est négative ; u est une fonction de x, si, le point x étant choisi arbitrairement dans le plan représentatif des x, le point u ne peut pas être choisi arbitrairement dans le plan des u, et si son *lieu* dans ce plan ne reste pas le même quel que soit x ; ce que l'on appelle habituellement une *fonction* n'est, pour lui, qu'un cas très particulier, le cas où le lieu de u est un ou plusieurs points ; les fonctions de cette nature sont des fonctions *ponctales;* le lieu du point u peut aussi bien être une ligne, ou une aire ou un ensemble de points isolés et de lignes ou d'aires : tel est le point de départ de sa classification, sur laquelle il y aurait bien à dire ; mais je me bornerai à observer que, à ce degré de généralité, il faudrait dire ce que c'est qu'une ligne, une aire, et établir certaines distinctions entre les ensembles de points isolés.

Un des exemples de fonctions linéales qu'il donne n'est pas sans causer des inquiétudes ; telle serait, pour lui, la fonction $u = x^m$ quand on suppose m incommensurable. Quand on se donne x, le lieu du point u serait toute la circonférence du cercle, dont le centre est O et le rayon $\sqrt[m]{|x|}$; en restant au point de vue de M. Iaggi, on voit bien qu'il y a sur cette circonférence une infinité de points, aussi rapprochés qu'on voudra de tel point donné de la circonférence, qui peuvent être regardés comme des lieux du point u ; mais il n'est pas exact que chaque point de la circonférence puisse être regardé comme un tel lieu ; la fonction n'est pas *linéale*, au moins en adoptant le sens qu'on donne d'habitude au mot *ligne;* les points qui la représentent, pour une valeur donnée de x, sont, dans un certain sens, isolés et cependant ils sont aussi rapprochés qu'on voudra ; ce sont là, sans doute, des

notions qui sont très familières à la plupart des mathématiciens; il n'est cependant pas très étonnant qu'elles aient échappé à quelqu'un qui se contente de penser dans la solitude. M. Iaggi reproche presque aux mathématiciens de ne s'être occupé que des fonctions ponctales; mais ce reproche semble s'atténuer beaucoup par ce fait que lui-même ne considère guère que les fonctions qui se décomposent en fonctions *partielles* (uniformes); cette décomposition paraît nécessaire pour la définition qu'il donne de la continuité et, par suite, pour sa définition de la dérivée; et cette observation, si elle est vraie, restreint singulièrement la généralité qu'il attribue à cette dernière définition. En résumé, si les vues justes ne font pas défaut dans cette première Partie, elles demanderaient à être beaucoup précisées.

Il en est de même de quelques-uns des raisonnements que contient la seconde Partie, raisonnements qui sont d'ailleurs beaucoup plus concrets et qui sont souvent intéressants. Le problème dont s'est occupé l'auteur n'est autre que la détermination des fonctions uniformes que laissent inaltérées les substitutions d'un groupe donné, et qui ne restent inaltérées que par celles-là; l'auteur applique, en particulier, sa méthode de reconstruction des fonctions circulaires et elliptiques; à propos de ces dernières fonctions, il insiste sur le rôle de la fonction que l'on désigne par sin coam dans la notation de Jacobi.

J. T.

BAKER (H.). — ABEL'S THEOREM AND THE ALLIED THEORY INCLUDING THE THEORY OF THE THETA FUNCTIONS. Un vol. gr. in-8°, xx-684 p. Cambridge, University press, 1897.

Le Volume que publie M. Baker, *fellow* au collège de Saint-John, sur les fonctions abéliennes, est une œuvre considérable qui ne pourra manquer de rendre les plus grands services à ceux qui veulent se rendre maîtres d'une théorie qui s'est développée constamment dans les trois derniers quarts de ce siècle et dont les ramifications sont aussi touffues en Analyse qu'en Algèbre et en Géométrie. L'exposition a un caractère didactique : c'est l'exposi-

tion d'une théorie, non une suite d'exemples; les exemples d'ailleurs abondent, mais à leur place, et afin *d'illustrer* la théorie.

Le point de départ de l'auteur est la surface de Riemann, avec laquelle il suppose d'ailleurs le lecteur déjà familiarisé; il commencera donc à développer la théorie en partant du *théorème de l'existence* considéré comme *a priori :* plus tard, il indiquera comment elle pourrait être fondée sur de pures considérations d'Algèbre, ou sur la théorie de l'intersection des courbes; il introduit immédiatement les intégrales normales des trois espèces et les périodes; il établit la dépendance entre les pôles d'une fonction rationnelle sur la surface, le théorème des lacunes de Weierstrass, et le théorème de Riemann-Roch. Il montre ensuite comment on peut simplifier la forme générale des intégrales de Riemann, par la considération des fonctions rationnelles entières (sur la surface); il définit les systèmes fondamentaux de telles fonctions et en étudie les propriétés, fait l'application aux intégrales des trois espèces et montre comment ce point de vue, purement algébrique, peut remplacer le *théorème de l'existence.*

Le cas hyperelliptique est caractérisé par l'existence d'une fonction rationnelle du second ordre; après avoir étudié ce cas, M. Baker traite de la surface canonique qui correspond au choix de variables indiqué par Weierstrass, et de la généralisation, due à M. Hensel, de la théorie de Weierstrass.

La théorie, jusqu'ici, s'est développée essentiellement dans le sens de Riemann. Arrivé là, l'auteur montre comment elle se relie avec la théorie de l'intersection des courbes, dont il rappelle d'abord qu'elle peut être constituée indépendamment; il montre ensuite le rôle des polynomes adjoints et développe la théorie de la résiduation.

Un important Chapitre est consacré à la déduction d'une fonction, qui permet d'exprimer toutes les fonctions rationnelles sur la surface, et même toutes les fonctions uniformes avec un nombre fini de pôles ou de singularités essentielles.

Cette fonction a été introduite par Weierstrass, mais l'illustre géomètre et ses élèves n'avaient donné sur ce sujet que des indications sommaires. Ce même Chapitre contient le théorème sur l'échange du paramètre et de l'argument, mis sous forme algébrique, et la déduction des relations entre les périodes d'une intégrale de première et de seconde espèce.

Nous voici maintenant arrivés au théorème d'Abel dont l'auteur fait une lumineuse exposition, et dont la démonstration complète, grâce, en particulier, à la théorie de la résiduation, ne souffre plus aucune difficulté. Outre cette démonstration, M. Baker a reproduit celle que l'on doit à Abel lui-même; il étudie ensuite les équations différentielles abéliennes et montre enfin comment la démonstration du théorème d'Abel s'étend aux courbes algébriques gauches. Le problème d'inversion de Jacobi se pose dès lors naturellement; M. Baker étudie d'abord ce problème en lui-même, de façon à en faire ressortir le caractère; il développe ensuite la théorie des fonctions thêta de Riemann, qui en fournissent la véritable solution. Cette théorie est complétée par l'introduction des fonctions analogues aux fonctions ζ et p de la théorie des fonctions elliptiques. Le cas hyperelliptique fournit une belle et simple illustration de la théorie générale. L'auteur reviendra un peu plus tard sur la théorie des fonctions thêta; il aborde pour le moment des ordres d'idées un peu différents. C'est tout d'abord une intéressante digression sur les substitutions linéaires et sur l'introduction, comme variable indépendante, de la fonction de M. Schottky (*Crelle*, p. 243; 1887) et ses relations avec les fonctions thêta, puis un Chapitre sur les fonctions *radicales*, c'est-à-dire sur les fonctions obtenues en prenant la racine $m^{\text{ième}}$ d'une fonction rationnelle dont les pôles et les zéros sont m^{uples}. Une telle fonction est univoque sur la surface découpée. L'effet d'un lacet relatif à une période est de la reproduire multipliée par une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité. Comme application, l'auteur traite des tangentes doubles aux quartiques; il montre en outre comment ces fonctions conduisent à une solution du problème de l'inversion.

Les fonctions radicales sont un cas particulier des fonctions factorielles, univoques elles aussi sur la surface découpée, pour lesquelles les facteurs ne sont plus des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité, mais des constantes quelconques, et qui peuvent admettre, outre des pôles, des singularités essentielles. L'étude de ces fonctions peut être regardée comme une introduction à la théorie des fonctions automorphes.

Après ces importantes digressions, l'auteur revient à la théorie des fonctions thêta, et spécialement à l'étude des relations algébriques entre ces fonctions. Les théorèmes d'addition sont obtenus

en multipliant deux, quatre, et enfin un nombre quelconque de séries thêta. M. Balker développe ensuite, d'après M. Frobenius, la belle théorie des groupes de caractéristiques demi-entières (*Crelle;* 1880, 1884). Un Chapitre est consacré à la transformation des périodes, en particulier à la transformation linéaire. Un autre se rapporte à la théorie des fonctions analytiques à p variables indépendantes qui admettent $2p$ systèmes de périodes, et à la théorie des fonctions thêta générales, spécialement en vue d'obtenir l'expression au moyen de ces fonctions des fonctions transcendantes entières telles que les dérivées secondes de leur logarithme soient périodiques. M. Baker s'occupe ensuite de la transformation des fonctions thêta, de leur multiplication complexe et des correspondances sur une surface de Riemann. Enfin un dernier Chapitre se rapporte à la dégénérescence des intégrales abéliennes.

Ce court résumé, où nous n'avons pu indiquer que les principales matières traitées par l'auteur, suffira pour donner l'idée de l'importance de l'œuvre de M. Baker et des services qu'elle peut rendre. La littérature sur les fonctions abéliennes est extrêmement riche et touffue ([1]); mais, à cause de cette richesse même, il est difficile de s'y orienter. Tout d'abord, le Livre de M. Baker fournira aux étudiants, assez avancés pour en aborder l'étude, un exposé systématique et personnel des résultats les plus importants; puis, sur chaque sujet en particulier, les renseignements bibliographiques abondent, de manière à permettre au lecteur de compléter sur chaque point ses connaissances, tandis que les nombreux exemples, répandus partout, lui permettront de se familiariser avec les théories qu'ils sont destinés à illustrer. J. T.

A. SCHŒNFLIES. — Krystallsysteme und Krystallstructur. In-8°. Leipzig, 1891.

A la suite des travaux de Bravais, on s'accordait généralement à admettre que, dans les corps cristallisés, toutes les molécules

---

([1]) *Jahresbericht der d.-M. Vereinigung,* t. III; *Bulletin,* t. XIX, p. 129.

avaient la même orientation, et que leurs centres de gravité coïncidaient avec les nœuds d'un système réticulaire. Dans cette théorie, les éléments de symétrie du corps étaient les éléments de symétrie communs à la molécule et au système réticulaire. Bien des corps cependant présentent des caractères en désaccord avec cette théorie, et ses partisans sont obligés d'admettre l'existence d'anomalies, de structures exceptionnelles. En 1879, M. Sohncke s'est efforcé de généraliser la théorie de Bravais et de faire disparaître ces exceptions; il remarqua que la définition de l'homogénéité de Bravais ne comportait nullement l'identité d'orientation de toutes les molécules, et, partant de là, il proposa une théorie dont la conséquence essentielle consiste en ce que les *axes de symétrie* ne dépendent que de la structure et n'existent pas dans la molécule; il distingua soixante-cinq types de structure possibles. Mais, dans la théorie de M. Sohncke comme dans celle de Bravais, l'existence d'un centre, d'un plan de symétrie dans le corps cristallisé nécessite la présence du même élément de symétrie dans la molécule. C'est alors que MM. v. Fedorow en Russie, Schœnflies en Allemagne, généralisèrent à leur tour la théorie de M. Sohncke et montrèrent que, en admettant l'existence de deux sortes de molécules, symétriques l'une de l'autre, tous les éléments de symétrie du corps cristallisé résultaient uniquement de la structure. Mais M. Schœnflies ne s'est pas contenté d'exposer ces résultats nouveaux; il a repris complètement la question et il nous expose dans son Livre toutes les parties de la cristallographie.

Dans un premier Chapitre, M. Schœnflies étudie les propriétés des polyèdres de dimensions finies et, en particulier, recherche leurs éléments de symétrie possibles. Comme M. C. Jordan et M. Sohnke, il définit la symétrie d'un polyèdre par la propriété de pouvoir être amené en coïncidence avec lui-même par un déplacement déterminé, par une opération de recouvrement. Une telle opération peut se décomposer en un certain nombre d'opérations élémentaires, qui sont la rotation (symétrie par rapport à un axe), l'inversion (symétrie par rapport à un centre), la réflexion (symétrie par rapport à un plan) et le *Drehspiegelung* (symétrie combinée relativement à un plan et à un axe perpendiculaire au plan). On peut être étonné de voir, parmi les opérations élémen-

taires, une opération résultant de la combinaison de deux autres opérations élémentaires. Et de fait, l'intervention de cette symétrie composée ne mène à aucune propriété nouvelle des polyèdres; elle n'a d'intérêt qu'au point de vue de l'exposition, en permettant de généraliser les définitions et les démonstrations.

Celles-ci sont nombreuses, peut-être trop nombreuses, dans les Chapitres qui suivent, où l'on trouve tous les théorèmes concernant les combinaisons d'opérations. La méthode de démonstration adoptée est fondée sur la théorie moderne des groupes d'opérations. Représentant une opération par une lettre, M. Schœnflies définit le produit de deux ou plusieurs opérations, la puissance d'une opération : faire le produit de deux opérations consiste à les effectuer successivement; on répète une opération n fois pour en obtenir la $n^{\text{ième}}$ puissance. C'est la terminologie habituelle de la théorie des groupes, théorie où les propositions se présentent sous une forme symbolique très générale, mais dont le symbolisme même a quelque chose d'artificiel, et où les démonstrations ont le tort de ne pas mettre toujours en évidence les rapports qui existent entre les prémisses et les conclusions des théorèmes.

Quoi qu'il en soit, s'appuyant sur les théorèmes démontrés, l'auteur définit le groupe fini d'opérations : c'est une série d'opérations en nombre fini, telles que le produit de deux d'entre elles soit équivalent à une autre opération de la série. Recherchant dans les Chapitres suivants les groupes possibles, il arrive à ce résultat important qu'il en existe trente-deux correspondant aux trente-deux classes de polyèdres déjà reconnues par M. Curie en France. Ces polyèdres sont ensuite groupés en systèmes, et les propriétés intéressant le cristallographe, et que l'on trouve dans les Ouvrages s'occupant de ce sujet, sont longuement exposées.

L'étude des polyèdres remplissant l'espace et, comme conséquence, la recherche de la structure moléculaire des cristaux, fait l'objet de la seconde Partie du Livre de M. Schœnflies. Le procédé d'investigation est toujours le même : il détermine encore ici les déplacements qui amènent la coïncidence du polyèdre avec lui-même; mais, outre les opérations qui interviennent dans le cas des polyèdres finis, on a à considérer trois opérations nouvelles :

la translation, la translation accompagnée d'une rotation autour d'un axe qui lui est parallèle, la translation accompagnée d'une réflexion sur un plan qui lui est parallèle.

Il s'agit de déterminer les différentes associations de ces opérations pouvant coexister dans un polyèdre; autrement dit, il faut rechercher les différents *Raumgruppe* possibles, en entendant par *Raumgruppe* une série, en nombre illimité, d'opérations telles que le produit de deux d'entre elles soit équivalent à une autre opération de la série.

Au lieu d'aborder le problème dans toute sa généralité, M. Schœnflies le subdivise; il considère d'abord les groupes ne comprenant que des translations et correspondant aux systèmes réticulaires de Bravais, dont il fait une étude complète. Puis il démontre que tous les groupes s'obtiennent en faisant le produit de ces groupes de translation avec les trente-deux groupes d'opérations qu'il a distingués dans sa première Partie.

Il arrive par ce procédé à distinguer deux cent trente groupes d'opérations correspondant à deux cent trente polyèdres remplissant l'espace et dont les sommets constituent autant de *systèmes réguliers de points*.

Pour pousser plus loin son étude, M. Schœnflies fait appel à une notion nouvelle. Remarquons d'abord qu'un point étant donné, si on le soumet à toutes les opérations d'un *Raumgruppe*, on obtiendra un système régulier de points qui sont dits *homologues* entre eux. Considérons maintenant ces points comme le centre de petites sphères qui se dilatent en se déformant, de façon à venir en contact les unes avec les autres, de telle sorte qu'elles ne laissent aucun vide entre elles et qu'en outre chacune d'elles ne renferme jamais deux points homologues. Sous ces deux conditions, l'espace sera divisé en parties, désignées sous le nom de *domaines fondamentaux*, ayant tous les mêmes dimensions, mais généralement de deux espèces, les domaines d'une espèce étant superposables entre eux et symétriques des domaines de l'autre espèce. La forme de ces domaines n'est pas déterminée; elle est simplement assujettie à la condition suivante : les axes de symétrie se trouvent dans les faces de ces domaines, faces qui coïncident avec les plans de symétrie. Mais, remarque importante, ces domaines fondamentaux peuvent être groupés de façon à consti-

tuer des domaines complexes possédant en partie ou en totalité les éléments de symétrie du *Raumgruppe*.

Deux mots suffisent maintenant pour exposer les idées de M. Schœnflies sur la structure des corps cristallisés. S'il s'agit d'un corps ne possédant ni plan ni centre de symétrie, il n'existe qu'une espèce de molécule, et chaque domaine fondamental renferme une molécule placée de telle sorte que les points homologues de ces molécules coïncident avec les points homologues des domaines. Si le corps possède un plan ou un centre de symétrie, il existe deux espèces de molécules symétriques l'une de l'autre, réparties dans les domaines symétriques, comme dans le cas précédent.

Il est bien difficile dans un résumé si court de faire ressortir l'importance d'un travail qui occupe 650 pages; ce qui frappe surtout dans l'étude de M. Schœnflies, c'est la généralité des résultats auxquels il arrive : sa théorie comprend comme cas particulier toutes les théories de ses prédécesseurs, celles de Bravais, de Wolff, de Sohncke. L'exposition pourra évidemment être perfectionnée, les théorèmes pourront être condensés et leur nombre en sera utilement diminué; mais, tant que l'hypothèse fondamentale sur la nature des corps cristallisés ne sera pas modifiée, la question si importante de la structure de ces corps pourra être considérée comme élucidée d'une façon définitive, au point de vue mathématique, grâce au travail de M. Schœnflies. WALLERANT.

WÖLFING (E.). — DIE SINGULÄREN PUNKTE DER FLÄCHEN. Habilitationschrift. 25 p. in-8°. Dresde, Teubner, 1896.

Le Travail de M. Wölfing a pour objet l'extension aux surfaces des règles classiques pour l'étude d'une courbe plane autour de l'origine des coordonnées; on suppose que celle-ci est un point multiple de la surface S. A chaque terme $Cx^a y^b z^c$ du premier membre de l'équation de cette surface correspond un point figuratif de coordonnées a, b, c : considérons un plan contenant au moins trois points figuratifs et tel qu'il laisse de côtés différents l'origine, d'une part, et, d'autre part, les points figuratifs qui ne

sont point situés sur lui; l'ensemble de ces plans déterminera une surface polyédrale qui est l'analogue du polygone de Newton. A chaque face de cette surface polyédrale correspond une surface *approchante,* dont on obtient l'équation en égalant à zéro les termes du premier membre de l'équation donnée dont les points figuratifs sont dans la face considérée, et en supprimant les facteurs communs en x, y, z. De même, les termes dont les points figuratifs sont sur une arête fournissent une surface *auxiliaire*.

Aux différentes faces ne correspondent nullement, en général, des nappes distinctes de la surface; celle-ci peut être successivement très voisine de deux des surfaces approchantes précédemment définies et le raccord se fait au moyen d'une surface auxiliaire. L'auteur substitue à la surface polyédrale un réseau sphérique plus aisé à se figurer, et montre en outre le parti que l'on peut tirer de la considération du cône tangent. Cette étude fournit naturellement des renseignements utiles pour la connaissance de l'intersection de deux surfaces. M. Wölfing termine par quelques applications numériques. J. T.

GAZZANIGA (P.). — LIBRO DI ARITHMETICA E DI ALGEBRA ELEMENTARE. 2e édition. 1 vol. in-8°, 328 p. R. Stab. P. Prosperini, Padoue, 1897.

Ce Volume contient un traité très complet d'Arithmétique et d'Algèbre élémentaires, et, en outre, des notions de Trigonométrie : l'exposition de ces éléments intéressera le lecteur par le caractère essentiellement logique qu'elle revêt; pour ce qui concerne le nombre entier par exemple, la définition des opérations fondamentales et la démonstration de leurs propriétés, l'auteur se place exclusivement au point de vue de von Helmholtz. Les théories des nombres fractionnaires, négatifs, irrationnels, etc., complexes sont présentées avec une grande rigueur. Enfin, l'auteur n'a pas craint de multiplier les exercices : on notera qu'il suppose ses lecteurs familiers avec les langues anciennes, car on rencontre des énoncés en vers latins et d'autres en grec. J. T.

MÉLANGES.

REMARQUE SUR LE GENRE DES INTÉGRALES ABÉLIENNES;

PAR M. DOLBNIA.

Dans l'article : *Sur la détermination du genre des intégrales abéliennes dépendant d'une équation algébrique binome* (¹), nous avons trouvé pour le genre N des intégrales abéliennes de la forme

$$j = \int \frac{\partial x}{\sqrt[m]{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\dots(x-l)^{\lambda}}},$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = km,$$

l'expression suivante

$$N = \frac{(m-1)(mk-2)}{2} - \frac{m}{2}\sum_{1}^{i}\frac{(m-1)p_i - q_i + 1}{q_i},$$

où

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{\alpha}{m}, \qquad \frac{p_2}{q_2} = \frac{\beta}{m}, \qquad \dots, \qquad \frac{p_i}{q_i} = \frac{\lambda}{m};$$

par conséquent

$$\sum_{1}^{i}\frac{p_i}{q_i} = \frac{\alpha+\beta+\dots+\lambda}{m} = k;$$

par conséquent

$$N = \frac{(m-1)(mk-2)}{2} - \frac{mk(m-1)}{2} + \frac{m}{2}\sum_{1}^{i}\frac{q_i - 1}{q_i},$$

ou

$$N = -m + 1 + \frac{m}{2}\sum_{1}^{i}\frac{q_i - 1}{q_i}.$$

Comme q_i est un diviseur de m, nous avons

$$m = \rho_i q_i;$$
$$N = \sum \frac{\rho_i(q_i - 1)}{2} - m + 1.$$

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1895.

Nous avons obtenu, pour le genre N, une formule tout à fait identique à la formule de Riemann [1].

SUR LES SURFACES MINIMA APPLICABLES SUR DES SURFACES DE RÉVOLUTION OU SUR DES SURFACES SPIRALES;

Par M. A. DEMOULIN,
Répétiteur à l'Université de Gand.

Ce travail est divisé en trois paragraphes.

Dans le § I, nous démontrons une propriété dont jouissent seules, parmi les surfaces minima, celles qui sont applicables sur des surfaces de révolution.

La recherche de ces surfaces fait l'objet du § II. On possède déjà plusieurs solutions de ce problème, et notamment celle de M. Schwarz [2]. Par une méthode nouvelle, nous obtenons, outre les surfaces connues, d'autres surfaces, au reste imaginaires : elles correspondent à un cas particulier dont l'examen a été négligé par les auteurs qui se sont occupés de la question.

Enfin, le § III est consacré à la recherche des surfaces minima applicables sur des surfaces spirales. Nous y sommes conduit, presque sans calcul, par l'application des formules du paragraphe précédent. Ici encore, à côté des surfaces réelles, déterminées par M. Lie, nous trouvons des surfaces imaginaires, dont l'existence a d'ailleurs été signalée par M. Lie lui-même [3].

I.

Désignons, d'une manière générale, par (M) une surface minima et par (Γ) une congruence qui admet cette surface comme enveloppée moyenne. A une droite quelconque (D) de la congruence, faisons correspondre le point de contact M de la surface

(1) *Gesammelte Werke*, p. 106.

(2) *Journal de Crelle*, t. 80, p. 296; 1875. — *Voir* aussi G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, Ire Partie, p. 335.

(3) *Mathematische Annalen*, t. XV, p. 506; 1879.

et du plan mené, perpendiculairement à (D), par le milieu O du segment focal.

Cela posé, est-il possible de choisir la surface (M) et la congruence (Γ) de telle manière qu'aux lignes de courbure de la surface correspondent les développables de la congruence?

Cette congruence, si elle existe, sera nécessairement formée des normales d'une surface et ses développables auront même représentation sphérique que les lignes de courbure de la surface (M) ou que les lignes asymptotiques de la surface minima (M_1), adjointe de (M). Par suite, en vertu d'un théorème connu [1], la surface (M_1) et la surface (O), lieu du point O, se correspondront avec orthogonalité des éléments. D'un autre côté, les surfaces (M) et (M_1) se correspondent également avec orthogonalité des éléments. Concluons de là que deux éléments correspondants des surfaces (M) et (O) et la normale en M sont parallèles à un même plan. Or nous avons démontré ailleurs [2] ce théorème :

Pour qu'une surface soit applicable sur une surface de révolution, il faut et il suffit qu'il existe, dans le plan tangent en chaque point M *de cette surface, un point* O *tel que les déplacements infiniment petits des points* M *et* O *et la normale en* M *soient parallèles à un même plan. L'élément linéaire ayant été ramené à la forme*

$$ds^2 = d\alpha^2 + A(\alpha)\, d\beta^2,$$

les droites MO *seront tangentes aux lignes* $\beta =$ const. *et l'on aura*

$$MO = m\sqrt{A(\alpha)},$$

m désignant une constante.

De là résulte la propriété suivante :

Pour qu'une surface minima soit l'enveloppée moyenne d'une congruence, de telle manière que les développables de la congruence correspondent aux lignes de courbure de la

(1) G. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, IVe Partie, p. 61.
(2) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXII, p. 47; 1894.

surface, il faut et il suffit que cette dernière soit applicable sur une surface de révolution.

II.

Soient

$$x = \int A_1(\alpha)\,d\alpha + \int B_1(\beta)\,d\beta,$$
$$y = \int A_2(\alpha)\,d\alpha + \int B_2(\beta)\,d\beta,$$
$$z = \int A_3(\alpha)\,d\alpha + \int B_3(\beta)\,d\beta$$

les expressions des coordonnées de la surface minima la plus générale. Les fonctions A_i et B_i satisfont aux relations

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = 0,$$
$$B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 = 0.$$

L'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = 2(A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3)\,d\alpha\,d\beta.$$

Or, par un choix convenable des variables, tout ds^2 de révolution s'écrit

$$ds^2 = 2f(\alpha - \beta)\,d\alpha\,d\beta.$$

On obtiendra dès lors toutes les surfaces minima applicables sur des surfaces de révolution en résolvant l'équation

$$A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = f(\alpha - \beta),$$

ou son équivalente

$$(1) \qquad A_1 B_1' + A_2 B_2' + A_3 B_3' + A_1' B_1 + A_2' B_2 + A_3' B_3 = 0.$$

Cette équation peut être interprétée géométriquement. Soient (A) la droite de coordonnées A_1, A_2, A_3, A_1', A_2', A_3' et (B) la droite de coordonnées B_1, B_2, B_3, B_1', B_2', B_3'. Ces droites sont isotropes et engendrent deux séries réglées (Σ_a) et (Σ_b). Or l'équation (1) montre que deux droites appartenant l'une à la série (Σ_a), l'autre à la série (Σ_b) se rencontrent. Par suite, les droites (A) et

(B) sont les génératrices des deux systèmes d'une sphère (Σ), qui peut se réduire à un cône isotrope.

En exprimant ce résultat par l'Analyse, on obtiendra les équations différentielles dont dépendent les fonctions A_i et B_i.

Soit

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \tag{2}$$

l'équation de la sphère (Σ).

La droite (A) a pour équations

$$\begin{aligned} y A_3 - z A_2 &= A'_1,\\ z A_1 - x A_3 &= A'_2,\\ x A_2 - y A_1 &= A'_3. \end{aligned}$$

Pour la facilité des calculs, écrivons les deux premières de la manière suivante

$$\left\{\begin{aligned} (y-b)A_3 - (z-c)A_2 &= u,\\ (z-c)A_1 - (x-a)A_3 &= v, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

en posant

$$\begin{aligned} A'_1 - b A_3 + c A_2 &= u,\\ A'_2 - c A_1 + a A_3 &= v. \end{aligned}$$

Portons, dans l'équation (2), les valeurs de $x-a$ et de $y-b$ tirées des équations (3); la droite (A) appartenant à la sphère, l'équation en z résultante devra avoir lieu identiquement; de là ces deux équations

$$\begin{aligned} u &= \pm R i A_1,\\ v &= \pm R i A_2. \end{aligned}$$

Posant $Ri=k$ et choisissant le signe $+$, on trouve finalement les équations auxquelles satisfont les fonctions A_1, A_2, A_3 :

$$\left\{\begin{aligned} A'_1 &= k A_1 - c A_2 + b A_3,\\ A'_2 &= c A_1 + k A_2 - a A_3,\\ A_1^2 &+ A_2^2 + A_3^2 = 0. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Quant aux fonctions B_1, B_2, B_3, elles sont définies par les équations

$$\begin{aligned} B'_1 &= -k B_1 - c B_2 + b B_3,\\ B'_2 &= c B_1 - k B_2 - a B_3,\\ B_1^2 &+ B_2^2 + B_3^2 = 0, \end{aligned}$$

qu'on déduit des précédentes en changeant k en $-k$.

Pour intégrer le système (4), posons

$$(5)\qquad \begin{cases} A_1 = e^{\rho}\,\mathrm{Ch}\,\omega, \\ A_2 = ie^{\rho}\,\mathrm{Sh}\,\omega, \\ A_3 = ie^{\rho}. \end{cases}$$

La troisième équation est vérifiée identiquement et les deux premières conduisent aux suivantes :

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\omega}{d\alpha} = -ci - a\,\mathrm{Ch}\,\omega - bi\,\mathrm{Sh}\,\omega, \\ \dfrac{d\rho}{d\alpha} = k + bi\,\mathrm{Ch}\,\omega + a\,\mathrm{Sh}\,\omega. \end{cases}$$

Nous simplifierons ces équations par un choix convenable des axes. A cet effet, observons que, si l'on fait tourner le trièdre de référence autour de l'origine, la sphère (Σ) conservera une position invariable dans l'espace. Cela posé, deux cas sont à distinguer suivant que la droite (Δ), qui joint l'origine des coordonnées au centre de la sphère, est isotrope ou non.

Premier cas : *La droite* (Δ) *n'est pas isotrope.* — Prenons cette droite comme nouvel axe des z; il en résulte $a = b = 0$, et les équations ci-dessus deviennent

$$\frac{d\omega}{d\alpha} = -ci, \qquad \frac{d\rho}{d\alpha} = k.$$

On en déduit

$$\omega = -ci\alpha, \qquad \rho = k\alpha.$$

Portant ces valeurs de ω et ρ dans les formules (5), on trouve

$$(7)\qquad \begin{cases} A_1 = e^{k\alpha}\cos c\alpha, \\ A_2 = e^{k\alpha}\sin c\alpha, \\ A_3 = ie^{k\alpha}, \end{cases}$$

puis, par le changement de α en β et de k en $-k$,

$$(8)\qquad \begin{cases} B_1 = e^{-k\beta}\cos c\beta, \\ B_2 = e^{-k\beta}\sin c\beta, \\ B_3 = ie^{-k\beta}. \end{cases}$$

Telles sont les six fonctions qui caractérisent les surfaces cherchées.

Soient $F(u)$, $F_1(u_1)$ les fonctions de Weierstrass relatives à ces surfaces.

Pour déterminer $F(u)$, on a les équations compatibles

$$e^{k\alpha} \cos c\alpha \, d\alpha = \frac{1-u^2}{2} F(u) \, du,$$

$$e^{k\alpha} \sin c\alpha \, d\alpha = i \frac{1+u^2}{2} F(u) \, du,$$

$$i e^{k\alpha} \, d\alpha = u F(u) \, du,$$

qui donnent

$$F(u) = C u^{\frac{k}{ic}-2} = C u^{\frac{R}{c}-2},$$

ou, en posant $\frac{R}{c} - 2 = m$,

$$F(u) = C u^m.$$

Par un calcul tout semblable, on trouve

$$F_1(u_1) = C_1 u_1^m.$$

Ce sont les expressions obtenues par M. Schwarz.

Si la surface est réelle, la sphère (Σ) le sera également et l'exposant m sera réel. En particulier, si $m = -2$, la sphère (Σ) sera de rayon nul. On sait que cette valeur de m correspond aux surfaces minima hélicoïdes.

Exprimé au moyen des variables α et β, l'élément linéaire des surfaces satisfaisantes est donné, à un facteur constant près, par la formule

$$(9) \qquad ds^2 = e^{k(\alpha-\beta)} [\cos c(\alpha - \beta) - 1] \, d\alpha \, d\beta.$$

Second cas : *La droite* (Δ) *est isotrope.* — Prenons, comme plan des xy, le plan réel déterminé par cette droite et par son imaginaire conjuguée. Nous aurons alors $a = bi$, $c = 0$ et les équations (6) deviendront

$$\frac{d\omega}{d\alpha} = -a e^{\omega},$$

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = k + a e^{\omega}.$$

On en conclut

$$e^{\omega} = \frac{1}{a\alpha}, \qquad \rho = k\alpha + \log a\alpha,$$

d'où

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}\,a\alpha e^{k\alpha}\left(\frac{1}{a\alpha}+a\alpha\right),\\ A_2 &= \frac{1}{2}\,ia\alpha\, e^{k\alpha}\left(\frac{1}{a\alpha}-a\alpha\right),\\ A_3 &= ia\alpha e^{k\alpha}. \end{aligned}\right.$$

On a de même

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{2}\,a\beta e^{-k\beta}\left(\frac{1}{a\beta}+a\beta\right),\\ B_2 &= \frac{1}{2}\,ia\beta\, e^{-k\beta}\left(\frac{1}{a\beta}-a\beta\right),\\ B_3 &= ia\beta e^{-k\beta}. \end{aligned}\right.$$

Les fonctions de Weierstrass correspondantes sont

$$(12)\qquad F(u) = Ce^{mu}, \qquad F_1(u_1) = C_1\frac{e^{\frac{m}{u_1}}}{u_1^4},$$

pourvu qu'on pose $\frac{k}{ai} = m$.

Quant au ds^2, exprimé au moyen des variables α, β, il s'écrit

$$(13)\qquad ds^2 = e^{k(\alpha-\beta)}(\alpha-\beta)^2\,d\alpha\,d\beta.$$

On déduit ce ds^2 du ds^2 (9) en divisant ce dernier par c^2 et en faisant tendre c vers 0.

Parmi les surfaces définies par les formules (12) se trouve notamment la surface minima réglée imaginaire, laquelle est du troisième ordre. Elle a pour fonctions caractéristiques :

$$F(u) = 1, \qquad F_1(u_1) = -\frac{1}{u_1^4}.$$

III.

Par un choix convenable des variables, le ds^2 de toute surface applicable sur une surface spirale peut être mis sous la forme [1]

$$ds^2 = e^{2u}\,V(v)(du^2+dv^2),$$

---

(1) G. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, 1re Partie, p. 110.

ou, en posant $u + iv = \alpha$, $u - iv = \beta$,

$$ds^2 = 2e^{\alpha+\beta} f(\alpha - \beta)\, d\alpha\, d\beta. \tag{14}$$

Pour obtenir toutes les surfaces minima applicables sur des surfaces spirales, il suffira donc de résoudre l'équation

$$A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = e^{\alpha+\beta} f(\alpha - \beta),$$

que nous écrirons

$$A_1 e^{-\alpha} B_1 e^{-\beta} + A_2 e^{-\alpha} B_2 e^{-\beta} + A_3 e^{-\alpha} B_3 e^{-\beta} = f(\alpha - \beta).$$

Or cette équation exprime que la surface minima de coordonnées

$$x = \int A_1 e^{-\alpha}\, d\alpha + \int B_1 e^{-\beta}\, d\beta,$$

$$y = \int A_2 e^{-\alpha}\, d\alpha + \int B_2 e^{-\beta}\, d\beta,$$

$$z = \int A_3 e^{-\alpha}\, d\alpha + \int B_3 e^{-\beta}\, d\beta$$

est applicable sur une surface de révolution.

Par conséquent, à toute surface minima applicable sur une surface de révolution correspond une surface minima applicable sur une surface spirale, et si la première est caractérisée par les fonctions A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, on obtiendra les fonctions caractéristiques de la seconde en multipliant les fonctions A_i par e^α et les fonctions B_i par e^β. Cela revient à remplacer, dans les expressions (7) et (10) des fonctions A_i, k par $k+1$ et dans les expressions (8) et (11) des fonctions B_i, k par $k-1$. Cette substitution peut être faite dans les expressions des fonctions $F(u)$, $F_1(u_1)$, et elle conduit aux résultats suivants :

A la surface minima réelle définie par les fonctions

$$F(u) = C u^{\frac{k}{ic} - 2}, \qquad F_1(u_1) = C_1 u_1^{\frac{k}{ic} - 2}$$

correspond la surface minima réelle caractérisée par les fonctions

$$F(u) = C e^{\frac{k+1}{ic} - 2}, \qquad F_1(u_1) = C_1 u_1^{\frac{k-1}{ic} - 2}.$$

Remplaçons, dans ces formules, k par $\mathrm{R}i$, il viendra

$$F(u) = C u^{\frac{R}{c} - 2 - \frac{i}{c}}, \qquad F_1(u_1) = C_1 u_1^{\frac{R}{c} + 2 - \frac{i}{c}},$$

ou encore, m_1 et n_1 étant réels,

$$F(u) = C u^{m_1 + i n_1}, \qquad F_1(u_1) = C_1 u_1^{m_1 - i n_1}.$$

C'est le résultat obtenu par M. Lie.

Quant aux fonctions

$$F(u) = C e^{\frac{ku}{ai}}, \qquad F_1(u_1) = C_1 \frac{e^{\frac{k}{aiu_1}}}{u_1^4},$$

il leur correspond les suivantes :

$$F(u) = C e^{\frac{(k+1)u}{ai}}, \qquad F_1(u_1) = C_1 \frac{e^{\frac{k-1}{aiu_1}}}{u_1^4}$$

qui s'écrivent, m et m' étant des constantes arbitraires,

$$F(u) = C e^{mu}, \qquad F_1(u_1) = C_1 \frac{e^{\frac{m'}{u_1}}}{u_1^4}.$$

Pour obtenir les ds^2 de ces deux classes de surfaces, il faut, d'après la formule (14), multiplier les ds^2 (9) et (13) par $e^{\alpha+\beta}$.

Observons, en terminant, que la méthode suivie dans ce paragraphe permet de déterminer toutes les surfaces minima d'élément linéaire

$$ds^2 = A(\alpha)\, B(\beta)\, f(\alpha - \beta)\, d\alpha\, d\beta,$$

$A(\alpha)$ et $B(\beta)$ étant des fonctions données de leurs arguments respectifs.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

L. BIANCHI, Professore ordinario di Geometria analitica nella R. Università di Pisa. LEZIONI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE. Gr. in-8°, VIII-542 p. Pise. E. Spoerri, 1894.

Nous sommes bien en retard avec cet excellent Ouvrage; il est de ceux, heureusement, qui n'ont pas besoin de recommandation et qui reçoivent immédiatement du public compétent l'accueil dû à leur mérite et à leur valeur. L'auteur se trouvait d'ailleurs dans les meilleures conditions pour le produire; non seulement il a apporté par ses travaux de très importantes contributions à plusieurs Chapitres de la Géométrie infinitésimale, mais, de plus, chargé depuis longtemps d'enseigner, à l'Université de Pise, la Géométrie supérieure, il avait, dès 1886, publié un résumé autographié de ses leçons; la pratique de son enseignement, les récents progrès de la théorie lui ont permis d'améliorer sa première rédaction et de la conduire au point où nous la voyons aujourd'hui. Nous allons rapidement indiquer la méthode qu'il a suivie et les sujets qu'il a traités successivement.

La méthode d'abord : elle procède des *Disquisitiones generales circa superficies Curvas* de Gauss, et elle consiste à rattacher la Géométrie infinitésimale à l'étude d'une forme quadratique ou de deux formes quadratiques simultanées de différentielles. Aussi, après un premier Chapitre où sont exposées les propriétés des courbes à double courbure relatives à la courbure, à la sphère osculatrice et à la torsion, un second Chapitre fait connaître au lecteur les éléments essentiels de la théorie des formes quadratiques de différentielles. M. Bianchi y définit les paramètres différentiels du premier et du second ordre d'une forme différentielle quadratique, les symboles de M. Christoffel à trois et à quatre indices; il y traite aussi de l'équivalence de deux formes quadratiques et introduit différentes formes covariantes, dont l'emploi permet de donner plus d'élégance aux formules et aussi de conserver souvent les coordonnées curvilignes les plus générales, dans l'étude de différentes questions. Ces deux premiers Chapitres constituent, en quelque sorte, une introduction qu'il faut

lire avec grand soin, si l'on veut bien comprendre la suite de l'Ouvrage.

Le Chapitre III traite des coordonnées curvilignes sur les surfaces et de la représentation conforme. L'auteur y fait connaître les formules les plus élémentaires relatives aux coordonnées curvilignes, les propriétés des systèmes isothermes ou isométriques, leur détermination sur les surfaces de révolution; il termine en étudiant les projections stéréographiques et en montrant, d'après Cayley, que le mouvement d'une sphère sur elle-même se représente par une substitution linéaire à coefficients constants.

Le Chapitre IV est intitulé : *Formules fondamentales de la théorie des surfaces*. M. Bianchi y suit le Mémoire de Gauss, il introduit d'abord les deux formes quadratiques fondamentales

$$\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2, \quad \mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2,$$

établit les relations entre leurs coefficients, démontre ensuite que ces relations sont à la fois nécessaires et suffisantes; il montre en terminant comment on peut rattacher à la considération des deux formes précédentes la théorie des lignes de courbure, la démonstration des théorèmes d'Euler et de Meusnier, le théorème célèbre de Gauss sur la courbure totale et enfin la théorie de l'indicatrice de Dupin ainsi que l'étude des lignes asymptotiques.

Le Chapitre V traite de la représentation sphérique de Gauss et des coordonnées tangentielles. Nous y remarquons le théorème de Bonnet et d'Enneper relatif à la torsion des lignes asymptotiques, l'étude d'une surface rapportée à ses lignes asymptotiques, les formules de M. Lelieuvre.

Le Chapitre VI traite de la courbure géodésique et des lignes géodésiques. On y trouve l'élégante formule de Bonnet, qui fait connaître la courbure géodésique, le théorème de Gauss sur la courbure totale d'un triangle géodésique, l'étude de l'élément linéaire de Liouville $ds^2 = (\mathrm{U} - \mathrm{V})(du^2 + dv^2)$, celle du théorème de M. Weingarten relatif au système double orthogonal formé sur une surface quelconque par deux familles d'ellipses et d'hyperboles géodésiques.

Le Chapitre VII contient les théorèmes fondamentaux relatifs aux surfaces applicables. En dehors de ces propositions, nous y signalerons le théorème de Bour relatif aux hélicoïdes applicables

sur des surfaces de révolution, la formation de l'équation aux dérivées partielles du second ordre dont dépend le problème de la déformation.

Le Chapitre VIII traite de la déformation des surfaces réglées. On y fait connaître les principaux résultats de Chasles, de Bonnet, de Minding et de M. Beltrami.

Le Chapitre IX introduit la considération de la surface des centres de courbure et les théorèmes qui s'y rapportent et qui sont dus à M. Weingarten. On y trouve commencée l'étude des surfaces W, dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un et l'autre. Les deux nappes de la surface des centres d'une surface W sont, l'une et l'autre, applicables sur des surfaces de révolution. Cela a permis à M. Bianchi d'associer à toute surface applicable sur une surface de révolution une autre surface qui s'en déduit géométriquement de la manière la plus simple et qui, elle aussi, est applicable sur une surface de révolution; nous l'appellerons *la complémentaire* de la première. L'étude du cas où la première surface est la *pseudosphère* a fourni à M. Bianchi une de ses plus belles découvertes; la surface complémentaire peut alors être aussi une pseudosphère. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

Le Chapitre X traite de la théorie infinitésimale des congruences rectilignes, on y trouvera les congruences isotropes de Ribaucour, le théorème de Malus-Dupin, les congruences de M. Guichard. Cette théorie repose encore sur la considération de deux formes quadratiques fondamentales.

Les Chapitres XI et XII traitent de la déformation infiniment petite des surfaces et de la correspondance avec orthogonalité des éléments, ils contiennent les résultats essentiels relatifs à une théorie qui nous paraît appelée à jouer un rôle de plus en plus important dans les différentes branches de la Géométrie infinitésimale.

Le Chapitre XIII contient l'étude d'une des plus belles découvertes de Ribaucour : celle des systèmes cycliques, c'est-à-dire des congruences formées de cercles normaux à une infinité de surfaces.

Le Chapitre XIV est intitulé : *Les surfaces d'aire minima.*

Il repose sur les formules de Weierstrass et contient aussi les célèbres formules de M. Schwarz, avec différentes applications.

Le Chapitre XV traite du problème de Plateau et de la surface minima qui contient deux couples d'arêtes opposées d'un tétraèdre régulier. L'auteur y étudie le groupe des mouvements de l'espace qui laissent invariable une telle surface et l'effet que produisent ces mouvements sur la surface adjointe, il termine en démontrant le théorème de M. Schwarz relatif à la variation seconde d'une portion limitée de surface minima.

Le Chapitre XVI traite de la représentation conforme de la surface pseudosphérique sur un demi-plan. Cela permet à l'auteur d'exposer les propriétés des géodésiques, la trigonométrie pseudosphérique, et d'indiquer comment toute cette étude se rattache à celle de la Géométrie non-euclidienne. M. Bianchi fait connaître aussi la représentation de M. Beltrami, ainsi que les recherches de l'éminent géomètre relatives à la représentation géodésique d'une surface sur le plan. Tous ces développements permettent d'aborder, dans le Chapitre suivant, l'étude des transformations des surfaces à courbure constante. M. Bianchi y expose, en même temps que celles des autres géomètres, les très importantes recherches qu'on lui doit sur ce sujet très difficile; elles ont pour origine la transformation qui porte son nom.

Les trois Chapitres qui terminent l'Ouvrage contiennent le résumé de la théorie des coordonnées curvilignes orthogonales et des systèmes triples orthogonaux. On y trouvera : le théorème de Dupin et sa réciproque, les formules fondamentales de Lamé, le théorème de Liouville relatif à la représentation conforme de l'espace, celui de Combescure relatif aux systèmes triples qui admettent même représentation sphérique qu'un système donné; l'application de la théorie générale aux surfaces homofocales du second degré ainsi qu'à la recherche, entièrement due à l'auteur, d'un système triple comprenant une famille de surfaces à courbure constante. Cette recherche, qui avait été suggérée à M. Bianchi par l'étude d'un beau théorème de M. Weingarten dont on retrouve le nom dans toutes les parties de la Géométrie infinitésimale, est couronnée de succès et permet d'établir l'existence d'un système triple qui dépend de cinq fonctions arbitraires d'une

variable indépendante. Un tel système peut comprendre une surface à courbure constante quelconque; c'est dire qu'on ne peut le déterminer par des formules finies.

Ce résumé rapide montre assez que l'auteur a su comprendre, dans son exposition, les parties les plus importantes et les plus intéressantes de la Géométrie infinitésimale. Si nous ajoutons que cette exposition est clairement et nettement ordonnée, que l'auteur domine entièrement son sujet, nous en aurons assez dit pour expliquer et pour justifier le succès avec lequel a été accueilli l'Ouvrage de M. Bianchi. G. D.

MÉLANGES.

SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DES RÉGIONS, ET DES COURBES QUI LES REMPLISSENT;

Par M. Ernest CESÀRO.

On doit à M. Peano (¹) l'exemple d'une courbe continue, qui *passe par tous les points d'un carré.* Si l'on pose

$$f_n(t) = \left([3^n t] - 3[3^{n-1} t] - 1\right)(-1)^{[3t] + [3^3 t] + \ldots + [3^{n-1} t]},$$

la courbe dont il s'agit peut être représentée par les équations

$$(1)\qquad x = \sum_{n=1}^{n=\infty} 3^{-n} f_{2n-1}(t), \qquad y = \sum_{n=1}^{n=\infty} 3^{-n} f_{2n}(t),$$

en prenant comme axes les droites qui joignent les milieux des côtés opposés du carré. Nous ne savons pas si l'on a trouvé d'autres courbes, même discontinues, jouissant de cette curieuse propriété; mais nous croyons devoir en signaler une, dont le défaut de continuité est, pour ainsi dire, compensé par le fait suivant, qui semble paradoxal au premier abord : pendant qu'un certain paramètre varie, *aussi peu qu'on le veut,* le point qui

---

(¹) *Mathematische Annalen,* p. 157; 1890.

décrit la courbe reprend, *une infinité de fois,* toute position, fixée à l'avance dans un carré.

Nous ferons d'abord remarquer qu'il est beaucoup plus facile de trouver des courbes, obligées seulement à *passer dans le domaine de tous les points d'une aire.* Il est évident, par exemple, que cette propriété appartient à toute épicycloïde, à moins que la circonférence mobile ne soit commensurable avec la circonférence fixe; elle appartient aussi à la trajectoire d'une bille, lancée, dans certaines conditions [1], sur un billard rectangulaire; ou, plus simplement, à la route qu'elle suit sur un billard circulaire, lorsqu'elle est lancée sous un angle incommensurable avec π; etc. A ces exemples, connus, nous allons en ajouter un autre, très intéressant, qui se rattache aux propriétés de la fonction

$$(2) \qquad \varpi(x) = \lim_{n=\infty} \frac{[2^n x] - [2x] - [2^2 x] - \ldots - [2^{n-1} x]}{n}.$$

On voit aisément que cette fonction exprime la *fréquence du chiffre* 1 *dans la représentation de x selon le système binaire.* Soit, en effet, dans ce système,

$$x = [x], c_1 c_2 c_3 \ldots,$$

où le $n^{\text{ième}}$ chiffre est 0 ou 1 suivant que $[2^n x]$ est pair ou impair. On a aussi

$$c_n = [2^n x] - 2[2^{n-1} x],$$

puis, au lieu de (2),

$$(3) \qquad \varpi(x) = \lim_{n=\infty} \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n}{n}.$$

Il en résulte que l'on peut altérer comme on veut la partie entière de x, et les ν premiers chiffres de la partie fractionnaire, ν étant même très grand, mais *fini,* sans que $\varpi(x)$ change de valeur. Il est donc évident que cette fonction revient à la même valeur une infinité de fois; mais il importe de faire voir qu'*elle peut prendre toute valeur comprise entre* 0 *et* 1. En effet, une telle valeur peut être toujours considérée comme limite d'une

(1) *Intermédiaire des Mathématiciens,* p. 429; 1895

succession de nombres positifs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, inférieurs à l'unité. Or, si $i_1, i_2, i_3, \ldots$ est une succession *quelconque* de nombres entiers, qui vont en croissant au delà de toute limite, et si l'on pose $j_n = [i_n \alpha_n]$, on a, pour n infini,

$$\lim \frac{j_n}{i_n} = \lim \frac{[i_n \alpha_n]}{i_n} = \lim \alpha_n = \varpi.$$

Cela étant, construisons un nombre, dans le système binaire, en prenant arbitrairement la partie entière et les ν premiers chiffres de la partie fractionnaire, et déterminons les chiffres suivants par groupes de $i_1, i_2, i_3, \ldots$ chiffres, de façon qu'il y en ait seulement j_1 égaux à l'unité dans le premier groupe, j_2 dans le deuxième, etc. La probabilité de rencontrer 1 parmi les chiffres qui viennent après le $\nu^{\text{ième}}$, lorsqu'on s'arrête à un terme quelconque du $n^{\text{ième}}$ groupe, est comprise entre les nombres

$$(4) \qquad \frac{j_1 + j_2 + j_3 + \ldots + j_{n-1}}{i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_n}, \qquad \frac{j_1 + j_2 + j_3 + \ldots + j_n}{i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_{n-1}},$$

qui tendent, pour n infini, vers les limites

$$\lim \frac{j_{n-1}}{i_n} = k\varpi, \qquad \lim \frac{j_n}{i_{n-1}} = \frac{\varpi}{k},$$

en supposant que le rapport de deux termes consécutifs, dans la succession des nombres i, tende vers une limite k. Il suffit que k soit égal à l'unité (ce qu'on obtiendra en prenant, si l'on veut, $i_n = n$, ou bien $i_n = n^2$, etc.) pour être certain que le nombre x, ainsi construit, fera prendre à $\varpi(x)$ la valeur assignée à l'avance entre 0 et 1. Il y a plus : fixons, au hasard, un nombre a; puis, étant donné un nombre positif ε, arbitrairement petit, prenons ν suffisamment grand pour que 2^ν surpasse $\frac{1}{\varepsilon}$. Si, en construisant x comme on vient de le dire, on a soin de donner à ce nombre la même partie entière, et les ν premiers chiffres de la partie fractionnaire de a, il est évident que x tombera entre $a - \varepsilon$ et $a + \varepsilon$. C'est donc *dans le domaine de toute valeur de x* que la fonction ϖ prend, une infinité de fois, toutes les valeurs comprises entre 0 et 1.

Il faut toutefois remarquer que nous sommes bien loin d'avoir défini la fonction ϖ pour toutes les valeurs de x. La construction

même, que nous avons donnée plus haut, nous fait prévoir que l'on doit trouver dans tout intervalle une infinité de valeurs de x, pour lesquelles le second membre de (2) ou de (3) n'existe pas. Pour en être sûr il faut remplacer les fractions (4) par d'autres, dont les limites puissent être indéfiniment approchées par

$$(5)\qquad \frac{1}{n}(c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n),$$

lorsqu'on dispose des nombres i de manière que cette fraction ne cesse jamais d'osciller dans un certain intervalle. Il suffit d'accumuler les j_n chiffres 1 du $n^{\text{ième}}$ groupe à la fin ou au commencement de ce groupe, en s'arrêtant au dernier 0 dans le premier cas, et au dernier chiffre 1 dans le second, pour donner à 1, à mesure que n croît, la plus petite ou la plus grande fréquence possible. De cette façon, on est conduit à remplacer les fractions (4) par les suivantes

$$\frac{j_1 + j_2 + j_3 + \ldots + j_{n-1}}{i_1 + i_2 + \ldots + i_n - j_n}, \qquad \frac{j_1 + j_2 + j_3 + \ldots + j_n}{i_1 + i_2 + \ldots + i_{n-1} + j_n},$$

dont les limites sont

$$\lambda = \frac{\varpi}{1 + \lim \dfrac{i_n - j_n}{i_1 + i_2 + \ldots + i_{n-1}}}, \qquad \mu = \frac{\varpi}{1 - \lim \dfrac{i_n - j_n}{i_1 + i_2 + \ldots + i_n}}.$$

D'ailleurs

$$\lim \frac{i_n - j_n}{i_1 + i_2 + \ldots + i_{n-1}} = \lim \frac{i_n - j_n}{i_n} \lim \frac{i_n - i_{n-1}}{i_{n-1}} = (1 - \varpi)\left(\frac{1}{k} - 1\right),$$

$$\lim \frac{i_n - j_n}{i_1 + i_2 + \ldots + i_n} = \lim \frac{i_n - j_n}{i_n} \lim \frac{i_n - i_{n-1}}{i_n} = (1 - \varpi)(1 - k).$$

Donc

$$\lambda = \frac{k\varpi}{1 - (1 - k)\varpi}, \qquad \mu = \frac{\varpi}{k + (1 - k)\varpi}.$$

Tant que ϖ est un nombre positif, inférieur à l'unité, on ne peut avoir $\lambda = \mu$ que pour $k = 1$. Il en résulte que, si l'on fait croître les nombres i assez rapidement pour que k soit inférieur à l'unité, la fraction (5) relative à une infinité de nombres, aussi rapprochés qu'on le veut, oscille toujours dans l'intervalle (λ, μ) sans

tendre, pour aucun d'eux, vers une limite déterminée. On peut même faire en sorte que ces oscillations aient lieu dans toute l'étendue de l'intervalle (o, 1) : il suffit que k soit nul, ce qu'on peut réaliser en prenant, par exemple, $i_n = n!$, ou $i_n = n^n$, etc. Les chiffres 1 tendront ainsi à devenir, tour à tour, infiniment rares et infiniment fréquents.

Pour *un même* nombre x, les oscillations sont limitées à une partie de (λ, μ), par exemple à (λ, ϖ) pour les nombres construits comme il a été dit plus haut, en premier lieu, et à (ϖ, μ) pour les autres; mais on peut toujours leur donner une ampleur, aussi voisine de 1 qu'on le désire, en prenant $k = 0$ et ϖ très près de o ou de 1. Remarquons, pour finir, que l'on a $\lambda = \mu$, quelle que soit la valeur positive attribuée à k, lorsque la valeur de ϖ est une de celles que l'on a commencé par exclure, à savoir o ou 1. Il semble donc que la fonction $\varpi(x)$ passe par ces valeurs plus fréquemment que par toute autre. Nous pourrions d'ailleurs lui imposer une valeur arbitraire toutes les fois que la définition (2) vient à manquer; mais cela n'est pas indispensable pour le but que nous avons en vue.

On se rend compte autrement des propriétés qui précèdent en remarquant que $\varpi(x)$ est, pour ainsi dire, une fonction *à période infiniment petite*. En effet

$$\varpi(x) = \varpi\left(x - \frac{1}{2}\right) = \varpi\left(x + \frac{1}{4}\right) = \ldots . \tag{6}$$

La fonction admet donc une infinité de périodes, mais aucune d'elles ne peut être considérée comme *simple*, puisque sa moitié est encore une période. Il faut bien se garder d'appliquer les égalités (6) une infinité de fois, en partant d'une valeur donnée de x, sans quoi on arriverait à la conclusion que ϖ est une constante. Comme conséquence et généralisation des égalités (6) on doit se borner à écrire $\varpi(x) = \varpi(x + \omega)$, pour tous les nombres ω, susceptibles d'être représentés par une succession limitée de chiffres dans le système binaire. Effectivement l'addition d'un tel nombre à x ne peut altérer qu'un nombre *fini* de chiffres, d'où il suit, en vertu de (3), que la valeur de ϖ reste la même. Remarquons, en passant, que ce n'est pas le seul cas où cela arrive, car on a aussi $\varpi(x) = \varpi(2x) = \varpi(4x) = \ldots$ D'ailleurs il n'est pas

nécessaire de recourir à l'interprétation de ϖ comme probabilité d'un événement pour constater que sa valeur, en un point quelconque a, doit nécessairement reparaître dans le domaine de tout autre point a'. La propriété (6), qu'on peut déduire directement de la définition (2), suffit à l'explication de ce fait. En effet, si l'on désigne par ω le nombre que l'on obtient en supprimant tous les chiffres après le $\nu^{\text{ième}}$, dans $a' - a$, on a, en supposant, comme plus haut, $2^\nu > \frac{1}{\varepsilon}$,

$$|a' - a - \omega| < \varepsilon.$$

Par conséquent il existe toujours, entre $a' - \varepsilon$ et $a' + \varepsilon$, un nombre $x = a + \omega$, tel que $\varpi(x) = \varpi(a)$.

Cela posé, considérons la courbe $y = \varpi(x)$. D'après ce qu'on a vu précédemment on peut non seulement affirmer qu'elle passe dans le domaine de tout point compris entre l'axe des x et une parallèle à cet axe ($y = 1$), mais encore qu'elle a une infinité de points dans tout segment rectiligne, si petit qu'il soit, parallèle à l'axe des x, et situé entre les deux parallèles, tandis qu'une parallèle quelconque à l'axe des y ne peut évidemment la rencontrer qu'en un seul point. En d'autres termes, si l'on se donne au hasard un point ($x = a$, $y = b$) dans la région indiquée, la courbe possède une infinité de points, qui ont l'ordonnée b et l'abscisse aussi près de a qu'on le désire. On peut d'ailleurs faire varier comme on veut la forme de la région par un changement convenable du système de coordonnées. Ainsi, par exemple, l'équation

$$\frac{1}{2\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} = \varpi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

représente une courbe, qui *passe dans le domaine de tous les points du plan :* cela n'empêche pas que deux cercles quelconques, ayant leurs centres à l'origine, comprennent entre eux une infinité d'autres cercles concentriques, qui ne rencontrent pas la courbe.

Il est maintenant bien facile de trouver la courbe, dont nous avons parlé en commençant. Si l'on représente par $\varphi(t)$ la fréquence de 1 parmi les chiffres de rang impair dans la partie fractionnaire du nombre t, écrit dans le système binaire, et par $\psi(t)$

la fréquence de 1 parmi les chiffres de rang pair, on démontre sans peine, comme précédemment, que ces deux fonctions jouissent des mêmes propriétés que ϖ. Du reste chacune de ces fonctions dépend de ϖ, à cause des relations évidentes

$$\varphi(2t) = \psi(t), \qquad \psi(2t) = \varphi(t), \qquad \varphi(t) + \psi(t) = 2\varpi(t).$$

Il y a donc entre deux nombres quelconques, aussi près l'un de l'autre qu'on le veut, une infinité de valeurs de t qui ne donnent, il est vrai, aucun point, dont les coordonnées soient

$$(7) \qquad x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t);$$

mais il est certain qu'il y a aussi, dans le même intervalle, une infinité de valeurs de t, qui correspondent à un point unique, dont les coordonnées (7) peuvent être assignées à l'avance, entre 0 et 1, d'une manière tout à fait arbitraire. De même, après avoir distribué les nombres naturels en trois systèmes, désignons par x, y, z les fréquences de 1 parmi les chiffres de t, dont les rangs, dans la partie fractionnaire, sont respectivement marqués par les nombres de chaque système : la courbe engendrée par le point (x, y, z) remplit une infinité de fois tout le volume d'un cube.

Si nous pouvions éliminer t entre les équations (1), nous serions conduits à une équation unique

$$(8) \qquad \chi(x, y) = 0,$$

qui ne représente plus une *courbe*, mais bien une *région* du plan, dont les points doivent être considérés dans leur ensemble, et non pas, comme sur la courbe, *l'un après l'autre*. Une même région donne naissance à une infinité de courbes qui la remplissent : il suffit d'en ordonner les points suivant une certaine loi, que l'on exprime en écrivant que l'équation (8) est satisfaite par deux fonctions x et y d'un paramètre t. C'est le choix de ce paramètre qui caractérise chaque courbe dans la région qu'elle remplit, et c'est la continuité des deux fonctions qui définit la continuité de la courbe. Ainsi la courbe de M. Peano est continue, mais on trouve une courbe discontinue si l'on remplace t par $\varpi(t)$ dans les équations (1). De même notre courbe est discontinue en tant qu'elle est représentée par les équations (7), mais elle ne saurait devenir

continue par un changement de paramètre, parce qu'il est impossible de trouver une fonction $f(t)$, telle que les fonctions $\varphi(f(t))$ et $\psi(f(t))$ soient continues. On peut en dire autant au sujet des courbes usuelles, qui sont, après tout, des régions à une seule étendue, selon le concept géométrique; mais, s'il y a lieu de considérer, au point de vue analytique ou mécanique, l'ordre suivant lequel leurs points se succèdent, la loi qui régit cette succession peut créer des discontinuités aussi fortes qu'on le veut, lors même que la courbe serait géométriquement continue. C'est ainsi, par exemple, que les équations

$$x = [t] + \varpi(t), \qquad y = [t] + \varpi(t)$$

représentent un ensemble de points qui, tout en couvrant complètement, une infinité de fois, la droite $x = y$, se suivent dans un ordre éminemment discontinu, et il n'y a pas moyen de faire disparaître cette discontinuité par un changement de paramètre.

Le fait qu'une équation, telle que (8), puisse représenter une région à double étendue, ne doit pas nous surprendre. Tout ensemble de points, en nombre fini ou infini, distribués d'une manière continue ou discontinue le long d'une ligne proprement dite, ou dans une partie quelconque du plan, peut être représenté par une équation entre les coordonnées x et y de ses points, parce qu'on a le droit de *définir* la fonction $\chi(x, y)$ en lui imposant d'être nulle aux points considérés, et de prendre, partout ailleurs, des valeurs autres que zéro. Nous savons bien que cette raison ne satisfait pas assez l'esprit, qui demande que l'on puisse toujours exprimer la fonction χ au moyen d'autres fonctions, connues; ce qui est évidemment possible et facile dans un grand nombre de cas. Ainsi, par exemple, l'équation $[x^2 + y^2] = 0$ représente l'intérieur d'un cercle; $[x]^2 + [y]^2 = 0$ représente un carré, qu'il ne faut pas confondre avec celui qui est occupé par la courbe (1), parce que l'on doit en exclure trois sommets et les côtés qui les joignent. L'ensemble des cases de même couleur, sur un échiquier indéfini, peut être représenté par l'équation $(-1)^{[x]} = (-1)^{[y]}$. De même, soient x, y, z, sur un échiquier à cases triangulaires, les distances d'un point quelconque aux côtés d'une case α, de sorte que $x + y + z = 1$; puis désignons par β les trois cases qui entourent α et qui lui sont opposées par le

sommet; nommons de nouveau α les deux autres cases qui, avec la première, sont opposées par le sommet à chaque case β; et ainsi de suite, à l'infini, en alternant toujours α avec β. Distinguons enfin par les lettres γ et δ, parmi les cases qui restent, celles qui ont un côté commun avec une case α ou β, respectivement. Si l'on a soin de donner la même couleur (bleu foncé, par exemple, mais avec deux teintes différentes) aux cases α et β, et une autre couleur (deux teintes jaunes) aux cases γ et δ, on obtient une jolie mosaïque, qui a l'aspect d'un réseau d'hexagones clairs, se détachant assez gracieusement sur un fond obscur. Abstraction faite des sommets et des côtés, chaque ensemble de cases de même couleur est représenté par une équation de la forme

$$(-1)^{[x]}+(-1)^{[y]}+(-1)^{[z]}=k,$$

où k ne peut recevoir que les valeurs 3, -3, 1, -1, suivant qu'il s'agit des cases α, β, γ, δ, respectivement. Si l'on fait disparaître les différences de teinte, on obtient un réseau semi-régulier (¹) de triangles et d'hexagones : l'ensemble des hexagones est représenté par l'équation

$$(-1)^{[y]+[z]}+(-1)^{[z]+[x]}+(-1)^{[x]+[y]}=k,$$

où $k=-1$, et celui des triangles par la même équation, où l'on fait $k=3$.

Soit encore $f(x)$ la fonction, bien connue, qui prend les valeurs -1, 0, 1 suivant que x est négatif, nul ou positif. L'emploi de cette fonction permet toujours de réduire la question, dans le cas d'une région continue, limitée par un contour donné, à la recherche, beaucoup plus facile, d'une fonction $g(x,y)$, qui soit positive à l'intérieur de la région, négative à l'extérieur, nulle sur le contour. L'équation $f(g(x,y))=k$ représente évidemment, pour $k=1$, la région considérée, pour $k=1$ la région extérieure au contour, et pour $k=0$ le contour lui-même. Il en résulte, par exemple, que l'intérieur d'un cercle peut être représenté par l'équation $f(1-x^2-y^2)=1$; que l'équation $f(x^2+y^2)=1$ représente le plan entier, à l'exception de l'origine; que l'en-

(¹) *Forme poliedriche*, p. 45.

semble des intérieurs des cases de même couleur d'un échiquier peut être représenté par $f(\sin \pi x \sin \pi y) = 1$; etc.

Dans les exemples qui précèdent, et dans beaucoup d'autres, toutes les fois que l'équation (8) représente une région à double étendue, on s'aperçoit que le premier membre peut être exprimé au moyen de fonctions, telles que $[x]$, douées de la propriété de conserver une valeur donnée, dans un ou plusieurs intervalles. On voit également paraître des fonctions, telles que $\varpi(x)$, qui reviennent une infinité de fois à la même valeur dans un intervalle fini; mais, alors, les régions représentées ne sont pas continues : leur discontinuité est comme l'image de la discontinuité des fonctions employées. Lorsque l'on dispose de semblables fonctions, en nombre quelconque, avec des intervalles arbitraires, où elles soient obligées à rester constantes ou bien à reprendre indéfiniment une même valeur, peut-on construire par leur moyen, sans faire intervenir des fonctions d'autre nature, l'équation d'une région donnée, quelle qu'elle soit? La question ne nous semble pas facile à traiter : nous laissons à nos lecteurs le soin de la résoudre.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Baker (H.-F.). — *An Introduction to Abel's Theorem and the allied Theory, including the Theory of the Theta.* In-8°. Cambridge, University Press. 25 sh.

Burkhardt (H.). — *Funktionstheoretische Vorlesungen.* I Thl. : *Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer complexen Veränderlichen.* Avec nombreuses figures dans le texte; gr. in-8°, XII-213 p. Leipzig, Veit und Co. 6 m., gebd. 7 m.

Crelle (A.-L.). — *Calculating Tables giving the Products of every two numbers from* 1 *to* 1000. By Rev. C. Bremiker. 1re édition anglaise, in-folio. London, Nutt. 21 sh.

Jahresbericht *der deutschen Mathematiker-Vereinigung.* 4. Bd. 1894-95. Enth. die Chronik der Vereinigg. f. d. J. 1894 u. 1895. kurze

Berichte üb. die auf den Versammlgn. in Wien u. Lübeck gehalt. Vorträge, sowie e. ausführl. Bericht üb. die Theorie der algebraischen Zahlkörper v. D. Hilbert. Herausgeg. v. A. Wangerin u. A. Gutzmer. Gr. in-8°, v-546 p. Berlin, G. Reimer. 16 m.

Bigler (U.). — *Ein Beitrag zur Theorie der arithmetischen Reihen.* In-8°, 36 p. (Aarau, Sauerländer et Co.) 1 m.

Cayley (A.). — *Collected Mathematical Papers.* Vol. XII. In-4°. Cambridge, University Press. 25 sh.

Frischauf (J.). — *Vorlesungen über Kreis- u. Kugel-Functionen-Reihen.* Gr. in-8°, vi-60 p. Leipzig, Teubner. 2 m.

Goldschmidt (L.). — *Die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Versuch einer Kritik.* Gr. in-8°, vii-279 p. Hamburg, Voss. 7 m.

Hollefreund (K.). — *Anwendungen des Gauss'schen Princips vom kleinsten Zwange.* In-4°, 24 p. avec 2 pl. Berlin, Gaertner. 1 m.

Russel (B.-A.-W.). — *Foundations of Geometry.* In-8°, 220 p. Cambridge, University Press. 7 sh. 6 d.

Weltzien (C). — *Ueber Produkte u. Potenzen von Determinanten (oder über Komposition von linearen Substitutionen).* In-4°, 23 p. Berlin, Gaertner. 1 m.

Mach (E.). — *Die Mechanik u. ihre Entwickelung, historisch-kritisch dargestellt.* 3e édition, in-8°, xii-505 p. avec 250 figures. Leipzig, Brockhaus. 8 m., relié 9 m.

Internat. wissenschaftl. Bibliothek. 59. Bd.

Bianchi (L.). — *Teoria dei gruppi e delle equazioni algebriche secondo Galois.* In-8°. Pisa, Spoerri. 12 l.

Cauchy (A.). — *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy,* publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences. 2e série, t. III, in-4°, 476 p. Paris, Gauthier-Villars et fils. 25 fr.

Petersen (J.). — *Théorie des équations algébriques.* Traduction par H. Laurent. In-8°, xv-350 p. Paris, Gauthier-Villars et fils. 10 fr.

Sturm (Ch.). — *Lehrbuch der Analysis (Cours d'Analyse).* Uebersetzt von Th. Gross. 1. Bd. in-8°, x-360 p. avec 103 fig. Berlin, Fischer's technolog. Verlag. 7 m. 50 pf.; relié 9 m.

Routh (H.-J.). — *Elementary Part of Treatise on Dynamics of a*

System of rigid bodies. Part. I : *Treatise on the whole Subject.* 6e édit. in-8°, 438 p. London, Macmillan. 14 sh.

Boulanger (A.). — *Contribution à l'étude des équations différentielles linéaires et homogènes intégrables algébriquement.* (Thèse.) In-4°, 129 p. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Galois (E.). — *Œuvres mathématiques d'Evariste Galois.* Avec une introduction par M. Emile Picard. In-8°, x-64 p. Paris, Gauthier-Villars et fils. 3 fr.

Krause (M.). — *Theorie der doppeltperiodischen Functionen einer veränderlichen Grösse.* 2. Bd. gr. in-8°, xii-306 p. Leipzig, Teubner. 12 m.

Kronecker (L.). — *Werke,* herausgeg. von K. Hensel. 2. Bd. gr. in-4°, viii-541 p. Leipzig, Teubner. 36 m.

Leau (L.). — *Étude sur les équations fonctionnelles à une ou à plusieurs variables.* (Thèse.) In-4°. 118 p. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Mascart (J.). — *Contribution à l'étude des planètes télescopiques.* (Thèse.) In-4°, 119 p. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Thybaut (A.). — *Sur la déformation du paraboloïde et sur quelques problèmes qui s'y rattachent.* (Thèse.) In-4°, 50 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Klein (F.) u. Sommerfeld (A.). — *Ueber die Theorie des Kreisels.* 1 heft. *Die kinemat. u. kinet. Grundlagen der Theorie.* Gr. in-8°, 196 p. Leipzig, Teubner. 5 m. 60 pf.

Worthington (A.-M.). — *Dynamics of Rotation. Elementary Introduction to rigid Dynamics.* 2e édit. in-8°. 182 p. London, Longmans. 4 sh. 6 d.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Leopold Kronecker's Werke. herausgegeben auf Veranlassung der K. P. Akademie der Wissenschaften von K. Hensel. — Zweiter Band; in-4°, VII-540 p. Leipzig, Teubner, 1897.

La publication des Œuvres de Kronecker se poursuit avec une rapidité de bon augure. Dans un article antérieur (1), nous avons annoncé la publication du premier Volume et nous avons indiqué le plan adopté par M. Hensel. Le second Volume, qui vient de paraître, contient, conformément aux indications que nous avions données, un ensemble de vingt-deux Mémoires qui se rapportent à l'Arithmétique supérieure et qui ont paru dans l'intervalle compris entre les années 1875 et 1884. Presque tous ces Travaux se rattachent, de près ou de loin, à l'écrit célèbre que Kronecker avait fait paraître en l'honneur du jubilé de Kummer, *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der Algebraischen Grössen*. Les géomètres et les analystes seront heureux de les trouver réunis ici, de pouvoir les étudier dans leur ensemble et dans leur liaison logique. Kronecker était un géomètre absolument original; il avait profondément réfléchi sur l'ensemble des Mathématiques; en dehors même des découvertes capitales qu'il a faites dans les parties les plus difficiles et les plus cachées de notre science, il savait donner à tous les écrits qui sortaient de sa plume un cachet personnel qui les recommande et les distingue au plus haut degré. L'éditeur, M. Hensel, et l'imprimeur, M. Teubner, rendent donc un véritable service en poursuivant cette publication et lui donnant tous les soins qu'elle mérite.

Chacun des Mémoires a été soumis avant la réimpression à un examen minutieux et M. Hensel se plaît à reconnaître que, dans cette tâche qu'il a entreprise, il a été aidé par le bienveillant concours de différents géomètres : MM. Frobenius, Hermite, Hurwitz, Kneser et Vahlen. Il remercie particulièrement MM. Hurwitz et Kneser qui ont apporté leurs soins à la publication des deux Mé-

(1) *Bulletin*, XX_1, p. 155.

moires sur l'élimination et sur les formes bilinéaires de quatre variables.

Parmi les vingt-deux Mémoires que contient ce Volume, huit se rapportent à un sujet qui a été l'objet favori des recherches de Kronecker : la loi de réciprocité pour les restes quadratiques. On y trouvera aussi, en dehors de ceux que nous avons cités plus haut, les recherches sur les fonctions de Sturm et sur les *caractéristiques* des systèmes de fonctions.

PASCAL (E.). — CALCOLO DELLE VARIAZIONI E CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE. In-8°, 330 p. Milan, Hœpli, 1897.

Cet Ouvrage fait partie de la collection des *Manuels Hœpli* qui comprend déjà plus de cinq cents numéros publiés, traitant pour ainsi dire de tous les sujets que l'on peut imaginer. Les Mathématiques y sont représentées par un Traité d'Astronomie de M. Lockyer; par le Calcul différentiel, le Calcul intégral, le Calcul des variations et le Traité des fonctions elliptiques (dont nous avons déjà rendu compte) de M. Pascal; par une Dynamique élémentaire de M. Cattaneo; par des exercices d'Algèbre dus à M. S. Pincherle, de Calcul infinitésimal dus encore à M. Pascal; par des Traités de Géométrie analytique, projective et descriptive, dus à M. Aschieri; de Géométrie pure, métrique ou trigonométrique dus à M. Pincherle; de Géométrie pratique, dû à M. C. Erède. Un Volume sur la gravitation est dû à Sir G.-B. Airy, un autre sur la Logique mathématique à M. Burali-Forti. D'autres manuels traitent de la perspective, de la métrologie, de la stéréométrie, de la théorie des nombres, de la statique, des premiers éléments de la théorie des nombres, etc. Nous allons donner quelques indications qui permettront au lecteur de se rendre compte du but poursuivi par l'auteur.

Le manuel du Calcul des variations et du Calcul des différences peut être considéré comme formant la troisième Partie du Cours complet de Calcul infinitésimal. C'est ce qui explique la réunion, dans un même Ouvrage, de deux sujets aussi réellement différents. Dans le Calcul des variations, M. Pascal résume les principales

recherches des géomètres sur trois problèmes principaux :

1° L'étude de la variation première des intégrales simples, la recherche des équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les fonctions inconnues du problème posé;

2° L'étude et la transformation de la variation seconde des intégrales précédentes;

3° Le Calcul des variations pour les intégrales multiples à limites variables.

Il termine par l'examen de quelques problèmes particuliers et en particulier par l'application du Calcul des variations à la recherche des conditions d'intégrabilité.

En ce qui concerne le Calcul des différences, qui touche d'un côté à l'Algèbre supérieure, de l'autre au Calcul infinitésimal, l'auteur, après avoir établi les formules élémentaires relatives aux différences, quelques propriétés des nombres de Bernoulli et des fonctions interpolaires, aborde le problème général de l'interpolation. Il fait connaître la formule de Lagrange, rappelle la généralisation qu'en a donnée M. Hermite, puis fait connaître les différentes méthodes de quadrature de Simpson, de Cotes, de Gauss. L'Ouvrage se termine par un résumé du Calcul inverse des différences où se trouvent traitées, en même temps que les problèmes de quadrature et les formules d'Euler, les équations aux différences finies en général et plus particulièrement les équations linéaires.

Bien entendu, il ne faut pas s'attendre sur des sujets si étendus, condensés en un si petit nombre de pages, à des développements précis et complets; nous ne devons pas oublier que l'Ouvrage est un manuel et non un Traité didactique. L'essentiel est qu'il remplisse l'objet auquel il est destiné.

DELASSUS. — LEÇONS SUR LA THÉORIE ANALYTIQUE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE. Un vol. in-8°; 88 p. Paris, Hermann, 1897.

L'objet de ces intéressantes *Leçons* est d'apporter à la Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre l'unité

qui lui manque encore, malgré les nombreux travaux dont cette théorie a été l'objet, travaux dont les résultats essentiels ont été exposés d'une façon magistrale par M. Goursat, dans un livre qui est maintenant classique. Dans deux Mémoires antérieurs ([1]), M. Delassus s'était occupé de systèmes différentiels plus généraux et avait été amené à donner d'importantes indications sur la simplification de la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre qui résultent des résultats généraux obtenus par lui : c'est le développement de ces idées qui constitue le présent travail; mais il importe de dire qu'il se suffit à lui-même, et que l'auteur ne se réfère nullement à ses travaux antérieurs.

Le point de départ consiste dans la réduction à une forme canonique d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre ne contenant qu'une inconnue z. M. Delassus montre que, étant donné un pareil système, où z désigne la fonction inconnue, $x_1, x_2, \ldots$ les variables indépendantes, $p_1, p_2, \ldots$ les dérivées partielles de z prises respectivement par rapport à $x_1, x_2, \ldots$, on peut, par des opérations finies, ou bien constater son impossibilité, ou bien l'intégrer complètement, ou enfin le mettre sous la forme *canonique* suivante :

$$\begin{aligned} p_1 - f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_n) &= 0, \\ p_2 - f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_n) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots, \\ p_\mu - f_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_n) &= 0, \end{aligned}$$

les équations

$$[p_i - f_i, p_j - f_j] = 0, \qquad (i, j \leqq \mu)$$

étant des conséquences algébriques des équations qui composent le précédent système, c'est-à-dire se réduisant à des identités quand, après les avoir développées, on y remplace $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$, respectivement par $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$.

Quant au symbole opératoire [ ], il a la signification sui-

([1]) Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles. — Sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue (*Annales Scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1895, 1897).

vante. Si

$$F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$
$$\Phi = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

sont des fonctions des variables indépendantes x, de la fonction inconnue z, des dérivées partielles p, on a par définition

$$[F, \Phi] = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{\partial F}{\partial p_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z} \right) \right];$$

lorsque z ne figure ni dans F, ni dans Φ, ce symbole se réduit au symbole ordinaire (F, Φ).

Voici maintenant la propriété fondamentale d'un système canonique :

Si, en partant d'un tel système, on prend les dérivées des deux membres des équations qui le constituent, de manière à introduire les dérivées partielles du second ordre de z, on obtiendra deux sortes d'équations. Les équations de la première sorte expriment les dérivées D, c'est-à-dire, en général, les dérivées qui sont de la forme

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

l'un des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ étant différent de zéro, et qui, pour le second ordre, se réduisent donc à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, \mu \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

au moyen des dérivées Δ, c'est-à-dire, en général, aux dérivées qui sont de la forme

$$\frac{\partial^{\alpha_{\mu+1} + \alpha_{\mu+2} + \ldots + \alpha_n} z}{\partial x_{\mu+1}^{\alpha_{\mu+1}} \partial x_{\mu+2}^{\alpha_{\mu+2}} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Les équations de la seconde sorte, obtenues en égalant les expressions de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i},$$

ne sont autres que les équations d'intégrabilité

$$[p_i - f_i, p_j - f_j] = 0,$$

lesquelles sont d'ailleurs des conséquences algébriques des équations du système. En passant au troisième ordre, c'est-à-dire en prenant, par rapport à toutes les variables indépendantes, les dérivées de toutes les dérivées du second ordre de z, on aura encore des expressions de toutes les dérivées D du troisième ordre, au moyen des dérivées Δ; mais, comme on obtient ces expressions plusieurs fois, on aura de nouvelles équations d'intégrabilité, ne contenant, comme dérivées du troisième ordre, que des dérivées Δ. On pourra continuer ainsi, et obtenir, pour les différents ordres, des équations d'intégrabilité correspondantes. Or chacune de ces équations d'intégrabilité se réduit à une identité en vertu des équations d'ordre inférieur, et des équations du système canonique.

On peut rendre un peu moins restrictive la définition du système canonique en ne supposant plus que le système soit résolu par rapport aux dérivées, mais bien que cette résolution puisse se faire et que, alors, les conditions d'intégrabilité soient vérifiées.

Si l'on se place à ce point de vue, il est clair qu'un système canonique reste canonique par un changement de variable quelconque; il est de plus aisé de démontrer que le système

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_\mu = 0,$$

où les F désignent des fonctions des x, des p et de z, et où les équations sont, non résolues, mais résolubles par rapport à μ dérivées, est canonique, et cette proposition fournit un procédé commode pour ramener un système donné à être canonique.

Si z ne figure pas dans le système donné, il ne figurera pas non plus dans le système canonique dérivé. Tout système linéaire, homogène (par rapport aux p) et ne contenant pas z, conduit à un système jacobien, c'est-à-dire à un système canonique, linéaire, homogène et ne contenant pas z.

La notion de système canonique conduit à un théorème fondamental d'*existence*, théorème que M. Delassus désigne sous le nom de *théorème de Cauchy généralisé*, et dont voici l'énoncé.

Soit un système canonique

$$\begin{cases} p_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_n), \\ p_2 = f_2(x_1, \ldots, x_n, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_\mu = f_\mu(x_1, \ldots, x_n, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_n). \end{cases}$$

et un système de valeurs initiales $x_1^0, \ldots, x_m^0$ des variables x. Soit, en outre, $\theta(x_{\mu+1}, \ldots, x_m)$ une fonction de $x_{\mu+1}, \ldots, x_m$, analytique en $x_{\mu+1}^0, \ldots, x_m^0$, et désignons par z^0, $p_{\mu+1}^0, \ldots, p_m^0$ les valeurs en $x_{\mu+1}^0, \ldots, x_m^0$ de θ, $\frac{\partial\theta}{\partial x_{\mu+1}}, \ldots, \frac{\partial\theta}{\partial x_m}$.

Si les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$, où l'on considère $x_1, \ldots, x_m$, z, $p_{\mu+1}, \ldots, p_m$ sont analytiques en $x_1^0, \ldots, x_m^0$, z^0, $p_{\mu+1}^0, \ldots, p_m^0$, il existe une fonction $\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ et une seule, vérifiant le système S, analytique en $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$ et se réduisant à θ pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_\mu = x_\mu^0$.

A cette proposition fondamentale se rattache le problème de Cauchy qui consiste, étant donné le système canonique (S), et, dans l'espace à $m+1$ dimensions, une multiplicité ponctuelle $M_{m-\mu}$ définie par les équations

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_{\mu+1}, \ldots, x_m), \\ x_2 &= \varphi_2(x_{\mu+1}, \ldots, x_m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_\mu &= \varphi_\mu(x_{\mu+1}, \ldots, x_m), \\ z &= \varphi(x_{\mu+1}, \ldots, x_m), \end{aligned}$$

à déterminer une intégrale de (S) passant par $M_{m-\mu}$, c'est-à-dire se réduisant à φ si l'on y fait $x_1 = \varphi_1, x_2 = \varphi_2, \ldots, x_\mu = \varphi_\mu$; cette intégrale existe en général et est unique.

D'un autre côté, la démonstration même du théorème d'existence montre que l'intégration d'un système canonique de μ équations simultanées à m variables peut toujours se ramener à l'intégration d'une seule équation à $m - \mu + 1$ variables.

Pour cela, on fait d'abord, dans le système (S), le changement de variables

$$x_1 = x_1^0 + y_1, \quad x_2 = x_2^0 + y_1 y_2, \quad \ldots, \quad x_\mu = x_\mu^0 + y_1 y_\mu,$$
$$x_{\mu+1} = y_{\mu+1}, \quad \ldots, \quad x_m = y_m;$$

le système canonique (S) est alors remplacé par un système canonique (S) résolu par rapport aux dérivées $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ de z par rapport à $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$. Désignons par (R) la première des équations du nouveau système, celle qui exprime q_1, au moyen des y, de z et de $q_{\mu+1}, q_{\mu+2} \ldots, q_m$. Les intégrales analytiques de la *réduite* (R) peuvent être définies au moyen de leurs fonctions ini-

tiales pour $y_1 = 0$. D'ailleurs pour ce qui est de l'intégration de cette réduite, on peut regarder $y_2, \ldots, y_\mu$ comme des constantes, puisque les dérivées prises par rapport à ces variables ne figurent pas dans (R). M. Delassus montre que l'intégration du système canonique (S) se ramène à la recherche des intégrales Θ de la réduite (R) qui correspondent à des fonctions initiales indépendantes de $y_2, \ldots, y_\mu$.

Le théorème d'existence permet aussi de préciser la notion des intégrales singulières. Ce seront les intégrales analytiques que l'application directe de ce théorème ne permettra pas d'obtenir. Au reste, l'auteur montre comment la recherche des intégrales singulières d'un système canonique S se ramène à la recherche des intégrales d'un nouveau système canonique (S_1) déduit du système formé en adjoignant à (S) d'autres équations du premier ordre, que l'on obtient en égalant à o certains déterminants fonctionnels; le système (S_1) peut d'ailleurs admettre lui-même des intégrales singulières, d'où une distinction; les intégrales non singulières de (S_1) sont des intégrales simplement singulières de (S), les intégrales singulières de (S_1) sont des intégrales (au moins) doublement singulières de (S), et cette classification se poursuit.

Le théorème d'existence, enfin, permet à M. Delassus d'étudier d'une façon précise la transformation qui change un système où l'inconnue figure en un autre où l'inconnue ne figure pas.

Ces principes posés, M. Delassus en montre l'application : le théorème sur la réduction à une seule équation fournit immédiatement, pour les systèmes linéaires, la méthode de Mayer. Pour ce qui est de l'intégration des systèmes non linéaires, l'auteur expose d'abord, à la façon ordinaire, la théorie de l'intégrale complète. Il y joint la solution du problème de Cauchy, présentée sous une forme nettement analytique. Il est alors en mesure d'exposer la théorie de Jacobi et Mayer, sans avoir besoin des propriétés algébriques des expressions [ ] et sans faire la moindre distinction entre le cas où la fonction inconnue figure et celui où elle ne figure pas : ce dernier cas, toutefois, comporte des simplifications. M. Delassus établit d'ailleurs que la méthode conduit toujours à une véritable intégrale complète. Il établit enfin la méthode de Lie, toujours sans faire de distinction entre les deux cas :

cette méthode est une conséquence immédiate de la réduction à une seule équation.

Le Mémoire de M. Delassus semble bien apporter à la théorie des équations aux dérivées partielles, d'heureuses simplifications, et surtout cette unification que l'on y désirait. J. T.

MAXIMILIAN CURTZE. — PETRI PHILOMENI DE DACIA IN ALGORISMUM VULGAREM JOHANNIS DE SACROBOSCO COMMENTARIUS, UNA CUM ALGORISMO IPSO. — XIX-92, p. in-8°. Copenhague, Host et fils. 1897.

Le savant professeur de Thorn qui, il y a déjà presque trente ans, découvrait les Ouvrages mathématiques d'Oresme, qui depuis a mis à jour tant d'autres écrits du moyen âge, vient d'en publier un dont l'intérêt historique mérite d'être particulièrement signalé.

Le sujet en est, à la vérité, tout à fait élémentaire; ce n'est que l'Arithmétique comme on l'enseigne dans les écoles primaires, la numération, les quatre règles ([1]), la sommation des progressions arithmétiques, l'extraction des racines carrée et cubique. Mais cette publication nous reporte précisément à l'origine de la constitution de cet enseignement, et nous apprenons, pour la première fois, comment il était donné en réalité dans les Universités du moyen âge.

On savait bien que l'Ouvrage classique le plus répandu était l'*Algorismus vulgaris* de Jean de Sacrobosco. Cet opuscule, de moins de vingt pages in-8°, composé probablement à Paris vers le milieu du XIIIe siècle, a été assez souvent imprimé à partir de 1486 jusqu'à la fin du XVIe siècle ([2]); mais on ne pouvait que difficilement se rendre compte comment un résumé aussi sec, sans aucun

---

([1]) Il y en avait alors deux de plus; entre la soustraction et la multiplication étaient intercalées la *mediatio* (calcul de la moitié d'un nombre) et la *duplatio* (calcul du nombre double).

([2]) Ces éditions sont toutes assez difficiles à se procurer; les *Rara Mathematica* de Halliwett (Londres, 1839) contiennent la première réimpression aisée à lire; mais elle a été faite sur un manuscrit beaucoup moins correct que ceux dont M. Curtze s'est servi.

exemple numérique, pouvait être utilisé. Le Commentaire publié par M. Curtze, et dont la rédaction remonte à 1291, éclaire nettement la question.

Ce Commentaire représente évidemment les développements oraux tels que le maître les donnait en suivant le texte que les élèves avaient entre leurs mains et en leur montrant sur des exemples la raison et l'application des règles énoncées par Sacrobosco. Quoique la forme du Commentaire puisse nous paraître aujourd'hui, sous certains rapports, singulièrement scolastique, on n'en doit pas moins reconnaître que l'enseignement de l'arithmétique, ou plutôt du calcul, donné de cette façon, pouvait être parfaitement sérieux, au point de vue pratique et même au point de vue théorique.

Mais il est évident aussi qu'à cette date la connaissance de l'*algorisme,* c'est-à-dire du calcul avec les chiffres modernes, était encore très peu répandue, moins que ne le ferait croire, à première vue, la fréquence de ces chiffres dans les manuscrits de cette époque. Sans doute, qui savait lire à cette époque devait également connaître la numération; mais le calcul avec les chiffres ne devait pas, comme de nos jours, marcher à peu près de pair avec l'écriture.

Tout d'abord ce calcul ne se faisait pas encore la plume à la main; les règles ne s'y prêtent nullement; empruntées aux Arabes, elles sont toujours combinées pour l'emploi de l'abaque recouvert de sable où l'on trace les chiffres dans le plus petit espace possible, en les effaçant et en les remplaçant par d'autres au fur et à mesure des opérations. Ainsi, pour l'addition, il est bien prescrit d'écrire les deux nombres l'un au-dessous de l'autre; mais, à mesure qu'on ajoute un chiffre au supérieur, on remplace le premier par un zéro, le second par la somme, en modifiant, en tant que de besoin, ceux de gauche. Ainsi, à la fin de l'opération, les deux nombres primitifs ont disparu, le supérieur est remplacé par le total, et l'inférieur par une suite de zéros.

Le Commentaire indique expressément que le calcul se fait sur une tablette (*in tabula*). Est-ce l'abaque des Arabes, dont on ne peut guère cependant prouver l'introduction réelle dans l'Occident latin? Est-ce déjà notre tableau noir avec la craie? C'est ce qui resterait à déterminer. En tous cas, les règles de calcul se sont sin-

gulièrement modifiées depuis cette époque, par une lente évolution qui les a rendues beaucoup plus commodes. Au XIIIe siècle, leur pratique, pour la multiplication notamment, était passablement malaisée, et il est indubitable que l'usage des jetons devait, pour les calculs de la vie courante, suppléer l'*algorisma*, connaissance réservée à une élite.

Il est donc particulièrement curieux de trouver dans le traité de Sacrobosco et chez son commentateur, à côté de formules qui sont passées immédiatement dans notre enseignement élémentaire, d'autres règles essentiellement différentes des nôtres, ou ne les contenant qu'en germe.

L'auteur du Commentaire est un Maître Pierre Philomène de Dacie (c'est-à-dire de Danemark), qualifié de « bon computiste en la ville de Paris ». Le texte est publié d'après deux manuscrits, de Munich, latin 11067 et latin 14401. Le premier est daté du 19 février 1448; le second, du XIVe siècle, est le seul à donner la date de 1291 et le surnom de *Philomenus*, que M. Eneström avait déjà signalé, en 1890, dans un manuscrit du Vatican (Regin. 1452) sur une Table de multiplication des quarante-neuf premiers nombres. Il reste incertain si ce Pierre de Dacie est le même que celui qui porta le même nom, fut recteur de l'Université de Paris en 1327 et auquel on attribue un *Comput* imprimé dans les *Scriptores rerum demicarum*, ainsi qu'un *Calendrier* en français (manuscrit à Copenhague).

L'édition a été faite aux frais de la Société Royale des Sciences de Danemark; mais si Sacrobosco était Anglais, et si Pierre Philomène était Danois, elle n'en intéresse pas moins la France, puisqu'il s'agit d'un enseignement qu'ils ont constitué à l'Université de Paris, d'où il s'est propagé dans toute l'Europe.

PAUL TANNERY.

KRAUSE (M.). — THEORIE DER DOPPELTPERIODISCHEN FUNCTIONEN EINER VERANDERLICHEN GRÖSSE. Zweiter Band, XII-306 p. in-8°. Leipzig, Teubner, 1897 [1].

Le second Volume de la *Théorie des fonctions doublement périodiques*, que publie M. Krause, présente le même intérêt et la même originalité que le premier. Si l'Ouvrage, maintenant terminé, laisse de côté quelques théories importantes, on ne saurait le reprocher à l'Auteur qui n'a nullement émis la prétention d'écrire une encyclopédie sur les fonctions elliptiques, et qui avait assurément le droit, dans une matière aussi vaste, de choisir et de limiter son sujet. Son livre, tel qu'il est, est extrêmement instructif.

Le second Volume contient trois Parties très distinctes : l'une se rapporte à la théorie de la transformation, une autre aux développements en séries trigonométriques, la troisième enfin aux équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques dont M. E. Picard a fait la théorie générale.

La théorie de la transformation avait été développée dans le premier Volume, au point de vue de l'expression des fonctions thêta et elliptiques transformées au moyen des fonctions primitives : c'est maintenant des relations entre les constantes de la transformation que s'occupe M. Krause. Ces relations sont déduites des théorèmes d'addition très généraux qu'on lui doit et qu'il a développés, pour la première fois, dans son Mémoire : *Zur Transformation der Thetafunctionen* [2]. Il convient de rappeler, tout au moins, l'un de ces théorèmes, afin de faire comprendre l'ordre d'idées où se meut l'auteur.

Posons en général, en désignant par m un nombre entier positif et par g un entier quelconque,

$$\begin{aligned}\vartheta_3[g](v\mid m\tau) &= \sum_s e^{m\tau\pi i\left(s+\frac{g}{m}\right)^2+2\pi i\left(s+\frac{g}{m}\right)v}\\ &= e^{\frac{\pi i g}{m}(2v+g\tau)}\,\vartheta_3(v+g\tau\mid m\tau),\end{aligned}$$

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XX, p. 132.

(2) *Berichte der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften*, 1893.

τ ayant le sens habituel de la théorie des fonctions $\mathfrak{S}$; dans le second membre, la sommation s'étend à tous les nombres entiers s, de $-\infty$ à $+\infty$. Il est clair tout d'abord que le nombre entier g peut être, si l'on veut, réduit suivant le module m, puisqu'on ne change évidemment rien au second membre, quand on ajoute à g un multiple de m.

Ceci posé, désignons par $m_1, m_2, \ldots, m_n$ d'une part, par μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_n$ de l'autre, n nombres entiers positifs, puis par $a_{\varepsilon r}$, n^2 nombres entiers satisfaisant aux conditions

$$\mu_1 a_{\varepsilon 1}^2 + \mu_2 a_{\varepsilon 2}^2 + \ldots + \mu_n a_{\varepsilon n}^2 = m_\varepsilon,$$
$$\mu_1 a_{\varepsilon 1} a_{r1} + \mu_2 a_{\varepsilon 2} a_{r2} + \ldots + \mu_n a_{\varepsilon n} a_{rn} = 0$$
$$(\varepsilon = 1, 2, \ldots, n), \qquad (r = 1, 2, \ldots, n), \qquad (r \neq n).$$

mais d'ailleurs quelconques; si l'on suppose les variables w_1, $w_2, \ldots, w_n$ liées aux variables $v_1, v_2, \ldots, v_n$ par les relations

$$w_\varepsilon = a_{\varepsilon 1} v_1 + a_{\varepsilon 2} v_2 + \ldots + a_{\varepsilon n} v_n,$$

on aura la relation

$$\prod_{(\varepsilon)} \mathfrak{S}_1(v_\varepsilon \mid \mu_\varepsilon \tau) = \sum_{(g)} \prod_{(\varepsilon)} \mathfrak{S}_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon \mid m_\varepsilon \tau);$$

les produits infinis, dans les deux membres, s'étendent aux valeurs 1, 2, ..., n de l'indice ε; quant à la sommation du second membre, elle est relative aux différents systèmes distincts g_1, $g_2, \ldots, g_n$ de nombres entiers qui vérifient les congruences :

$$g_\varepsilon \equiv a_{\varepsilon 1} \mu_1 s_1 + a_{\varepsilon 2} \mu_2 s_2 + \ldots + a_{\varepsilon n} \mu_n s_n \pmod{m_\varepsilon},$$

où $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sont des entiers quelconques.

Ce théorème et un autre du même genre sont, comme il est aisé de le prévoir, extrêmement riches en conséquences. Tout d'abord l'auteur en déduit les relations entre les constantes de la transformation pour un degré de transformation égal à 3, 5, 7, 11. Ces relations sont obtenues sous une foule de formes, en faisant varier le nombre des facteurs et en particularisant les valeurs des variables. Un autre ordre de conséquences consiste dans l'étude du précédent théorème, d'après le nombre (2, 3, 4, 8) des facteurs qui y figurent, pour des valeurs particulières ou des

formes particulières des nombres μ et m, lesquelles permettent d'obtenir les coefficients entiers a sous forme explicite, de façon que ces coefficients satisfassent aux équations de condition.

Dans la seconde Partie, l'auteur rappelle d'abord comment les fonctions doublement périodiques de troisième espèce peuvent s'exprimer linéairement au moyen de fonctions simples : celles-ci changent d'ailleurs de nature suivant que l'on a affaire à une fonction doublement périodique de troisième espèce qui est transcendante entière, qui a plus de zéros que de pôles, ou plus de pôles que de zéros. Dans tous les cas, le développement en série trigonométrique d'une fonction doublement périodique de troisième espèce est ramené au développement d'une fonction simple. S'il s'agit d'une fonction transcendante entière, la fonction simple est le produit d'une fonction $\mathfrak{I}$ par une exponentielle, et le problème peut être regardé comme résolu.

Dans le cas où il s'agit d'une fonction où le nombre des zéros est supérieur ou égal au nombre des infinis, on peut prendre pour fonction simple l'expression

$$\frac{1}{\pi}\frac{\mathfrak{I}_\alpha[(n+1)(v+a)\,|\,(n+1)\tau]\,\mathfrak{I}'_1(0\,|\,\tau)}{\mathfrak{I}_\beta(v\,|\,\tau)\,\mathfrak{I}_\gamma[(n+1)(v+a)\,|\,(n+1)\tau]} = \mathrm{P}_{\alpha\beta\gamma}(v, a),$$

où n est un entier positif.

Considérons, par exemple, la fonction $\mathrm{P}_{010}(v, a)$ d'une part, et d'autre part la fonction

$$\mathrm{F}_{01}(v, a) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{e^{2mni\pi\left(v+\frac{(n+1)a}{n}+\frac{m\tau}{2}\right)}}{\sin\pi(v+m\tau)}$$

ou encore

$$\mathrm{F}_{01}(v, a) = -2ix^{\frac{1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{y^m q^m}{1-xq^{2m}},$$

en supposant

$$x = e^{2v\pi i}, \qquad y = e^{2n\pi i\left(v+\frac{n+1}{n}a\right)},$$

on constate aisément que les deux fonctions $\mathrm{F}_{01}(v, a)$, $\mathrm{P}_{010}(v, a)$ vérifient les mêmes équations fonctionnelles :

$$f(v+1) = -f(v),$$
$$f(v+\tau) = e^{-\pi i n(2v+\tau)} f(v),$$

et que la différence

$$P_{010}(v, a) - F_{01}(v, a)$$

est une fonction transcendante entière doublement périodique de troisième espèce, dont le développement peut, par conséquent, se ramener à celui de la fonction

$$F_{01}(v, a) = \frac{1}{\sin \pi v} - 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{r=1}^{r=\infty} q^{m^2 n + m(2r-1)} \sin \pi \left[2mn\left(v + \frac{n+1}{n} a \right) + (2r-1)v \right].$$

Les autres cas se traitent d'une façon analogue et l'on obtient ainsi tous les développements des fonctions $P_{\alpha\beta\gamma}$. Telle est la première méthode que développe M. Krause. Il en donne trois autres plus directes; chacune d'elles a son intérêt propre.

Dans le cas où le nombre des pôles est supérieur au nombre des infinis, la fonction simple, qu'il y a lieu de considérer, est

$$\frac{\mathfrak{I}_\alpha(v - a)}{\mathfrak{I}_\beta(v - b)\,\mathfrak{I}_\gamma(nv \mid n\tau)}.$$

M. Krause expose une méthode indirecte et deux méthodes directes pour développer une telle fonction en série trigonométrique; le cas où il y a des pôles multiples et le cas des fonctions doublement périodiques ordinaires sont traités à part.

La troisième Partie débute par un intéressant exposé des théorèmes fondamentaux de M. Fuchs sur les équations différentielles linéaires; se limitant au cas où les coefficients sont des fonctions analytiques univoques, M. Krause montre, en général, la forme des intégrales aux environs d'un point singulier; il étudie ensuite les propriétés des intégrales des équations de la forme

$$(x - a)^n \frac{d^n y}{dx^n} + (x - a)^{n-1} p_1 \frac{d^n y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0,$$

où les fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont supposées régulières au point a; pour cette étude, il utilise les résultats obtenus par M. Frobenius (*Crelle*, t. 76). Les équations de M. Picard sont ensuite définies comme des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions doublement périodiques de

première espèce et dont les intégrales sont toutes des fonctions analytiques univoques. De cette définition résulte immédiatement l'existence d'une intégrale doublement périodique de seconde espèce; dans le cas général, si l'équation est d'ordre n, il existe n intégrales de cette nature. De cette définition encore et des propositions relatives à l'équation déterminante des points singuliers résulte la forme générale des équations.

Cette forme une fois établie, l'auteur passe à l'étude des équations particulières d'après leur ordre et le nombre des points singuliers. L'équation du premier ordre se traite sans difficulté. L'équation du second ordre, lorsqu'il n'y a qu'un point singulier, que l'on peut supposer coïncider avec le point iK', n'est autre chose que l'équation de Lamé. Quand il y a deux points singuliers, on peut encore supposer que l'un coïncide avec le point iK'; le cas où l'autre coïncide avec le point K offre un intérêt particulier et est traité à part. M. Krause s'occupe ensuite du cas général; il montre comment le problème peut se réduire et développe quelques cas particuliers intéressants. L'étude de ces équations différentielles est d'ailleurs faite de deux façons. Il traite ensuite des équations du second ordre avec un nombre quelconque de points singuliers et des équations différentielles du troisième ordre avec un seul point singulier. Les derniers paragraphes de son Livre se rapportent à différents cas particuliers et, en particulier, à l'équation de Lamé. J. T.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ANDRADE (J.). — Leçons de Mécanique physique. Un vol. in-8°, x-413 p. Paris, Société d'éditions scientifiques, 1898.

S'il est vrai que les meilleurs Livres sont ceux qui donnent le plus à réfléchir, il faut assurément féliciter M. Andrade d'avoir publié ces *Leçons de Mécanique physique.* Ceux même dont M. Andrade choque les habitudes reconnaîtront qu'il y a dans son Livre d'excellentes parties, par exemple ces premiers Chapitres, où il retrace à grands traits l'histoire de l'Astronomie depuis Képler jusqu'à Newton, et où il montre l'influence décisive que les succès de l'Astronomie ont eue sur la constitution de la Mécanique. Que la définition de la force, regardée comme le produit de l'accélération par la masse, dépende d'une part de l'horloge qui sert à mesurer ou à définir le temps, d'autre part du repère auquel on rapporte le mobile, c'est encore là une remarque très essentielle et que l'on ne saurait trop répéter. Il importe assurément de démêler la variation qu'introduit dans la force et le changement d'horloge et le changement de repère; c'est ce qui permet de faire un simple changement de variable, pour le temps, et le théorème de Coriolis, pour le repère. Si, sur un mobile dont le mouvement est rapporté à un repère déterminé, une nouvelle force vient agir à un moment donné, la variation géométrique de l'accélération qui résultera de cette action est indépendante du repère, comme le montre le théorème de Coriolis, et ne dépend pas non plus de l'horloge, sauf un coefficient numérique qui n'influe pas sur sa direction. A cause du caractère invariant de cette variation géométrique, M. Andrade veut, après Reech, qu'on la prenne pour point de départ de la définition de la force. Cela semble-t-il, entraînerait quelques complications; mais la remarque précédente n'en gardera pas moins toute son importance, aux yeux même de ceux qui se résolvent à regarder la force comme quelque chose de relatif.

Si un problème de Mécanique, pour une certaine horloge et un certain repère, conduit à des équations différentielles où les accé-

lérations s'expriment uniquement en fonction des points mobiles, ces équations perdront, en général, leur caractère quand on rapportera le temps à une autre horloge et le mouvement à un autre repère. Quelle que soit encore l'importance de cette remarque, elle appelle une observation. S'il y a une horloge et un repère qui donnent aux équations la forme simple que je viens de dire, on ne manquera pas de les choisir, de regarder l'horloge comme marquant le temps absolu, et le repère comme l'espace absolu. M. Andrade a développé lui-même cette idée à propos du principe des aires. Cet *absolu* ne sera bien entendu, qu'un *absolu relatif à nous,* à notre connaissance expérimentale du monde des phénomènes; mais il sera la base la plus solide de cette connaissance. L'existence d'une telle horloge et d'un tel repère, pour tous les problèmes réels de la Mécanique est assurément une hypothèse; le principe de l'égalité de l'action et de la réaction est aussi une hypothèse, mais il n'a pu entrer un seul instant dans la pensée de M. Andrade de contester l'extraordinaire succès de ces hypothèses et l'ordre qu'elles ont apporté dans notre connaissance du monde extérieur. Alors pourquoi dire que le principe de l'inertie est inutile? Inutile à quoi? A fonder la Mécanique? Mais quelle Mécanique? Sans doute, on peut, sans le faire intervenir, écrire des équations différentielles, des relations entre les accélérations, les vitesses et les coordonnées des points mobiles : dira-t-on que ces équations appartiennent à la Mécanique, et surtout à la Mécanique physique? N'est-ce pas ce principe qui donne aux équations de la Mécanique leur caractère d'équations de la Mécanique? Peut-on se passer d'hypothèses pour mettre les problèmes réels en équations? Quel autre garant les hypothèses ont-elles que le succès et quelle autre hypothèse a-t-elle eu plus de succès que celle-là?

Pour définir la force, l'accélération ne suffit pas, il faut encore définir la *masse,* le coefficient numérique attaché à la matière. M. Andrade veut en donner aussi une définition cinématique, indépendante des repères du mouvement. Cette définition est fondée sur le fait de l'impénétrabilité de la matière. Je dois remarquer en passant que quelques personnes n'accepteront pas facilement l'idée de l'impénétrabilité de la matière comme rentrant dans la Cinématique; mais il n'y a là qu'une question de mots. Pour M. Andrade, la définition de la masse résulterait de la relation vecto-

rielle

$$m\,\Delta v + m'\,\Delta v' = 0,$$

vérifiée, après le choc, par les accroissements géométriques des vitesses : il serait « conforme aux faits que quelles que soient les conditions du choc renouvelé, il existe deux nombres positifs et constants » qui vérifient cette relation. Soit; mais, assurément, cette relation ne servira pas en général pour mesurer effectivement les masses; quand on voudra les mesurer, on continuera de faire appel au principe de l'égalité de l'action et de la réaction. M. Andrade dit un peu plus loin : « Si l'on rapproche la définition cinématique des masses de la définition classique, on voit qu'on les conciliera en admettant que le choc des deux corps développe des actions mutuelles qui, agissant pendant chaque élément infiniment petit *dt* de la durée courte mais finie du choc, sont deux à deux égales et contraires. C'est le *postulat de l'égalité de l'action et de la réaction* sous sa forme la plus simple : la pression mutuelle de deux corps en contact ». Mais si ce postulat, sous sa forme la plus simple, intervient dans la définition des masses, s'il intervient encore dans leur détermination effective, si en outre le *choc* et l'*impénétrabilité* comportent quelques difficultés, ne vaut-il pas mieux laisser le principe de l'égalité de l'action et de la réaction à la base de la Mécanique?

Jusqu'ici, sauf peut-être pour l'*impénétrabilité,* nous sommes restés dans la Cinématique. M. Andrade a tenu, en effet, à montrer que l'idée fondamentale de Reech peut être *débarrassée de la conception des liaisons.* C'est toutefois cette conception qui, pour lui, doit fonder la notion de force et donner à la notion d'*effort* un caractère scientifique. Il accepte, avec franchise, le reproche d'anthropomorphisme que quelques-uns lui adresseront peut-être. Il a raison sur ce point : quelle est celle de nos connaissances où il n'y a pas quelque anthropomorphisme? Ce ne serait peut-être pas une connaissance humaine. L'anthropomorphisme m'inquièterait bien peu, c'est le défaut de clarté qui me semble plus inquiétant. La notion de mon effort musculaire me paraît bien obscure, et je n'y trouve même pas cet élément indispensable de l'idée de force, la direction. La sensation que je ressens dans le bras ne m'apparaît pas comme un vecteur. « La force, dit l'ingénieur à qui M. Andrade prête la parole, c'est ce qui fatigue des

liens déterminés, ce qui les tend, ce qui peut les rompre, c'est aussi la fatigue de mon bras... » Ici encore, je ne vois pas le vecteur. « Le point de vue dominant de (l'École du fil), dit-il plus loin, est la considération de certains systèmes de masse négligeable, ayant aussi une ou deux dimensions négligeables, envisagés dans un état particulier, *état de tension*, et capables de transmettre des *efforts considérables* à d'autres corps éloignés. Le type idéal d'une *machine* de ce genre est un *fil*, fil parfaitement flexible et bien légèrement extensible. C'est là l'image, le *modèle* de l'idée de force, dans la seconde école. » Sans doute, le vecteur est maintenant plus près, c'est le fil lui-même. Mais ce *modèle de l'idée de force*, cet *état de tension*, ces *efforts considérables* que l'on transmet, est-ce là des idées parfaitement claires? La clarté est peut-être une affaire d'habitude, et les personnes qui ont des habitudes différentes répondront sans doute différemment. Est-il bien sûr que cette conception ne mêle pas la Mécanique, plus que *le fameux principe de l'inertie* à des *questions physiques, particularisées?* Et si elle satisfait l'ingénieur, satisfera-t-elle l'astronome, qui ne voit aucun fil entre la Terre et le Soleil? Il faut bien l'avouer d'ailleurs : ces doutes ne s'adressent pas à M. Andrade en particulier, mais à toute conception de la Statique, considérée comme une science isolée, se suffisant à elle-même. Il y a dans une telle Statique une partie géométrique, indépendante du sens physique des vecteurs, qu'il y a intérêt à séparer de la Mécanique, et qui a une clarté toute géométrique. Malheureusement, le sens physique de ces vecteurs, de ces *causes* d'un mouvement qui ne se produit pas (en Statique), échappe à bien des personnes, pour qui aussi la notion d'*effort*, dont assurément elles ne contestent pas la réalité, n'a pas la netteté qu'elles désireraient. Mais, après tout, il est peut-être sans inconvénient qu'il y ait deux Écoles, pourvu que tout le monde écrive les mêmes équations d'équilibre et de mouvement. Rien, dans ce qui précède, n'est pour diminuer la valeur d'une exposition qui touche aux points les plus essentiels de la Mécanique et qui contient d'ailleurs des Chapitres importants, que j'ai dû laisser de côté, comme celui qui se rapporte au principe de d'Alembert, que M. Andrade défend énergiquement contre Reech, et à propos duquel il fait une remarque bien intéressante sur le caractère invariant des réactions des liaisons.

Quelques bons esprits regrettent le caractère trop analytique de la Mécanique rationnelle, telle qu'elle est enseignée habituellement : ils voudraient que l'enseignement de la Mécanique se reliât plus étroitement à celui de la Physique ; ils sacrifieraient volontiers à ce désir quelques-uns des plus beaux Chapitres de la Mécanique classique. On peut tout au moins désirer qu'il se constitue, à côté de l'enseignement de cette Mécanique classique, un autre enseignement qui répond à des besoins très réels, et il faut savoir gré à ceux qui s'y efforcent, comme le fait M. Andrade. Une bonne partie de son Livre est consacrée aux corps déformables ; il étudie les déformations, et la distribution des vitesses dans le milieu ; il développe les théorèmes de Stokes et d'Helmholtz, les propriétés des tubes et des surfaces tourbillonnaires, puis les propositions fondamentales de la théorie de l'élasticité. Deux Chapitres se rapportent aux fluides ; on y trouvera en particulier la théorie dynamique des tourbillons, dont la théorie cinématique a déjà été faite. Une dernière partie se rapporte aux problèmes du constructeur. M. Andrade y développe les hypothèses complémentaires qui permettent de s'attaquer à ces problèmes et traite quelques cas simples : il fait, à ce propos, une instructive excursion du côté de la Statique graphique.

Le Volume se termine par quatre Notes : la première concerne une ingénieuse démonstration, due à M. Morin, de la règle de composition des forces. Cette démonstration est comme celle de Poisson, indépendante à l'égard du postulatum d'Euclide. Dans la seconde, l'auteur montre que *le théorème d'Euler sur les rotations finies permet de fonder une théorie de l'équivalence des vecteurs, qui est la clef des propriétés métriques dans les trois géométries d'Euclide, de Lobatchewsky et de Riemann*. La troisième Note a pour titre : *Sur l'impossibilité d'une composition des stabilités en l'absence d'une fonction des forces*. La dernière, enfin, se rapporte à une idée de Poinsot, sur la possibilité de mettre en évidence le mouvement de rotation de la Terre, au moyen d'un système explosif : M. Andrade a institué, dans cet ordre d'idées, une suite d'expériences qui ne sont pas encore terminées. On voit que sa curiosité s'attaque à des sujets très divers.

J. T.

MÉLANGES.

SUR QUELQUES FORMULES RELATIVES AU NOMBRE DES CLASSES;

Par M. LERCH.

1. Considérons les formes quadratiques

$$ax^2 + bxy + cy^2,$$

ayant un discriminant négatif $-\Delta = b^2 - 4ac$, et où les coefficients extérieurs a et c sont positifs; je suppose que les formes (a, b, c) sont primitives, c'est-à-dire que les coefficients a, b, c n'ont aucun diviseur commun, et que le discriminant $-\Delta$ soit *fondamental;* cela veut dire que le nombre Δ n'admet aucun diviseur carré impair et que l'on a $\Delta \equiv 3 \pmod 4$ lorsque Δ est impair et $\frac{\Delta}{4} \equiv 1$ ou $\equiv 2 \pmod 4$, lorsque Δ est pair. Les formes de cette espèce se distribuent en nombre fini des classes de formes équivalentes; nous représentons par $\mathrm{Cl}(-\Delta)$ le nombre des classes, et par (a, b, c) un représentant de l'une quelconque parmi ces classes.

En écrivant encore $\tau = 6$ pour $\Delta = 3$, $\tau = 4$ pour $\Delta = 4$ et $\tau = 2$ pour $\Delta > 4$, on a la formule connue [1]

$$(1) \qquad \mathrm{Cl}(-\Delta) = -\frac{\tau}{2\Delta} \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) \alpha$$

qui ne subsiste que pour des discriminants fondamentaux.

Cela posé, rappelons cette circonstance que l'expression analytique

$$(2) \qquad \mathrm{E}^{\star}(x) = x - \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi}$$

---

[1] Le symbole $\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)$ a une signification connue de la théorie des résidus quadratiques.

représente la quantité $E(x)$ ou $[x]$, lorsque x est une quantité positive et fractionnaire, et que l'on a

$$E^{\star}(x) = E(x) - \frac{1}{2},$$

si $x = E(x)$ est entier.

La quantité $E^{\star}(x)$ est aussi bien définie pour des valeurs négatives et sa signification arithmétique est donnée par la relation

$$E^{\star}(x) + E^{\star}(-x) = -1.$$

Rappelons-nous encore la formule

$$\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)e^{\frac{2m\alpha\pi i}{\Delta}} = \left(\frac{-\Delta}{m}\right)i\sqrt{\Delta}$$

qui également a lieu pour des discriminants fondamentaux, et dans laquelle m représente un entier positif arbitraire; on peut l'écrire

$$(3) \qquad \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\sin\frac{2m\alpha\pi}{\Delta} = \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\sqrt{\Delta};$$

on a ensuite les relations

$$(4) \qquad \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = 0, \qquad \left(\frac{\Delta-\alpha}{\Delta-a}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right).$$

Cela étant, remplaçons dans l'équation (2) la lettre x par $x + \frac{\alpha m}{\Delta}$, multiplions par $\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)$ et faisons la somme des résultats pour $\alpha = 1, 2, 3, \ldots, \Delta - 1$; en nous servant des formules (3) et (4) nous aurons d'abord

$$\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)E^{\star}\left(x+\frac{\alpha m}{\Delta}\right) = \frac{m}{\Delta}\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\alpha + \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}$$

ou, d'après la formule (1),

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)E^{\star}\left(x+\frac{\alpha m}{\Delta}\right) + \frac{2m}{\pi}\,\mathrm{Cl}(-\Delta) \\ &\quad = \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}.\end{aligned}\right.$$

En comparant ce résultat avec le cas de $m = 1$, on en conclut la relation suivante, qui est purement arithmétique :

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{2}{\tau}\left[m - \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\right]\mathrm{Cl}(-\Delta) \\ \quad = \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\mathrm{E}^{\star}\left(x+\frac{\alpha}{\Delta}\right) - \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\mathrm{E}^{\star}\left(x+\frac{\alpha m}{\Delta}\right). \end{cases}$$

En prenant $x = 0$, les quantités $\mathrm{E}^{\star}\left(x+\frac{\alpha}{\Delta}\right)$ s'annulent et il s'ensuit

$$(7)\qquad \frac{2}{\tau}\left[m - \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\right]\mathrm{Cl}(-\Delta) = -\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\mathrm{E}^{\star}\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right).$$

Si le nombre m est divisible par Δ, cette formule ne nous donne rien de nouveau ; il faut donc admettre que m ne soit pas divisible par Δ. Dans ce cas, la fraction $\frac{\alpha m}{\Delta}$ ne devient entière que pour certains diviseurs α de Δ et, par conséquent, les termes correspondants sont multipliés par les facteurs nuls $\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)$; on peut donc écrire, au lieu de (7),

$$(7^{\star})\qquad \frac{2}{\tau}\left[m - \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\right]\mathrm{Cl}(-\Delta) = -\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\mathrm{E}\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right).$$

En posant $m = 2$ on est conduit à considérer la quantité

$$-\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\mathrm{E}\left(\frac{2\alpha}{\Delta}\right);$$

les termes correspondants aux valeurs de $\alpha = 1, 2, \ldots, \left[\frac{\Delta}{2}\right]$ sont nuls et il reste

$$-\sum_{\alpha=\left[\frac{\Delta}{2}\right]+1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right),$$

ce qui, à cause de la relation (4), se réduit à

$$\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\Delta}{2}\right]}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right).$$

On a donc la formule

$$(8) \qquad \sum_{\alpha=1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = \frac{2}{\tau}\left[2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right] \mathrm{Cl}(-\Delta).$$

Je suppose maintenant $\Delta > 4$ et par conséquent $\tau = 2$; en posant $m = 4$, l'équation (7^*) donne

$$\left[4-\left(\frac{4}{\Delta}\right)\right] \mathrm{Cl}(-\Delta) = -\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) \mathrm{E}\left(\frac{4\alpha}{\Delta}\right).$$

En convenant d'écrire

$$\sum_{a}^{b}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = \mathbf{S}(a, \ldots, b),$$

le deuxième membre n'est autre chose que l'expression

$$-\mathbf{S}\left(\frac{\Delta}{4}, \ldots, \frac{\Delta}{2}\right) - 2\mathbf{S}\left(\frac{\Delta}{2}, \ldots, \frac{3\Delta}{4}\right) - 3\mathbf{S}\left(\frac{3\Delta}{4}, \ldots, \Delta\right);$$

la seconde des équations (4) nous fournit les relations

$$\mathbf{S}\left(\frac{3\Delta}{4}, \ldots, \Delta\right) = -\mathbf{S}\left(0, \ldots, \frac{\Delta}{4}\right),$$
$$\mathbf{S}\left(\frac{\Delta}{2}, \ldots, \frac{3\Delta}{4}\right) = -\mathbf{S}\left(\frac{\Delta}{4}, \ldots, \frac{\Delta}{2}\right),$$

et notre expression peut s'écrire par conséquent

$$3\mathbf{S}\left(0, \ldots, \frac{\Delta}{4}\right) + \mathbf{S}\left(\frac{\Delta}{4}, \ldots, \frac{\Delta}{2}\right) = \left[4-\left(\frac{4}{\Delta}\right)\right] \mathrm{Cl}(-\Delta).$$

Or, le premier membre de l'équation (8) n'est autre chose que la quantité $\mathrm{S}\left(0, \ldots, \frac{\Delta}{4}\right) + \mathrm{S}\left(\frac{\Delta}{4}, \ldots, \frac{\Delta}{2}\right)$ et par conséquent

$$\mathbf{S}\left(0, \ldots, \frac{\Delta}{4}\right) + \mathbf{S}\left(\frac{\Delta}{4}, \ldots, \frac{\Delta}{2}\right) = \left[2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right] \mathrm{Cl}(-\Delta).$$

Les deux dernières équations nous fournissent les résultats

suivants :

$$(9)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\Delta}{4}\right]}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)=\frac{2+\left(\frac{2}{\Delta}\right)-\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{2}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

$$(10)\qquad \sum_{\alpha=\left[\frac{\Delta}{4}\right]+1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)=\frac{2-3\left(\frac{2}{\Delta}\right)+\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{2}\,\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

Ces deux formules sont plus commodes pour le calcul effectif que les formules (1) ou (8), mais on peut trouver des formules où il figure un nombre de termes encore moindre.

Je prends, à cet effet, $m=3$ dans l'équation (7^*) qui donne

$$\left[3-\left(\frac{-\Delta}{3}\right)\right]\mathrm{Cl}(-\Delta)=-\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\mathrm{E}\left(\frac{3\alpha}{\Delta}\right).$$

Le deuxième membre n'est autre chose que la quantité

$$-\sum_{\alpha=\left[\frac{\Delta}{3}\right]+1}^{\left[\frac{2\Delta}{3}\right]}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)-2\sum_{\alpha=\left[\frac{2\Delta}{3}\right]+1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right),$$

et il est aisé de voir que la première somme est nulle, de sorte que notre expression se réduit à la somme

$$-2\sum_{\alpha=\left[\frac{2\Delta}{3}\right]+1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)=2\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\Delta}{3}\right]}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right),$$

et l'on a l'équation

$$(11)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\Delta}{3}\right]}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)=\frac{3-\left(\frac{-\Delta}{3}\right)}{2}\,\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

Cela étant, retranchons membre à membre les équations (9) et (11); il s'ensuit la formule cherchée

$$(12)\qquad \sum_{\alpha=\left[\frac{\Delta}{4}\right]+1}^{\left[\frac{\Delta}{3}\right]}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)=\frac{1-\left(\frac{\Delta}{2}\right)+\left(\frac{\Delta}{3}\right)+\left(\frac{\Delta}{4}\right)}{2}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

dans laquelle le nombre des termes à calculer est environ douze fois moindre que dans la formule (1).

La formule (6) se réduit à (1) pour m infini. On peut la vérifier d'ailleurs directement, si le nombre m est premier avec Δ. Car, dans ce cas, le second membre peut s'écrire

$$\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\left[\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\mathrm{E}^*\left(x+\frac{\alpha}{\Delta}\right)-\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha m}\right)\mathrm{E}^*\left(x+\frac{\alpha m}{\Delta}\right)\right].$$

En observant que les parties fractionnaires des quantités

$$\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\left(x+\frac{\alpha}{\Delta}\right) \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, \Delta-1)$$

sont égales, à l'ordre près, aux parties fractionnaires des quantités

$$\left(\frac{-\Delta}{\alpha m}\right)\left(x+\frac{\alpha m}{\Delta}\right),$$

il s'ensuit que notre quantité est égale à la différence

$$\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\left[\sum\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\frac{\alpha}{\Delta}-\sum\left(\frac{-\Delta}{\alpha m}\right)\frac{\alpha m}{\Delta}\right],$$

ce qui, d'après la formule (1), n'est autre chose que le premier membre de l'équation (6).

Dans le cas où les nombres m et Δ ont un diviseur commun plus grand que un, la formule (6) devient

$$(6^a) \qquad \frac{2m}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)=-\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\mathrm{E}^*\left(x+\frac{\alpha m}{\Delta}\right).$$

En supposant que le plus grand commun diviseur des nombres m et Δ soit un nombre impair Δ'', je pose

$$m=m'\Delta'', \qquad \Delta=\Delta'\Delta'';$$

ensuite, soit $\mathrm{D}''=\pm\Delta''$ un discriminant, alors le nombre

$$\mathrm{D}'=\frac{-\Delta}{\mathrm{D}''}=\mp\Delta'$$

sera également un discriminant, et les nombres Δ' et Δ'' n'auront aucun diviseur commun, sans quoi le discriminant $-\Delta$ ne pourra être fondamental.

Le deuxième membre de l'équation (6^a)

$$S = -\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)E^*\left(x+\frac{\alpha m'}{\Delta'}\right)$$

se transforme en posant

$$\alpha = \rho + \beta\Delta' \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, \Delta', \beta = 0, 1, \ldots, \Delta''-1),$$

et puisque

$$\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = \left(\frac{D'D''}{\rho+\beta\Delta'}\right) = \left(\frac{D'}{\rho}\right)\left(\frac{D''}{\rho+\beta\Delta'}\right),$$

puis

$$E^*\left(x+\frac{\alpha m'}{\Delta'}\right) = \left[E^*\left(x+\frac{\rho m'}{\Delta'}\right)-\frac{\rho m'}{\Delta'}\right]+\frac{m'}{\Delta'}(\rho+\beta\Delta'),$$

on aura évidemment

$$S = -\sum_{\rho=1}^{\Delta'}\left(\frac{D'}{\rho}\right)\left[E^*\left(x+\frac{\rho m'}{\Delta'}\right)-\frac{\rho m'}{\Delta'}\right]\sum_{\beta=0}^{\Delta''-1}\left(\frac{D''}{\rho+\beta\Delta'}\right)$$
$$-\frac{m'}{\Delta'}\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\alpha\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right).$$

Or les Δ'' quantités $\rho+\beta\Delta'$ ($\beta = 0, 1, 2, \ldots, \Delta''-1$) étant congrues, suivant le module Δ'', aux nombres $1, 2, 3, \ldots, \Delta''$, on aura

$$\sum_{\beta=1}^{\Delta''-1}\left(\frac{D''}{\rho+\beta\Delta'}\right) = \sum_{\nu=1}^{\Delta''}\left(\frac{D''}{\nu}\right) = 0,$$

et, par conséquent,

$$S = -\frac{m'}{\Delta'}\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\alpha\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = -\frac{m}{\Delta}\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\alpha\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right),$$

ce qui est bien la quantité $\frac{2m}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta)$.

La formule (12), dans le cas où Δ est ou premier ou le produit d'un nombre premier par 4 ou par 8, donne lieu à l'introduction des fonctions de Bernoulli, d'après une remarque fort ingénieuse de Lebesgue [1], qui a été développée par M. Hurwitz [2].

---

[1] *Journal de Liouville*, t. VII, p. 157. Lebesgue fait cette remarque que « la solution précédente n'est bonne qu'en théorie ». Ce point de vue l'a probablement empêché de poursuivre cette excellente voie.

[2] *Acta mathematica*, t. XIX.

2. En posant $m = 1$ dans la formule (5) et en y supposant

$$0 \leq x < \frac{1}{\Delta},$$

ladite formule deviendra

$$(13) \qquad \frac{2}{\tau} \mathrm{Cl}(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{\cos 2\nu x \pi}{\nu} \qquad \left(0 \leq x < \frac{1}{\Delta}\right).$$

C'est une généralisation de la formule de Dirichlet

$$(14) \qquad \frac{2}{\tau} \mathrm{Cl}(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{\nu=1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{1}{\nu};$$

mais celle-ci subsiste quel que soit Δ, tandis que la formule (13) n'a été établie que dans le cas d'un discriminant fondamental. Pour avoir une véritable extension de la formule (14) j'emploie l'expression sous forme finie qui s'obtient immédiatement

$$(15) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{1}{\nu} = \frac{\pi}{2\Delta} \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \cot \frac{h\pi}{\Delta},$$

qui permet d'écrire l'équation (14) comme il suit

$$(16) \qquad \mathrm{Cl}(-\Delta) = \frac{\tau}{4\sqrt{\Delta}} \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \cot \frac{h\pi}{\Delta}.$$

Cela étant, je me rappelle la formule élémentaire

$$\pi \cot u\pi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x\pi(u+k)}{u+k} \qquad (0 < x < 1):$$

en y posant $u = \frac{h}{\Delta}$ et en faisant la somme, après avoir multiplié par $\left(\frac{-\Delta}{h}\right)$, on aura

$$\pi \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \cot \frac{h\pi}{\Delta} = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{\cos \frac{2x\pi}{\Delta}(h+k\Delta)}{h+k\Delta}.$$

En faisant usage des équations

$$\left(\frac{-\Delta}{h+k\Delta}\right) = \left(\frac{-\Delta}{h}\right), \qquad \left(\frac{-\Delta}{h-k\Delta}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{h}\right), \qquad h > 0,$$

et qu'on peut écrire

$$\left(\frac{-\Delta}{h+k\Delta}\right) = \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{sgn}(h+k\Delta) \qquad (k \gtreqless 0),$$

où sgn z représente le signe de la quantité z, il vient

$$\pi\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\frac{h\pi}{\Delta} = \Delta\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos\frac{2\nu x\pi}{\Delta}}{\nu}\operatorname{sgn}(\nu),$$

où il faut rejeter le terme insignifiant $\nu = 0$; les termes de la dernière série sont égaux deux à deux, et il vient, par conséquent,

$$(17) \qquad \mathrm{Cl}(-\Delta) = \frac{\tau\sqrt{\Delta}}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos\frac{2\nu x\pi}{\Delta}}{\nu} \qquad (0 \leqq x < 1).$$

Nous avons admis encore la valeur de $x = 0$, puisque dans ce cas la formule devient celle de Dirichlet (14).

Cette équation qu'on peut écrire

$$(17^a) \qquad \mathrm{Cl}(-\Delta) = \frac{\tau\sqrt{\Delta}}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu} \qquad \left(0 \leqq x < \frac{1}{\Delta}\right)$$

a lieu pour tous les discriminants. On peut l'établir aussi par un autre procédé où intervient la représentation trigonométrique de la fonction $x)$ E* mais, je me réserve, à une prochaine occasion, de développer cette démonstration et des relations entre les nombres des classes qu'on rencontre sur cette voie. J'annonce seulement qu'on est conduit de cette manière à pénétrer plus profondément dans la nature de la série (17) en pouvant démontrer qu'elle subsiste dans un intervalle plus étendu, à savoir

$$0 \leqq x < \frac{Q^2}{Q'};$$

ici le nombre Q^2 signifie le plus grand diviseur carré de Δ, de sorte que $\frac{\Delta}{Q^2} = \Delta'$ donne le discriminant fondamental $-\Delta'$, tandis que Q' représente le produit des facteurs premiers différents du nombre Q.

En multipliant les deux membres de l'équation (17) par un facteur convenable et en intégrant de zéro à 1, on parvient à des formules intéressantes que je me réserve de publier prochainement.

Ici je veux rappeler seulement les deux équations suivantes qu'on trouve immédiatement

$$\text{(18)}\qquad \mathrm{Cl}(-\Delta) = \frac{\tau\Delta\sqrt{\Delta}}{4\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\sin\frac{2\nu\pi}{\Delta}}{\nu^2},$$

$$\text{(19)}\qquad \mathrm{Cl}(-\Delta) = \frac{\tau\Delta^2\sqrt{\Delta}}{2\pi^3}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\sin^2\frac{\nu\pi}{\Delta}}{\nu^3}.$$

3. Dans plusieurs Notes publiées dans les *Mémoires de l'Académie impériale de Prague,* j'ai cherché à établir quelques propriétés des séries de Kronecker, à savoir

$$\mathrm{K}(a, b, c; \sigma, \tau; s) = \sum_{m,n}{}' \frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{(am^2+bmn+cn^2)^s}$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \qquad \text{excepté} \qquad m = n = 0),$$

et de leurs généralisations. Le point de vue sous lequel j'envisage cette quantité et qui est celui de Riemann à propos de la série

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots$$

permet de simplifier des calculs qui ont été publiés par l'illustre géomètre de l'Académie de Berlin, où il a établi des résultats très importants.

Cependant, je me suis contenté du côté analytique de ces questions, en cherchant des liaisons avec les transcendantes elliptiques et avec la fonction gamma. J'ai trouvé, par exemple, que le développement, par la série de Maclaurin, de la fonction

$$\mathrm{K}(a, b, c; \sigma, \tau; s)$$

commence par les termes suivants :

$$-1 + \mathrm{K}_1(a, b, c; \sigma, \tau; 0)\,s + \ldots.$$

où l'on a posé

$$K_1 = -2\log 2\pi + 2\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(\tau)}{\Gamma(\tau)} - \frac{\Gamma'(1-\tau)}{\Gamma(1-\tau)}$$
$$+ \log c + \Phi(\sigma, \tau, \omega_1) + \Phi(\sigma, \tau, \omega_2);$$

$$\omega_1 = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}, \qquad \omega_2 = \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}, \qquad \Delta = 4ac - b^2 > 0,$$
$$a > 0, \qquad c > 0;$$

$$\Phi(\sigma, \tau, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau+n}\left[\frac{1}{e^{-2\omega\pi i(n+\tau)-2\sigma\pi i}-1} + \frac{1-\operatorname{sgn}(n+\frac{1}{2})}{2}\right].$$

Ce résultat m'a fourni la relation suivante, dans laquelle j'ai posé

$$\Psi(\sigma) = \frac{\Gamma'(\sigma)}{\Gamma(\sigma)}:$$

$$(20)\quad \begin{cases} \Psi(\sigma) + \Psi(1-\sigma) - \Psi(\tau) - \Psi(1-\tau) \\ \quad = \log(-\omega^2) + \Phi\left(\tau, \sigma, \dfrac{-1}{\omega}\right) + \Phi\left(-\tau, \sigma, \dfrac{-1}{\omega}\right) \\ \qquad - \Phi(\sigma, \tau, \omega) - \Phi(-\sigma, \tau, \omega); \end{cases}$$

dans cette formule figure une variable arbitraire ω dont la partie imaginaire est supposée positive.

En y prenant $\tau = \frac{1}{2}$, $\omega = i$, on reçoit un développement de la fonction $\Psi(\sigma)$ à convergence rapide :

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{\Gamma'(\sigma)}{\Gamma(\sigma)} + \dfrac{\pi}{2}\cot\sigma\pi + 2\log 2 - \Gamma'(1) \\ \quad = -4\displaystyle\sum_m \frac{1}{m}\,\frac{\cos 2\sigma\pi - e^{-m\pi}}{e^{m\pi}+e^{-m\pi}-2\cos 2\sigma\pi} \\ \qquad - \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+\sigma}\cdot\frac{1}{e^{2\pi(n+\sigma)}+1} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\sigma}\,\frac{1}{e^{2\pi(n-\sigma)}+1}, \end{cases}$$

où $m = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$.

Les relations de cette catégorie conduisent à des séries rapidement convergentes pour représenter le nombre des classes d'un discriminant fondamental positif D. En représentant par T, U la solution principale de l'équation de Pell

$$T^2 - DU^2 = 4.$$

on aura la formule

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(\mathrm{D}).\log\frac{\mathrm{T}+\mathrm{U}\sqrt{\mathrm{D}}}{2}\\ &\quad=\frac{\pi}{2}\sqrt{\mathrm{D}}\sum_{h=1}^{\mathrm{D}-1}\left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right)\frac{h^2}{\mathrm{D}^2}-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right)\log\left(1-e^{-\frac{2m\pi}{\sqrt{\mathrm{D}}}}\right)\\ &\quad\quad-\sqrt{\mathrm{D}}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right)\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{e^{\frac{2m\pi}{\sqrt{\mathrm{D}}}}-1}, \end{aligned}\right.$$

dans laquelle la première somme peut être simplifiée encore.

Dans les *Sitzungsberichte* de Berlin de 1889, Kronecker [1] a donné la formule

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{P}'(-\Delta)}{\mathrm{P}(-\Delta)}+\mathrm{C}+\log 4\pi^2+\log\sqrt{\Delta}\\ &\quad=\frac{1}{\mathrm{Cl}(-\Delta)}\sum_{a,\,b,\,c}\log\Lambda'\left(0,\,0,\,\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c},\,\frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right), \end{aligned}\right.$$

dans laquelle la sommation s'étend aux formes primitives non équivalentes et positives (a, b, c) du discriminant négatif $-\Delta = b^2 - 4ac$. La signification des symboles qui figurent dans cette formule est expliquée par les équations suivantes :

$$\mathrm{P}(-\Delta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{n},\qquad \mathrm{P}'(-\Delta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{\log n}{n},$$

$$\mathrm{C}=-\Gamma'(1),$$

$$\Lambda'(0,\,0,\,\omega_1,\,\omega_2)=\frac{4\pi^2\sqrt{\Delta}}{c}\left[\frac{\mathfrak{S}_1'(0\,|\,\omega_1)}{2\pi}\,\frac{\mathfrak{S}_1'(0\,|\,\omega_2)}{2\pi}\right]^{\frac{2}{3}}.$$

En employant l'écriture

$$\mathrm{H}(\omega)=e^{\frac{\omega\pi i}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2n\omega\pi i})$$

je préfère mettre Λ' sous la forme

$$\Lambda'(0,\,0,\,\omega_1,\,\omega_2)=4\pi^2\sqrt{\Delta}\left[\frac{\mathrm{H}(\omega_1)\,\mathrm{H}(\omega_2)}{\sqrt{c}}\right]^2,$$

---

(1) *Zur Theorie der elliptischen Functionen*, art. XVI.

de sorte que la formule de Kronecker s'écrira

$$(23^*)\qquad \frac{P'(-\Delta)}{P(-\Delta)} + C - \log\Delta = \frac{2}{Cl(-\Delta)}\sum_{a,b,c}\log\frac{H(\omega_1)H(\omega_2)}{\sqrt{c}},$$

où

$$\omega_1 = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c},\qquad \omega_2 = \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{c}.$$

Je vais prouver que la somme $P'(-\Delta)$ peut s'exprimer sous forme finie à l'aide de la transcendante gamma. Pour ce but j'emploie la formule de Kummer

$$(a)\quad \begin{cases} \log\Gamma(x) + \frac{1}{2}\log\frac{\sin x\pi}{\pi} + \left(x-\frac{1}{2}\right)(C+\log 2\pi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n\pi}\sin 2nx\pi \\ (0 < x < 1), \end{cases}$$

et la formule également connue

$$(b)\qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\sin\frac{2hm\pi}{\Delta} = \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\sqrt{\Delta}$$

qui a lieu pour les discriminants fondamentaux et pour un entier positif m quelconque. En posant dans la formule (a) $x = \frac{h}{\Delta}$, multipliant par $\left(\frac{-\Delta}{h}\right)$ et faisant la somme pour $h = 1, 2, \ldots, \Delta-1$, on a d'abord

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\Gamma\left(\frac{h}{\Delta}\right) + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\frac{\sin\frac{h\pi}{\Delta}}{\pi}$$
$$+ (C+\log 2\pi)\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left(\frac{h}{\Delta}-\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n\pi}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\sin\frac{2nh\pi}{\Delta}.$$

En faisant usage des équations identiques

$$\sum_h\left(\frac{-\Delta}{h}\right) = 0,\qquad \sum_h\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\sin\frac{h\pi}{\Delta} = 0,$$

le premier membre devient

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\Gamma\left(\frac{h}{\Delta}\right) + (C+\log 2\pi)\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta},$$

et le second se transforme, à l'aide de la formule (b), en série

$$\sqrt{\Delta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{\log n}{n\pi} \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}P'(-\Delta).$$

En faisant usage de la formule (1) on a, par conséquent,

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}P'(-\Delta) = \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\Gamma\left(\frac{h}{\Delta}\right) - (C+\log 2\pi)\frac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)$$

ou bien

$$(24)\qquad P'(-\Delta) = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\Gamma\left(\frac{h}{\Delta}\right) - \frac{2\pi}{\tau\sqrt{\Delta}}(C+\log 2\pi)\,\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

L'équation (14)

$$P(-\Delta) = \frac{2\pi}{\tau\sqrt{\Delta}}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)$$

permet donc d'écrire

$$(25)\qquad \frac{P'(-\Delta)}{P(-\Delta)} + C + \log 2\pi = \frac{\tau}{2\,\mathrm{Cl}(-\Delta)}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\Gamma\left(\frac{h}{\Delta}\right).$$

Grâce à cette relation, la formule (23^*) de Kronecker prend une forme plus simple

$$(26)\qquad \frac{\tau}{2}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\Gamma\left(\frac{h}{\Delta}\right) = 2\sum_{a,b,c}\log\left[\sqrt{\frac{2\Delta\pi}{c}}\,H(\omega_1)\,H(\omega_2)\right]$$

$$\left(\omega_1 = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}, \qquad \omega_2 = \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right),$$

que nos méthodes permettent d'ailleurs d'obtenir plus directement.

NOTE.

La formule (6) nous fournit une nouvelle propriété du signe de Legendre. Pour l'obtenir, je multiplie les deux membres par $e^{-ux}\,dx$ et j'intègre de zéro à l'infini; il vient

$$\frac{2m}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta) = -u\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\int_0^{\infty} e^{-ux}E^*\left(x+\frac{\alpha m}{\Delta}\right)dx.$$

Or on a

$$u\int_0^\infty e^{-ux}\mathrm{E}^\star\left(x+\frac{\alpha m}{\Delta}\right)dx = \mathrm{E}\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right)+\frac{e^{u\mathrm{R}\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right)}}{e^u-1},$$

en représentant par $\mathrm{R}(z)=z-\mathrm{E}(z)$ le plus petit reste positif de la quantité z; il s'ensuit

$$\frac{2m}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta) = -\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\mathrm{E}\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right)-\frac{1}{e^u-1}\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)e^{u\mathrm{R}\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right)};$$

or, d'après l'équation (6), on a, pour $x=0$,

$$\frac{2m}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta) = -\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\mathrm{E}\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right),$$

et la même équation découle de la relation précédente en prenant u infini: on a, par conséquent,

$$\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)e^{u\mathrm{R}\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right)} = 0,$$

lorsque le plus grand commun diviseur Δ'' des nombres Δ et m surpasse l'unité; en posant $m=m'\Delta''$, $\Delta=\Delta'\Delta''$, on aura

$$\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)e^{u\mathrm{R}\left(\frac{\alpha m'}{\Delta'}\right)} = 0.$$

La variable u étant arbitraire, on en conclut que les quantités $\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)$, pour lesquelles le reste $\mathrm{R}\left(\frac{\alpha m'}{\Delta'}\right)$ a une valeur donnée, ont leur somme égale à zéro, de sorte que

$$\sum_{\alpha=0}^{\Delta''-1}\left(\frac{-\Delta}{\rho+\alpha\Delta'}\right)=0 \qquad (\Delta'\Delta''=\Delta).$$

Ici $-\Delta$ est un discriminant fondamental et Δ' un quelconque parmi ses diviseurs proprement dits.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXI.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXI; 1897. — PREMIÈRE PARTIE.



TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MÉLANGES.

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXI.

24192 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL,
GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION,
MOLK, POKROVSKY, RADAU, RAYET, RAFFY,
S RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOUEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXI. — ANNÉE 1897.

(TOME XXXII DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1897

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

Tome VII; 1893 (¹).

Appell (*P.*). — Forme des intégrales abéliennes des diverses espèces. (A. 5-8).

La méthode très simple, développée par M. Appell pour obtenir les formes classiques de ces intégrales, dans le cas des intégrales de première espèce attachées à une équation du degré n

$$f(x, y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0),$$

repose sur la remarque suivante :

En supposant que

$$\int \varphi(x, y)\, dx$$

soit une telle intégrale, la somme

$$P_{k-2} = y_1^k \varphi(x, y_1) + y_2^k \varphi(x, y_2) + \ldots + y_n^k \varphi(x, y_n),$$

où $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont les diverses déterminations de y et où k est un entier positif ou nul, est un polynome qui pour $k = 0$ ou 1 est identiquement nul. On en conclut, en supposant $k = 0, 1, \ldots, n-1$, et en combinant convenable-

---

(¹) Voir *Bulletin*, XVIII₂, p. 131.

ment les équations ainsi obtenues que, si l'on fait

$$Q(x, y) = P_0 b_{m-3} + P_1 b_{m-2} + \ldots P_{m-3} b_0.$$

en posant

$$b_0 = a_0, \qquad b_1 = a_0 y + a_1, \qquad b_2 = a_0 y^2 + a_1 y + a_2, \qquad \ldots.$$

on aura

$$\varphi(x, y) = \frac{Q(x, y)}{f'_y(x, y)}.$$

Un procédé analogue s'applique aux intégrales de troisième et de seconde espèce.

Duhem (*P.*). — Sur les lois générales de l'induction électrodynamiques. (B. 1-28).

Déduction, par des méthodes analogues à celles que l'auteur a développées au Livre XIII de ses *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, des formules qu'a données M. von Helmholtz pour représenter les lois générales de l'induction électromagnétique entre conducteurs d'étendue finie en tous sens [*Ueber die Theorie der Elektrodynamik*, IIIte Abhandlung (*Crelle,* t. 78, p. 309; 1874)].

Cosserat (*E.*). — Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces. (N. 1-62).

L'auteur, en introduisant les symboles de M. Christoffel, relatifs à une forme différentielle quadratique, établit deux systèmes de formules (C), (D) qui complètent heureusement les formules (A), (B) des *Leçons* de M. Darboux. Une première application de ces formules est faite, dans la deuxième Partie, à l'établissement des conditions vérifiées par l'élément linéaire d'une surface rapportée à ses asymptotiques et à la démonstration du théorème de M. Dini sur la représentation sphérique des asymptotiques d'une surface.

Dans la troisième Partie, M. Cosserat aborde l'étude des congruences de droites, fondée sur l'introduction de la représentation sphérique de leurs développables (Ribaucour, *Étude des élassoïdes*, § 188; Guichard, *Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques; Annales de l'École Normale*, 3e série, t. VI). En menant par le centre d'une sphère de rayon 1 la parallèle à une droite de la congruence, on obtient sur la sphère un point qui est dit *la représentation sphérique de la droite.* Aux développables de la congruence correspondent ainsi, sur la sphère, des courbes qui en constituent la représentation sphérique. En particulier, si l'on considère une congruence formée de normales à une surface S, la représentation sphérique des développables de cette congruence sera identique à la représentation sphérique des lignes de courbure de S. M. Guichard a montré que la représentation sphérique des développables d'une congruence peut former un système de courbes quelconque et que, quand ce système est donné, la détermination des congruences correspondantes se fait à l'aide de l'équation

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} + \beta \frac{\partial \rho}{\partial u} + \beta_1 \frac{\partial \rho}{\partial v} + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} + \frac{\partial \beta_1}{\partial v} + f\right)\rho = 0.$$

à laquelle satisfait la demi-distance ρ entre les points focaux d'une droite de la congruence; les coefficients de cette équation ne dépendant que de la représentation sphérique donnée. Après avoir retrouvé les résultats de M. Guichard, l'auteur donne une solution nouvelle de ce problème traité par M. Darboux au Tome II de ses *Leçons :* Déterminer toutes les surfaces sur lesquelles les développables d'une congruence donnée interceptent un réseau conjugué. Il ramène la question à l'intégration de l'équation adjointe à l'équation en ρ, d'où résulte la généralisation suivante d'un théorème bien connu relatif aux congruences formées de normales à une surface.

Le problème de la détermination des surfaces découpées suivant un réseau conjugué par les développables d'une congruence donnée équivaut à celui de la recherche des congruences admettant même représentation sphérique de leurs développables que cette congruence.

Le problème de déterminer toutes les enveloppes de sphères telles que leurs cordes de contact forment une congruence qui soit la congruence donnée se ramène également, conformément à un théorème de M. Darboux, à l'intégration de l'équation adjointe à l'équation en ρ.

La quatrième Partie traite des réseaux conjugués : l'auteur y montre que les différentes équations dont on a fait dépendre le problème de la déformation d'une surface comme aussi celles relatives à la déformation infinitésimale ne sont autres que les équations qui permettent de déterminer certains réseaux conjugués tracés sur la surface.

Bendixson (*J.*). — Détermination des équations résolubles algébriquement, dans lesquelles chaque racine peut s'exprimer en fonction rationnelle de l'une d'entre elles. (C. 1-71).

C'est un intéressant résumé d'un travail publié en suédois dans les *Ofversigt of kongl. Vetenskaps-Akademiens Forhandlingar* (1891). L'auteur y montre comment on peut parvenir à la détermination des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation algébrique soit résoluble par radicaux, sans recourir à la théorie de Galois, et en étendant seulement les considérations employées par Abel dans les deux célèbres Mémoires sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement et sur les équations résolubles algébriquement.

Andoyer (*H.*). — Sur quelques inégalités de la longitude de la Lune. (E. 1-19).

L'auteur continue ses recherches sur la *Théorie de la Lune* (Tome VI des *Annales de la Faculté*). Il calcule avec la même approximation que Delaunay les coefficients des inégalités de la longitude de la Lune qui ne dépendent que de la première puissance de l'excentricité de l'orbite de la Terre. Ces coefficients sont en désaccord avec ceux de Delaunay à partir du huitième ordre inclusivement, toujours, et quelquefois même à partir du septième ordre. Les calculs sont faits par deux méthodes distinctes, les mêmes que dans le premier Mémoire de M. Andoyer. Ce dernier signale la cause d'erreur de Delaunay.

Duhem (*P.*). — Des actions électrodynamiques et électromagnétiques. (G. 1-52).

Dans ce nouveau travail, M. Duhem aborde l'étude des actions électrodynamiques et des actions électromagnétiques, en se bornant aux corps conducteurs magnétiques ou non. La méthode qu'il emploie est l'extension de celle qu'il a appliquée aux conducteurs linéaires dans le Tome III de ses *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*. Les résultats auxquels il parvient sont en complet accord avec ceux qu'a formulés M. von Helmholtz, parfois sans démonstration.

Le Vavasseur (*R.*). — Sur le système d'équations aux dérivées partielles simultanées auxquelles satisfait la série hypergéométrique à deux variables $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$. (F. 1-205).

On sait que cette série peut être définie par la formule

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

en posant

$$(\lambda, k) = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1), \qquad (\lambda, 0) = 1$$

k est un entier positif.

Dans le Chapitre I, M. Le Vavasseur s'occupe des relations qui existent entre la fonction $F_1(\lambda, \beta, \beta', \gamma; x, y)$ et ses contiguës. Il établit que toute fonction contiguë

$$F_1(\alpha+p, \beta+q, \beta'+q', \gamma+r; x, y),$$

où p, q, q', r sont des entiers, est une fonction linéaire et homogène de F_1, $\frac{\partial F_1}{\partial x}$, $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, les coefficients étant des fonctions rationnelles de x et de y. Il en déduit, par une voie naturelle, le système S des équations aux dérivées partielles du second ordre auxquelles satisfait la fonction F_1. En suivant une marche identique, il étudie de la même façon les dix intégrales particulières que l'on obtient en donnant à g et h dans l'expression

$$\int_g^h u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'} du,$$

les valeurs 0, 1, ∞, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$.

Dans le Chapitre II, l'auteur établit un Tableau de 64 intégrales du système S analogue au Tableau des 24 intégrales de Kummer relatif à l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait la série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

Le Chapitre III est occupé par la recherche des relations qui existent entre trois ou quatre des dix intégrales précédemment citées, lorsqu'elles ne sont pas distinctes.

M. Le Vavasseur a dressé quatorze Tableaux de relations où ne figurent que les relations qui ne se déduisent pas simplement de celles précédemment trouvées.

Soit

$$\varphi(u) = u^{a-1}(u-1)^{b-1}(u-x)^{c-1}(u-y)^{d-1},$$

$$\omega_1 = \int_0^x \varphi(u)\,du, \qquad \omega_2 = \int_0^y \varphi(u)\,du, \qquad \omega_3 = \int_0^1 \varphi(u)\,du,$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \xi, \qquad \frac{\omega_2}{\omega_3} = \eta;$$

M. Picard a montré que si x et y, considérés comme fonctions de ξ, η, étaient des fonctions uniformes de ces variables, les dix nombres $a+b-1$, $a+c-1$, $a+d-1$, $b+c-1$. $b+d-1$, $c+d-1$, $2-b-c-d$, $2-c-d-a$, $2-d-a-b$, $2-a-b-c$ étaient les inverses de nombres entiers. M. Le Vavasseur détermine, dans le Chapitre IV, tous les groupes de nombres a, b, c, d qui jouissent de cette propriété.

Dans le Chapitre V, il établit le groupe du système (S) en suivant la méthode de M. Picard; puis, considérant la forme quadratique ternaire, à indéterminées conjuguées, que ce groupe laisse inaltérée, il montre que son déterminant invariant ne peut s'annuler qu'en même temps que tous ses premiers mineurs.

Enfin M. Le Vavasseur cherche dans quels cas le système (S) a son intégrale générale algébrique.

Kœnigs (*G.*). — La Géométrie réglée et ses applications. Étude bibliographique. (55 p.).

C'est le Chapitre V de cette intéressante étude qui, sous un titre singulièrement modeste, constitue un véritable exposé de la matière. M. Kœnigs en était resté à la définition des coordonnées tétraédriques d'une droite, qui vérifient l'équation

$$\omega(x) = x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6 = 0;$$

un changement de variable fournit les coordonnées générales et transforme $\omega(x)$ en une autre forme quadratique. En la supposant réduite à une somme de six carrés, on obtient les coordonnées de M. Klein, le système des six complexes en involution deux à deux, les quinze congruences communes à deux de ces complexes, les demi-quadriques communes à trois complexes, qui forment dix quadriques fondamentales, liées elles-mêmes aux tétraèdres fondamentaux. Les propriétés des permutations de six lettres, grâce aux notations choisies, trouvent une intéressante application dans cette théorie. Les pôles d'un plan par rapport aux six complexes fondamentaux sont sur une même conique, et cette proposition est le point de départ de l'étude d'une belle configuration formée de seize plans et de seize points, chaque plan contenant six points et chaque point étant commun à six plans.

L'auteur développe ensuite le curieux rapprochement observé par M. Klein entre la Géométrie de la droite dans l'espace et celle des propriétés métriques d'un espace à quatre dimensions ou plutôt d'une quadrique dans un espace à cinq dimensions. Considérant une quadrique ordinaire, M. Kœnigs expose comment, lorsqu'on représente une quadrique sur un plan, les transformations homographiques d'une quadrique en elle-même ont pour image le groupe de transformations qui conserve la famille des cercles du plan. De même la Géométrie de l'espace réglé est identique à la Géométrie anallagmatique d'un espace à quatre dimensions.

J. T.

ANNALES DES PONTS ET CHAUSSÉES (1).

7e série, t. V; 1er semestre 1893.

Widmer (*M*.). — Notice sur le tramway funiculaire de Belleville. (513-625, 21 fig., 3 pl.).

Ce Mémoire est divisé en trois Parties. La première contient la description du matériel; la deuxième, les calculs théoriques; la troisième, les expériences. En réalité, les calculs développés dans le Mémoire n'ont été établis que lorsque l'auteur a été en possession des résultats d'un grand nombre d'expériences; ils ont donc une certaine utilité au point de vue pratique.

Belliard (*J.-A*.). — Note sur l'erreur relative que l'on commet en substituant dx à ds dans la formule de Navier (pièces courbes). (728-748, 4 fig.).

Applications aux arcs paraboliques et aux arcs circulaires. M désignant le moment de flexion, il s'agit d'évaluer $\int My\,ds$ après avoir substitué dx à ds.

Debauve (*A*.). — Notice sur la distribution d'eau de la ville de Pithiviers. (749-773, 1 fig., 1 pl.).

A signaler, dans ce travail, le calcul de la résistance des cuves en tôle à fond sphérique.

Collignon (*E*.). — Une remarque sur la multiplication. (790-792).

L'auteur, préoccupé des simplifications à apporter à la multiplication arithmétique, propose de remplacer les nombres donnés par des groupements d'autres nombres ne renfermant que les seuls chiffres 0, 1, 2 et 5; cette transformation revient à remplacer 3 par $2+1$ ou $5-2$, 4 par $5-1$, 6 par $5+1$, 7 par $5+2$, 8 par $10-2$, 9 par $10-1$.

Au surplus, cette Note a été reproduite au *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. G. de Longchamps (p. 169-171, 1893).

Jacquier (*J*.). — Note sur les efforts secondaires qui peuvent se produire dans les systèmes articulés à attaches rigides. (1142-1159, 12 fig.).

L'auteur a été amené à rechercher dans quelles proportions la rigidité des attaches, dans les ponts métalliques, pouvait augmenter le travail du métal calculé d'après les méthodes ordinaires.

(1) Voir *Bulletin*, XVII, 185; 1893.

L'Ouvrage de M. Maurice Kœchlin, intitulé : *Applications de la Statique graphique* (*Encyclopédie Lechalas*) contient la traduction partielle d'une Note publiée à ce sujet par M. le professeur Ritter, de Zurich.

Le but de ce nouvel article est de traiter directement cette question et de donner plus de précision aux formules antérieurement obtenues.

Deslandres (*H.*). — Expériences sur la résistance des rouleaux métalliques. (1160-1174, 6 fig.).

Une étude théorique analogue a été exposée dans le précédent Volume par M. Galliot (voir *Bulletin*, p. 192, 1893); mais l'auteur du présent article fait voir que la formule proposée par M. Galliot ne conviendrait pas aux expériences qu'il a en vue, et qui ont porté sur deux sortes de mesures :

1° Étude des diamètres des cylindres comprimés entre deux surfaces planes;

2° Étude des surfaces planes comprimées par l'intermédiaire de cylindres.

Ces deux sortes de mesures ont d'ailleurs été faites par deux méthodes absolument différentes.

Tome VI, 2e semestre 1893.

Renaud (*M.*). — Note sur les nouvelles écluses du canal Saint-Denis. (44-110, 20 fig., 6 pl.).

A la fin de cette Notice on trouve une indication des calculs effectués pour déterminer la résistance des pièces métalliques employées à la construction des portes des écluses.

Galliot. — Essai de comparaison des effets des forces normales et obliques. (111-171, 8 fig., 1 pl.).

L'auteur a cherché quel était le degré d'exactitude ou d'erreur de chacune des deux lois qui se partagent les ingénieurs au sujet des effets produits à l'intérieur d'un corps par des efforts extérieurs normaux ou obliques. Il a trouvé des lois assez compliquées, faisant intervenir à la fois la composante normale et la composante tangentielle et se réduisant en particulier, pour les plus grands efforts ou les plus grandes déformations, à des expressions simples où intervient la somme de la composante normale et d'un certain nombre de fois la tangentielle.

Ces lois sont absolument exactes à une assez grande distance du point d'application de la force, puisqu'elles sont déduites d'une solution des équations de l'élasticité; elles donnent donc, tout au moins pour ces grandes distances, une notion juste de ce qui se passe réellement.

Flamant (*A.*). — De l'influence, sur la flexion des poutres, de la position superficielle de la charge. (228-260, 9 fig.).

Il est prouvé que les efforts développés dans une poutre rectangulaire reposant sur deux appuis de niveau et chargée en son milieu d'un poids unique ne

sont pas les mêmes si cette charge est posée sur la surface supérieure ou suspendue à la face inférieure.

Grâce aux travaux théoriques de M. Boussinesq et à une judicieuse remarque de M. Stokes, il est possible aujourd'hui de trouver une évaluation approximative de ces efforts, et cette évaluation s'accorde aussi exactement que possible avec le résultat d'observations antérieures faites par M. le professeur Carus Wilson, de Montréal. On peut donc dire que la question est résolue au degré d'approximation que comportent les méthodes d'observation. L'objet de ce Mémoire est de donner un aperçu des recherches, tant théoriques que d'observation, qui ont permis de l'élucider.

Galliot. — Notice sur le pont-levant de Larrey. (261-334, 8 fig., 4 pl.).

La description technique de cet Ouvrage est accompagnée des calculs justificatifs des principales dimensions.

Collignon (E.). — Note sur la multiplication (336-337).

Autre procédé de multiplication, signalé à l'auteur par M. Allan Cunningham.

La méthode repose sur l'emploi des chiffres négatifs et sur la substitution, aux gros chiffres 6, 7, 8 et 9, des différences 10 — 4, 10 — 3, 10 — 2, 10 — 1, que l'on écrit $1\bar{4}$, $1\bar{3}$, $1\bar{2}$, $1\bar{1}$. Ainsi, dans ce système positivo-négatif, un nombre tel que 7289795 s'écrit $1\bar{3}3\bar{1}0\bar{2}\bar{1}5$.

Pour une méthode tout à fait analogue, consulter le *Journal de Mathématiques élémentaires* (p. 265-270, 1894. G. de Longchamps).

Tavernier (H.). — Reconstruction des ponts Morand et Lafayette sur le Rhône, à Lyon. (349-563, 28 fig., 12 pl.).

Description terminée, comme d'habitude, par une indication du calcul des dimensions et un exposé des épreuves de résistance.

Galliot. — Tableaux graphiques des moments fléchissants sous charges d'épreuve dans les ponts pour voies de terre et de quelques propriétés qui en facilitent le tracé. (714-731, 14 fig., 1 pl.).

Ces Tableaux sont destinés à remplacer ceux que M. Kleitz avait dressés en 1877. Ils ne s'appliquent d'ailleurs qu'à des ouvertures inférieures à 35 mètres.

Ces Tableaux donnent les moments fléchissants correspondant à certaines charges d'épreuve déterminées. L'auteur a jugé utile de résumer à cette occasion la théorie sur laquelle repose la construction des courbes des moments fléchissants maximum.

Belliard (J.-A.). — Mémoire sur le calcul de la résistance des arcs paraboliques à grande flèche. (759-847, 18 fig.).

L'auteur reprend ici, avec plus de détails, les considérations déjà présentées dans son Mémoire de 1893.

Fossa-Mancini. — Note sur le débit des puits dans les terrains perméables. (848-873, 6 fig.).

L'auteur expose que, si dans une Note de 1890 il n'a fait qu'entrevoir la configuration des filets liquides dans un des cas les plus simples, il peut donner maintenant l'expression analytique des trajectoires des filets et de la surface de la nappe, non seulement dans le cas d'un puits unique ménagé dans une nappe, mais aussi dans le cas de plusieurs puits ouverts dans la même nappe et ayant des débits différents. Trois figures, notamment, représentent des réseaux de courbes orthogonales, dont la configuration est intéressante à étudier.

Hausser (*A.-E.*) et *Cunq* (*L.*). — Note sur la détermination des moments fléchissants les plus grands dans les sections d'une poutre posée librement sur deux appuis. (977-989, 8 fig., 1 pl.).

Dans la situation actuelle, la solution du problème dont il s'agit est susceptible d'être obtenue d'un grand nombre de manières, et l'on peut choisir parmi les méthodes de MM. Barré, Lefort, Pelletreau, Maurice Lévy, J. Michel, Gascougnolle, etc.

Les auteurs du présent article exposent deux nouvelles méthodes qui semblent concilier la simplicité et la rapidité d'exécution.

Tome VII, 1er semestre 1894.

Considère. — Utilité des chemins de fer d'intérêt local. Tarifs. Formule d'exploitation. (16-151, 1 fig.).

Reprise d'une discussion déjà exposée dans les *Annales*, 7e série, t. III et IV.

Colson (*C.*). — Note sur le nouveau Mémoire de M. Considère. (152-164).

L'auteur estime de son devoir de dire, en quelques mots, pourquoi les nouveaux et très sérieux arguments de son éminent contradicteur ne lui font pas abandonner des idées qui ont d'autant plus besoin d'être défendues, qu'elles ont moins de chances de devenir populaires.

Walckenaer (*C.*). — Note sur les relations entre la pression, le volume et la température de l'acide carbonique. (165-228, 5 pl.).

Très intéressant Mémoire de Thermodynamique, dans lequel on trouve un exposé très documenté des théories de la liquéfaction des gaz, du point cri-

tique, de l'équation caractéristique, et des travaux et observations des physiciens.

Bazin (*H.*). — Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoir. (249-357, 8 fig., 5 pl., 64 tabl.).

L'auteur a fait voir, dans un précédent article, comment la nappe noyée en dessous succède à la nappe adhérente, lorsque l'on augmente progressivement le débit du déversoir, l'écoulement en aval restant complètement libre. Mais il a montré, d'autre part, que le point de passage de l'une à l'autre des deux formes peut être modifié par un exhaussement du niveau d'aval et que, moyennant une hauteur convenable de ce niveau, il est possible d'obtenir pour toute charge d'amont la nappe noyée en dessous. Ce genre de nappe se rencontre, par suite, très fréquemment dans la pratique. C'est de lui qu'il est exclusivement question dans ce quatrième article.

D'Ocagne (*M.*). — Les abaques de remblai et de déblai construits au moyen de la méthode des points isoplèthes. (467-479, 1 pl.).

L'auteur a déjà traité ce sujet (t. IV, p. 168) à propos d'une Note antérieure de M. Locherer (t. III, p. 631). Il y revient avec plus de détails et il expose la construction d'un abaque spécial, qui comprend, en réalité, trois abaques : un pour le profil en remblai, un pour le profil en déblai et un pour le terme complémentaire à ajouter dans les cas mixtes.

De Préaudeau. — Recherches expérimentales sur les pièces droites chargées par le bout. (498-604, 46 fig. 10 tabl.).

L'auteur s'est proposé, après avoir rappelé les données théoriques de la résistance des matériaux sur les pièces aboutées, suivant qu'elles sont centrées ou chargées excentriquement, d'exposer le résultat d'expériences faites pour étudier la déformation de ces pièces. Il donne les formules qui résument ces expériences et il termine en indiquant quelques règles de construction au moyen desquelles on peut, tout en tenant compte des faits observés, simplifier l'usage des formules expérimentales.

Ce Mémoire s'applique d'ailleurs exclusivement aux constructions composées d'éléments rigides.

Pelletreau (*A.*). — Note sur les profils sans extensions des grands barrages en maçonnerie. (619-660, 4 fig.).

Le but de l'auteur n'est pas de donner une méthode nouvelle de calcul. Il cherche seulement à simplifier, et il se propose d'établir qu'étant données les idées actuellement admises, après des calculs longs et compliqués, après des épures nombreuses et pénibles, on arrive à un profil qu'on aurait pu trouver du premier coup.

Théry (*P.*) — Note sur les enclenchements. (688-717, 15 fig.).

Laissant de côté les enclenchements binaires, l'auteur s'occupe des enclenchements ternaires et des enclenchements doubles, et des principes à adopter pour obtenir leur représentation graphique.

Collignon (E.). — Sur un théorème de Géométrie. (718-720).

Démonstration nouvelle, très simple et intuitive, de la proposition connue : L'arc de cercle est la plus courte ligne qu'on puisse tracer d'un point A à un point B sous la condition d'enfermer entre cette ligne et la corde AB une aire déterminée.

L'auteur de la démonstration, M. Ader, observe que la ligne minimum AMB qui entoure une surface S donnée doit être symétrique par rapport à la perpendiculaire CI, élevée au milieu I de la corde AB.

Deslandres. — Note sur les épreuves par charge roulante et l'action des chocs. (735-758, 1 pl.).

Considération sur les épreuves à charge roulante.

Calcul de l'amplitude du mouvement oscillatoire imprimé à une poutre par un choc défini.

Examen de différents chocs auxquels les travées métalliques peuvent se trouver exposées.

Action locale des chocs sur les travées métalliques.

Résumé.

Annexe. — Calcul des efforts maxima pouvant être produits dans les barres de treillis des panneaux centraux du pont de Pontoise par une charge statique qui donne lieu à une flèche déterminée.

Daujon. — Mémoire sur le calcul des poutres droites à travées solidaires. (759-835, 38 fig.).

Ce Mémoire se divise en six Chapitres :

Chap. I. — Définition et rappel de notions préliminaires.

Chap. II. — Propriétés des lignes d'influence du moment fléchissant.

Chap. III. — Propriétés des lignes d'influence de l'effort tranchant.

Chap. IV. — Tracé des lignes d'influence du moment fléchissant ou de l'effort tranchant.

Chap. V. — Calcul des poutres à travées solidaires.

Chap. VI. — Extension de l'usage des lignes d'influence à la détermination des flèches et des réactions des appuis.

Les Chapitres II, III et IV sont extraits entièrement de la *Statique graphique* de M. Maurice Lévy ou des publications de M. Bertrand de Fontviolant.

Tome VIII, 2e semestre 1894.

Belliard (J.-A.). — Note sur la détermination *a priori* de la section des arcs paraboliques à grande flèche. (54-86, 9 fig.).

L'auteur a cherché à établir des formules permettant de calculer *a priori* la section, généralement indéterminée, de l'arc en fonction de l'effort limite que l'on a choisi et des charges permanentes et mobiles auxquelles l'arc doit résister.

Godard (*T.*). — Recherches sur le calcul de la résistance des tabliers des ponts suspendus. (105-189, 22 fig.).

Jusqu'à la publication, dans les *Annales* (1886, t. XII), du Mémoire de M. Maurice Lévy, sur les ponts suspendus à tablier rigide, on peut dire qu'il n'existait pas de méthode rationnelle pour le calcul de la résistance des ponts suspendus. Cette méthode ne permet pas de déterminer les efforts qui se développent sous l'action des poids voyageurs; elle ne s'applique pas non plus à la nombreuse et intéressante classe des ponts suspendus dont le tablier, doué d'une certaine flexibilité, n'est pas pourvu de garde-corps en métal et de haubans.

Tout récemment, M. de Boulongne a cherché à aborder le problème du calcul des ponts suspendus à tablier articulé en son milieu, mais en supposant toujours l'égalité d'action de toutes les tiges de suspension et une rigidité très grande du tablier.

L'auteur a envisagé le problème d'une manière plus générale et sans faire d'hypothèse particulière sur la rigidité du tablier et sur la forme de la fonction inconnue que représente l'effort supplémentaire qui prend naissance dans les diverses tiges de suspension sous l'influence d'un poids voyageur. Cette forme se détermine facilement, d'ailleurs, d'après les conditions mêmes du problème.

Note. — Pour les errata et rectifications, *voir* t. IX, p. 456-458.

Ribière. — Propriétés optiques des appareils de phares. (190-219, 6 fig., 1 tabl.).

La conclusion de ce Mémoire est qu'il n'y a aucun motif de renoncer au type de lentilles plan-convexes de Fresnel, mais qu'il semble que les imperfections de la pratique font perdre aux anneaux catadioptriques une partie de leurs avantages théoriques.

Jasinsky (*F.*). — Recherches sur la flexion des pièces comprimées. (233-364, 654-657, 39 fig., 1 pl.).

Ce problème a depuis longtemps sollicité l'attention des ingénieurs.

Déjà en 1729, Musschenbrœk avait tiré de ses expériences la conclusion que la résistance des tiges élastiques comprimées dans le sens de leur longueur croît en raison inverse du carré de cette dernière.

Ce n'est que vers 1774 que, partant d'une loi approximative formulée par Jean Bernoulli, L. Euler établit la base de la théorie de la résistance des pièces comprimées. Lagrange a étudié certaines conclusions de la théorie d'Euler à l'aide d'une analyse rigoureuse dans son Mémoire célèbre *Sur la figure de la colonne.*

Grâce au développement actuel de la théorie des fonctions elliptiques, et

2ᵉ P. F.

surtout aux travaux de MM, Clebsch, Maurice Lévy, Halphen, Collignon, etc. le problème a reçu une solution très satisfaisante, qui a d'ailleurs tiré profit des expériences de MM. Bauschinger, Tetmayer et Considère.

Tome IX, 1er semestre 1895.

Dupuy. — Mémoire sur la résistance des rivets. (5-107, 31 fig., 3 tabl.).

Description et résultats d'expériences et de mesures, appuyées de quelques explications théoriques sur le fonctionnement des rivets dans diverses pièces d'assemblages.

d'Ocagne (M.). — Formules générales pour la compensation d'un réseau topographique. (240-242).

Détermination de la position la plus probable d'un point relevé sur un terrain, d'après n ensembles d'observations, la probabilité des écarts de position étant connue.

Adam (P.). — Note sur le *Traité des calculs des raccordements paraboliques dans les tracés de chemins de fer,* par M. de Leber. (338-348, 5 fig.).

Pour là pratique des tracés, M. de Leber recommande aux ingénieurs de ne se servir que de la parabole cubique déjà connue depuis longtemps. Mais il en présente une théorie exacte, qui faisait défaut jusqu'ici, et il en facilite l'emploi au moyen de Tables numériques basées sur une échelle de six constantes qui suffisent dans tous les cas et dont le choix a été ratifié par le Congrès international des Chemins de fer, réuni à Saint-Pétersbourg en 1892.

M. de Leber, reprenant la théorie approchée des raccordements paraboliques, a été amené à introduire des courbes spéciales, qu'il appelle *radioïdes,* et il distingue la radioïde aux abscisses, aux cordes ou aux arcs, suivant que le rayon de courbure du raccordement varie en raison inverse de l'avancement x compté sur l'abscisse, la corde ou l'arc.

La première radioïde se compose de deux ovales superposées; la seconde, de deux lemniscates de Bernoulli; la troisième a ses coordonnées exprimées à l'aide d'intégrales auxquelles M. de Leber a donné le nom de *sinus* et de *cosinus potentiels;* cette courbe admet quatre points asymptotiques.

De ces trois courbes, c'est la lemniscate de Bernoulli qui, par les facilités pratiques de son tracé, présenterait un avantage incontestable.

Belliard (J.-A.). — Mémoire sur l'encastrement des arcs paraboliques et des arcs circulaires et de son influence sur la résistance de ces arcs. (375-421, 11 fig.).

Ce Mémoire a pour objet de compléter les différentes études auxquelles s'est livré l'auteur sur la résistance des arcs paraboliques par la recherche des

effets que produit sur leur résistance l'encastrement de ces arcs à leurs extrémités.

de Franchimont (*C.*). — Notice sur la construction du troisième bassin à flot de Rochefort. (459-602, 27 fig., 9 pl., 8 tabl.).

Cette description est accompagnée de l'indication des formules justificatives des dimensions adoptées pour les ouvrages de maçonnerie et de ferronnerie, etc.

Durand-Claye (*L.*). — Essai sur la limite de la résistance à la rupture par traction des ciments et autres matériaux analogues. (604-612, 3 fig.).

Des expériences faites à ce sujet, l'auteur a été amené à admettre que le nombre que l'on déduit de l'essai des ciments au moyen de briquettes rompues par traction reste au dessous de la valeur réelle de la résistance de cette matière, d'une quantité qui semblerait se rapprocher de la moitié pour les briquettes en 8. Celui que l'on déduit de l'essai au moyen de barrettes rompues par flexion est au-dessus de la valeur réelle de la résistance, d'une quantité qui paraîtrait devoir se tenir dans les environs du quart ou du tiers.

Souleyre. — Mémoire sur les arcs articulés et les arcs encastrés. (618-657, 4 fig., 1 pl.).

La théorie générale de la déformation des pièces courbes a été complètement exposée par Bresse, d'après la méthode de Saint-Dridan.

Elle permet d'établir facilement les équations d'équilibre des pièces courbes et notamment des arcs de forme quelconque, quel que soit leur mode de liaison avec les appuis. Bresse a étudié ces formules en détail dans le cas des arcs articulés à fibre neutre circulaire. M. Collignon les a simplifiées pour les arcs paraboliques articulés; M. J. Resal les a posées sous leur forme générale dans le cas de l'encastrement.

Toute la difficulté de l'étude de ces formules consiste dans la simplification des calculs, qui paraissent des moins attrayants à ceux qui les abordent.

Le but du présent Mémoire est de montrer :

1° Que le calcul des arcs peut le plus souvent se faire avec simplicité et que les arcs encastrés s'étudient, pratiquement, avec la même facilité que les arcs articulés;

2° Que l'encastrement permet de réaliser de grosses économies de métal pour les arcs à grande flèche.

L'auteur étudie tout d'abord les arcs en forme de chaînette, pour lesquels il n'y a aucune difficulté d'intégration et, de là, il passe aux arcs paraboliques, qui donnent les formules les plus simples de toutes.

Subdivisions de ce Mémoire : I. Exposé. II. Arcs de chaînette à section constante. III. Arcs de chaînette de rayon de giration constant, dont la section varie de la clef aux retombées comme le rapport $\frac{ds}{dx}$. IV. Arcs paraboliques. V. Arcs articulés. VI. Résultats numériques. Encastrement et articulation. VII. Arcs semi-encastrés et voûtes en maçonnerie. VIII. Résumé.

Note annexe. — Lignes d'influence des arcs paraboliques.

Tome X ; 2ᵉ semestre 1895.

Collignon (E.). — Note sur la méthode des deux surcharges continues pour le calcul des ponts métalliques à poutres droites. (5-76, 42 fig.).

Principales subdivisions de cette étude :

I. Travées indépendantes. — Moments fléchissants.
II. Application de la méthode des deux surcharges aux poutres continues.
III. Efforts tranchants.
IV. Recherche de la courbe élastique.

Le Rond (L.). — Note sur les barrages en maçonnerie. (77-89, 6 fig.).

Évaluation des sous-pressions dues aux fissures.

D'Ocagne (M.). — A propos d'un abaque pour le calcul des distributions d'eau. (100-101).

Compte rendu d'un Mémoire récemment publié dans la *Revue du Génie*, par M. le Commandant L. Bertrand, intitulé : *Description et usage d'un abaque destiné à faciliter la solution des problèmes relatifs à la distribution des eaux*.

L'abaque se compose de neuf échelles, six simples et trois doubles, qui donnent le moyen, en prenant des alignements entre les échelles correspondantes, de résoudre à vue tous les problèmes sus-mentionnés.

Dupuy et *Cuënot*. — Barèmes destinés à faciliter le calcul des ponts métalliques à une ou plusieurs travées. (117-247, 30 fig., 42 tabl.).

Ce Mémoire forme le cinquième fascicule du Rapport de la mission spéciale confiée à M. Dupuy pour examiner les conditions de résistance des ouvrages métalliques.

Adam (P.). — Emploi de la lemniscate de Bernoulli dans les raccordements de chemins de fer, avec des Tables numériques. 383-414, 6 fig., 3 tabl.).

Étude systématique du tracé imaginé par M. de Leber. (*Voir* au Tome IX le compte rendu du Traité publié par ce savant ingénieur.)

M. de Leber n'ayant pas effectivement appliqué les radioïdes aux raccordements, l'auteur se propose de montrer que la lemniscate de Bernoulli est d'une application au moins aussi simple que la parabole cubique, dans le cas le plus fréquent d'un raccordement joignant un alignement droit à un cercle, sur

une ligne à construire ou sur une ligne déjà construite et munie de raccordements ordinaires dont la réfection est projetée. Il y a donc lieu de préférer la lemniscate à la parabole cubique, et cela non seulement pour les courbes de faibles rayons, mais pour les courbes de tous rayons. La lemniscate a même l'avantage de donner des raccordements un peu moins longs que la parabole.

Des Tables numériques annexées à ce Mémoire permettent de réaliser rapidement cette application.

Belliard (J.-A.). — Étude comparative, au point de vue de la résistance, d'un arc de parabole et d'un arc de chaînette de même flèche et de même ouverture et soumis aux mêmes charges permanentes et mobiles. (415-449, 7 fig.).

La chaînette étant une courbe d'équilibre, on pourrait être tenté de croire que cet arc est supérieur, au point de vue de la résistance, à l'arc parabolique. L'auteur de ce Mémoire prouve que c'est le contraire qui a lieu. L'arc parabolique est donc de tous les arcs celui qui se déforme le moins et qui, par conséquent, est le plus résistant et, par suite, le plus économique.

Bosramier. — Note sur un appareil destiné à la mesure des flèches dans les épreuves des ponts métalliques. (450-454, 1 pl.).

Description d'un appareil très portatif, d'une installation rapide, et dont la disposition est analogue à celle du peson à emboîtement cylindrique et à ressort.

Dupuy, Lethier et *Guillot.* — Pont de Cosne. Comparaison entre le travail calculé et le travail observé. (461-527, 26 fig.).

Description sommaire de l'ouvrage. Faits constatés. Considérations générales.

Calcul du travail du métal en tenant compte des déformations.

Annexe. — Détermination de certaines équations.

Les mesures ont été effectuées au moyen des appareils Manet perfectionnés par M. C. Rabut.

Denizet (F.). — Note sur la limite de déclivité à adopter pour les tramways urbains à adhérence. (645-657).

Examen des divers moyens proposés pour assurer la sécurité des transports par tramways en produisant leur arrêt rapide.

Tome XI; 1er semestre 1896.

Ledru. — Note sur l'utilité des chemins de fer d'intérêt local. Tarifs. Formules d'exploitation. (383-405, 1 fig.).

L'auteur estime qu'il y aura encore utilité à reprendre l'examen de cette question, même après la discussion qui s'est élevée entre MM. Considère et Colson.

D'Ocagne (M.). — Application générale de la nomographie au calcul des profils de remblai et déblai. (406-481, 21 fig., 1 pl.).

L'auteur se propose de résoudre, dans ce Mémoire, le problème ainsi énoncé : « Chaque profil étant caractérisé par les deux éléments variables, cote sur l'axe et déclivité transversale du terrain naturel, construire un ou plusieurs abaques sur lesquels se puissent lire immédiatement les valeurs correspondantes des éléments suivants : aires de remblai et de déblai, longueur d'emprise, longueur du talus. »

Maurel (C.). — Théorie élémentaire de la déformation des pièces prismatiques droites. (547-567, 6 fig.).

On détermine les flèches, pour chaque cas, par l'intégration de l'équation de la fibre neutre déformée. Cependant cette étude n'exige pas, d'une manière absolue, l'emploi du calcul différentiel et intégral; elle peut être abordée par les mathématiques élémentaires, sans recourir à la notion analytique du rayon de courbure, et sans hypothèses autres que celles explicitement exprimées par tous les auteurs, ou implicitement contenues dans les équations différentielles.

Notamment, le calcul des flèches pour les cas ordinaires de la pratique, et la détermination plus ardue des points d'inflexion dans les pièces prismatiques encastrées aux deux extrémités, s'obtiennent sans difficulté à l'aide d'une simple sommation numérique.

C'est à l'étude de ces deux questions que se borne le présent Mémoire, en limitant les exemples au strict nécessaire.

Rabut (C.). — Note sur l'enregistrement des flèches et la mesure des déformations des ponts métalliques. (574-576, 1 fig.).

Exposé d'une question de priorité au sujet de l'appareil décrit dans le précédent Volume par M. Bosramier.

Tourtay. — Détermination rapide de l'épaisseur à donner aux culées des ponts de faible ouverture. Calcul de la poussée et du poids de la voûte. (579-599, 7 fig., 1 pl.).

Exposé d'une méthode approximative permettant d'apprécier rapidement l'épaisseur à adopter.

Souleyre. — Note sur l'emploi de quatre types d'arcs dans les ponts, viaducs et fermes métalliques de grande portée (600-662, 16 fig.).

Les quatre types d'arcs envisagés sont les suivants :

1° Arcs sans articulations encastrés aux naissances;

2° Arcs sans articulation à la clef, articulés aux naissances;
3° Arcs à trois articulations, articulés à la clef et aux naissances;
4° Arcs articulés à la clef et encastrés aux naissances.

Une Note insérée au Tome IX a indiqué les résultats généraux de la comparaison des arcs des deux premiers types. Cette comparaison n'était faite que pour l'action des forces verticales (en dehors de l'examen des effets dus aux variations de température).

Le but de la présente Note est de compléter cette comparaison en y introduisant les arcs du troisième et du quatrième type et de l'étendre au cas où l'on considère des forces horizontales agissant dans le plan de l'arc, c'est-à-dire au cas des fermes métalliques de grande portée.

Comme il ne s'agit que d'indiquer des résultats d'ensemble, utiles pour l'étude des avant-projets, la comparaison ne sera faite que pour les arcs paraboliques. Avec les formules générales, on passerait facilement du cas de la parabole au cas de la chaînette.

Blot (*G.*). — Note sur l'appareil hélicoïdal des voûtes biaises par la méthode Theuil. (663-680, 2 pl.).

Rappel sommaire de l'épure de l'appareil hélicoïdal. Application de la méthode Theuil. Détermination de la valeur exacte de l'angle divergent; comparaison avec les résultats approximatifs obtenus par M. Theuil.

Pasqueau (*A.*). — Les nouveaux quais verticaux du port de Bordeaux. (696-781, 4 fig. 8 pl.).

Ce Mémoire, surtout technique, renferme cependant un Chapitre qu'il convient de signaler ici, et dans lequel est exposée une discussion des théories et formules relatives à la stabilité des quais, murs et voûtes.

H. B.

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DELL' ISTITUTO DI BOLOGNA. Bologna, tip. Gamberini e Parmeggiani; in-4° ([1]).

Serie 5ª, t. I; 1890.

Riccardi (*P.*). — [V2*b*]. Essai d'une bibliographie euclidienne; 4e Partie; addition à la *liste chronologique* des éditions des œuvres d'Euclide, et travaux relatifs au 5e postulatum de ses éléments. (27-84).

([1]) Voir *Bulletin*, t. XVI_2, p. 5.

Righi (*A.*). — [T7*c*]. Sur les forces élémentaires électromagnétiques et électrodynamiques. (139-187).

L'auteur, après avoir retrouvé les formules de Korteweg relatives à l'action entre deux éléments de courant, passe à résoudre le problème qu'il s'est proposé, c'est-à-dire à déterminer de la manière la plus générale l'action entre un élément de courant et un pôle magnétique, tout en satisfaisant à la condition de l'identité entre un élément magnétique et un petit circuit fermé, qui lui soit perpendiculaire. Dans le Chapitre II, il donne les formules les plus générales, exprimant l'action entre un élément de courant et un pôle. Dans le Chapitre III, il trouve les relations qui doivent avoir lieu entre les fonctions qui entrent dans les formules générales, afin que l'action d'un élément magnétique sur un élément de courant soit identique avec l'action d'un petit circuit fermé sur le même élément. Dans le quatrième, il établit les relations qui doivent être satisfaites pour que l'on ait l'identité de l'action d'un élément de courant sur un élément magnétique et sur un petit circuit fermé. Dans le cinquième, il donne les conditions d'équivalence complète entre l'élément magnétique et le petit circuit fermé. Voici l'une des conclusions de l'auteur :

En admettant l'identité entre un élément magnétique et un petit circuit fermé perpendiculaire, il faut exprimer l'action entre un pôle et un élément de courant, par la formule de Laplace.

Ruffini (*F.-P.*). — [$M_2 2k$, $M_2 9b$]. Sur les surfaces algébriques ayant puissance par rapport à tout point de l'espace ou bien par rapport à quelques-uns de leurs points. (235-252).

Dans un autre Mémoire, inséré en ce même Recueil (4e série, t. X, p. 337-350 : *Delle curve piane, etc.*), l'auteur a étudié certaines propriétés des courbes dont il donne maintenant l'extension aux surfaces. Une surface est dite *avoir puissance par rapport à un point* O (*pôle*) lorsque le produit des rayons vecteurs est le même sur toute droite menée par O. La valeur de ce produit est appelée *puissance* de la surface par rapport au pôle. La condition pour qu'une surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0$$

ait puissance par rapport à tout point de l'espace est qu'elle soit d'ordre pair $2k$, et que la partie la plus élevée du premier membre de l'équation ait la forme

$$a_{00}(x^2 + y^2 + z^2)^k;$$

la *puissance* par rapport à (x_0, y_0, z_0) est alors

$$\pi = \frac{1}{a_{00}} f(x_0, y_0, z_0).$$

Une surface d'ordre impair $2k+1$ peut avoir puissance par rapport à quelques-uns de ses points. Cela arrive lorsque la partie la plus élevée du premier membre a la forme

$$a_0(ax + by + cz)(x^2 + y^2 + z^2)^k;$$

la surface a un (seul) plan asymptotique réel, et les pôles de puissance sont les points de contact de la surface avec les plans tangents parallèles au plan asymptotique.

Saporetti (A.). — [U1]. Troisième et quatrième méthode analytique de l'équation (astronomique) du temps et discussion des deux autres méthodes analytiques, avec la méthode synthétique des anciens astronomes et des modernes. (321-336, 1 pl.).

Pincherle (S.). — [D6f]. Nouvelle extension des fonctions sphériques. (337-369, 1 pl.).

Les polynomes $P_n(x)$ considérés d'abord par l'auteur sont les coefficients du développement de

$$T = \frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{1}{\sqrt{t^3 - 3tx + 1}},$$

et ils satisfont à l'équation aux différences du 3ᵉ ordre

$$2(n+1)F(n+1) - 3(2n+1)F(n) + (2n-1)F(n-2) = 0,$$

étant $P_{-2} = P_{-1} = 0$ et $P_0 = 1$. Il définit aussi deux autres systèmes analogues de polynomes $Q_n(x)$ et $R_n(x)$. Puis par la considération de l'intégrale définie

$$V(u, x) = \int_0^{e_i} \frac{dt}{(u-t)\sqrt{f}}$$

(e_i étant une des trois racines de $f = 0$), qui satisfait à une certaine équation linéaire du premier ordre, il arrive aussi à l'équation aux différences

$$(2n+1)F(n+1) - 3(2n-1)x F(n-1) + 2(n-1)F(n-2) = 0,$$

à laquelle satisfont les coefficients du développement de $V(u, x)$

$$a_n = \int_0^{e_i} \frac{t^n\,dt}{\sqrt{f}}$$

et, en particulier,

$$\sigma_n = \int_0^{e_1} \frac{t^n\,dt}{\sqrt{f}},$$

où e_1 est la moindre racine de $f = 0$.

A la même équation aux différences, on peut satisfaire par des systèmes de polynomes $A_n(x)$, $B_n(x)$, $C_n(x)$, par lesquels on peut exprimer toute autre intégrale de l'équation différentielle mentionnée; en particulier, on a

$$\sigma_n(x) = A_n(x) + B_n(x)\sigma_0 + C_n(x)\sigma_1,$$

σ_0, σ_1 étant des transcendantes que l'on peut exprimer par les notations de la théorie des fonctions elliptiques. Il y a des relations entre les intégrales des

deux équations récurrentes, et l'on a, par exemple,

$$A_n = (-1)^n \frac{4.6\ldots 2n}{3.5\ldots(2n-1)} (R_n Q_{n-1} - Q_n R_{n-1}).$$

Après avoir ajouté quelques observations sur les racines de $f = 0$, il cherche les courbes (du plan x) lieux des points où les racines de $f = 0$ ont un module constant. Elles sont rationnelles du 4e ordre et cycliques ; l'auteur les emploie pour étudier la variation des modules des racines. [Il appelle C_ρ la courbe aux points de laquelle on a $|e_1| = \rho$ (const.).]

Les σ_n sont régulières pour $x = \infty$ et de l'ordre $-(n+1)$; après avoir démontré cette proposition, l'auteur donne les conditions de convergence pour une série de $P_n(x)$ ou de $A_n(x)$ ou de $\sigma_n(x)$, et trouve des développements pour σ_0 et σ_1.

Toute fonction analytique donnée $f(x)$, régulière dans le voisinage de $x = 0$, est développable en série de $P_n(x)$,

$$f(x) = \sum a_n P_n(x),$$

à l'intérieur d'une courbe C_ρ, étant

$$a_n = -\frac{3}{4\pi i}(2n+1)\int_{C_\rho} \sigma_n(z) f(z)\, dz.$$

Pour une fonction $f(z)$, régulière dans le voisinage de $z = \infty$, on a

$$f(z) = \sum b_n \sigma_n(z);$$

étant

$$b_n = -\frac{3}{4\pi i}(2n+1)\int_{C_\rho} f(x) P_n(x)\, dx.$$

Les $P_n(x)$ et les $\sigma_n(x)$ satisfont aussi à des équations mixtes différentielles et aux différences, par exemple

$$n P_n + P'_{n-2} - x P'_n = 0,$$
$$(2n+5)\sigma_n = -4x\sigma'_n + 2\sigma'_{n-1}.$$

Enfin, les P_n et les σ_n satisfont à des équations différentielles linéaires du troisième ordre, ayant trois points singuliers à distance finie et un à l'infini :

$$4(4x^3-1)P'''_n + 96x^2 P''_n$$
$$- x(12n^2 + 24n - 91)P'_n - n(2n+3)(2n+9)P_n = 0.$$
$$4(4x^3-1)\sigma'''_n + 144x_2\sigma''_n$$
$$- x(12n^2 - 24n - 291)\sigma'_n - (n-3)(2n-7)(2n+5)\sigma_n = 0.$$

Beltrami (E.). — [T6]. Considération sur la théorie mathématique du Magnétisme. (409-453).

La plus grande difficulté que l'on trouve dans le développement de cette théorie provient de l'indétermination de ce que l'on appelle *éléments magné-*

tiques, et de leur distribution dans les corps. L'auteur, en laissant de côté la notion de ces éléments, expose une théorie du Magnétisme et, en particulier, de l'induction magnétique en substituant à cette notion celle de *polarité magnétique*, et en considérant comme base primitives et irréductibles de la théorie les deux fonctions potentielles

$$v = \frac{p}{r},$$

$$v = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}\alpha + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b}\beta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}\gamma,$$

dont la première se rapporte aux phénomènes purement apolaires, et la seconde à ceux où il entre une polarité.

Pour la fonction potentielle d'une distribution magnétique dans l'espace S

$$(1) \qquad V = \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} m_a + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} m_b + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} m_c \right) dS,$$

on a aussi l'expression

$$(2) \qquad V = \int \frac{k\, dS}{r} + \int \frac{h\, d\sigma}{r},$$

étant

$$k = -\left(\frac{\partial m_a}{\partial a} + \frac{\partial m_b}{\partial b} + \frac{\partial m_c}{\partial c} \right),$$

$$h = -(m_n + m_{n'});$$

m_n, $m_{n'}$ sont les composantes de l'intensité unitaire de la polarisation magnétique suivant les deux directions opposées de la normale à la surface σ, en supposant ces composantes calculées au moyen des valeurs de m_a, m_b, m_c relatives à la région où est dirigée respectivement la normale correspondante. Avec σ est indiqué l'ensemble des surfaces terminales de S et des surfaces de discontinuité des fonctions m_a, m_b, m_c. La forme (1) correspond à une distribution polaire, la (2) à une distribution apolaire (ou à ce que l'on appelle *magnétisme libre*) équipollente à la distribution polaire.

Étant V' une seconde fonction analogue, relative à un espace S' on a

$$\int \left(\frac{\partial V}{\partial a} m'_a + \frac{\partial V}{\partial b} m'_b + \frac{\partial V}{\partial c} m'_c \right) dS' = \int \left(\frac{\partial V'}{\partial a} m_a + \frac{\partial V'}{\partial b} m_b + \frac{\partial V'}{\partial c} m_c \right) dS,$$

ce qui est un principe de réciprocité des potentiels mutuels, valable pour les cas où S et S' n'ont pas de portion communes.

A côté de la *force magnétique* (apolaire) F

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

l'auteur considère le vecteur G (force polaire)

$$G_x = F_x + 4\pi m_x,$$
$$G_y = F_y + 4\pi m_y,$$
$$G_z = F_z + 4\pi m_z.$$

Les deux forces F et G ont, sous certains rapports, des propriétés opposées. En outre, étant F la force apolaire d'une distribution et G′ la force polaire d'une autre distribution, on a

$$\int (F_x G'_x + F_y G'_y + F_z G'_z)\, dS_\infty = 0,$$

relation remarquable que l'auteur appelle *orthogonalité intégrale* des deux forces. Il en déduit une autre expression du potentiel mutuel

$$(3) \qquad \int \left(\frac{\partial V}{\partial a} m'_a + \frac{\partial V}{\partial b} m'_b + \frac{\partial V}{\partial c} m'_c\right) dS = \frac{1}{4\pi} \int \Delta_1 V V'\, dS_\infty,$$

pour les cas où les deux distributions n'ont pas de partie commune; lorsque cette condition n'est pas satisfaite, les expressions données ne sont des potentiels mutuels que dans le sens apolaire, c'est-à-dire par rapport au magnétisme libre des deux distributions. Il faut donc distinguer le *potentiel mutuel apolaire* $\mathfrak{P}(V, V')$ donné par (3), du *potentiel mutuel polaire* $P(V, V')$ [qui coïncide avec $\mathfrak{P}(V, V')$ sous la condition que les deux distributions n'aient pas de partie commune]. L'auteur indique aussi par $\mathfrak{P}(V)$, l'autopotentiel apolaire et par $P(V)$ l'autopotentiel polaire. On a

$$\mathfrak{P}(V) = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial V}{\partial a} m_a + \frac{\partial V}{\partial b} m_b + \frac{\partial V}{\partial c} m_c\right) dS - \frac{1}{8\pi} \int \Delta_1 V\, dS_\infty.$$

Pour $P(V)$ l'auteur, par des considérations formelles, arrive à l'expression

$$P(V) = \mathfrak{P}(V) + \int \psi\, dS,$$

ψ étant, dans l'hypothèse la plus simple, une fonction quadratique et homogène des trois composantes m_a, m_b, m_c, à coefficients (constants ou variables) de dimension zéro par rapport aux trois unités fondamentales. Puis il en déduit

$$P(V, V') = \mathfrak{P}(V, V') + \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial m_a} m'_a + \frac{\partial \psi}{\partial m_b} m'_b + \frac{\partial \psi}{\partial m_c} m'_c\right) dS.$$

En appliquant ces résultats, et le principe du *minimum de l'énergie*, on trouve les équations de Poisson pour l'induction magnétique

$$\frac{\partial (V_0 + V)}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial m_a} = 0,$$

$$\frac{\partial (V_0 + V)}{\partial b} + \frac{\partial \psi}{\partial m_b} = 0,$$

$$\frac{\partial (V_0 + V)}{\partial c} + \frac{\partial \psi}{\partial m_c} = 0,$$

V_0 étant la fonction potentielle de la distribution purement induisante, et V celle de la distribution temporaire induite. Ces équations n'ont qu'une solution, et l'on a toujours $P(V) < P(V_0)$ et $P(V_0, V') = P(V'_0, V)$.

Le problème de l'induction se réduit par une transformation à déterminer

une fonction U monodrome finie et continue satisfaisant à certaines conditions caractéristiques.

Il y a un cas d'exception aux résultats obtenus pour l'induction et l'auteur le met en évidence en prenant la quadratique ψ sous la forme canonique

$$\psi = \frac{1}{2}\left(\frac{m_a^2}{\varkappa_0} + \frac{m_b^2}{\varkappa_1} + \frac{m_c^2}{\varkappa_2}\right);$$

c'est le cas où les $\varkappa$ sont négatifs, ce qui entraîne une expression négative de l'énergie. Ce fait correspond aux phénomènes des corps diamagnétiques, et l'auteur, en examinant ce cas, suppose que les deux corps S_0 et S (induisant et induit) soient plongés dans un milieu polarisable, et montre que par cette hypothèse on peut expliquer les faits diamagnétiques sans renoncer aux conditions imposées par la positivité de l'expression de l'énergie. Après, l'auteur montre comme on peut prendre pour ψ des formes différentes de la quadratique, qui ne s'accorderaient avec l'expérience que pour des forces induisantes de petite intensité. Le travail se termine par la considération des distributions polaires superficielles.

Pirondini (*G.*). — [O5]. Sur les lignes de striction et d'élargissement d'un système de courbes quelconques. (641-649).

Les points des lignes de striction ou d'élargissement du système $v =$ const. doivent satisfaire à la condition

$$E^2\frac{\partial G}{\partial u} + 2EF\frac{\partial F}{\partial u} + F^2\frac{\partial E}{\partial u} = 0;$$

elles doivent être comprises parmi les lieux des points où les trajectoires orthogonales des lignes $v =$ const. ont une courbure géodésique nulle. Lorsqu'une ligne L de striction ou d'élargissement du système v est aussi une ligne ordinaire de striction pour la surface gauche des tangentes aux lignes v, l'auteur appelle cette L une ligne *principale* de striction ou d'élargissement.

Tome II; 1891.

Ruffini (*F.-P.*). — [L¹15*a*]. Sur les podaires des coniques. (123-132).

La podaire d'une conique est en général une quartique *ayant puissance* [V. Ruffini, *Sur les courbes planes, etc.* (*Mém. de Bologne*, 4ᵉ série, t. X, p. 340)] par rapport à tout point du plan.

Arzelà (*C.*). — [C2*h*]. Sur les intégrales doubles. (133-147).

L'auteur établit dans sa généralité le théorème sur la réduction d'une intégrale double à deux intégrations successives. Puis, en introduisant la notion d'*intégrabilité uniforme*, il donne une condition pour qu'une fonction non intégrable absolument dans un champ donné soit intégrable sucessivement, et aussi une condition moins restrictive que l'ordinaire pour l'invertibilité des

deux intégrations. Enfin, il étend aux intégrales doubles la proposition connue sous le nom de *second théorème de la moyenne*.

Righi (*A.*). — [T3]. Sur la théorie du stéréoscope. (251-259).

Conditions pour que la représentation stéréoscopique soit la plus fidèle possible.

Beltrami (*E.*). — [T7*d*]. Considération sur la théorie mathématique de l'Électromagnétisme. (313-378).

L'auteur étudie les actions mutuelles entre les distributions magnétiques et galvaniques au point de vue de Maxwell, mais en cherchant à montrer ce qu'il y a de nécessaire dans la dépendance mutuelle des diverses parties de la théorie, de manière à pouvoir la fonder sur le plus petit nombre possible de faits d'expérience. Il commence en donnant pour la force polaire G (*voir* ci-dessus, t. I) une autre expression indépendante de la force apolaire F. Étant

$$M_x = \int \frac{m_a\, dS}{r}, \qquad M_y = \int \frac{m_b\, dS}{r}, \qquad M_z = \int \frac{m_c\, dS}{r},$$

et

$$V_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z},$$
$$V_y = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x},$$
$$V_z = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y},$$

on a

$$G_x = \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z},$$
$$G_y = \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x},$$
$$G_z = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}.$$

Les trois fonctions V_x, V_y, V_z, pour lesquelles on a au

$$V_x = \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} m_b - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} m_c \right) dS,$$
$$V_y = \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} m_c - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} m_a \right) dS,$$
$$V_z = \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} m_a - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} m_b \right) dS,$$

constituent ce qu'on appelle la *terne potentielle polaire* de la distribution

m_a, m_b, m_c. En posant

$$j_a = \frac{\partial m_c}{\partial b} - \frac{\partial m_b}{\partial c}, \qquad j_b = \frac{\partial m_a}{\partial c} - \frac{\partial m_c}{\partial a}, \qquad j_c = \frac{\partial m_b}{\partial a} - \frac{\partial m_a}{\partial b},$$

et

$$J_a = D m_c \frac{\partial b}{\partial n} - D m_b \frac{\partial c}{\partial n},$$

$$J_b = D m_a \frac{\partial c}{\partial n} - D m_c \frac{\partial a}{\partial n},$$

$$J_c = D m_b \frac{\partial a}{\partial n} - D m_a \frac{\partial b}{\partial n},$$

où Dm_a, Dm_b, Dm_c sont les différences, en un point (a, b, c) d'une surface de discontinuité, entre les valeurs des m_a, m_b, m_c sur une face de normale n et les valeurs sur la face opposée, on a

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} V_x &= \int \frac{j_a\, dS}{r} + \int \frac{J_a\, d\sigma}{r}, \\ V_y &= \int \frac{j_b\, dS}{r} + \int \frac{J_b\, d\sigma}{r}, \\ V_z &= \int \frac{j_c\, dS}{r} + \int \frac{J_c\, d\sigma}{r}. \end{aligned} \right.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la force polaire G ait une fonction potentielle est que les composantes m_a, m_b, m_c du moment magnétique m soient les dérivées d'une même fonction φ; alors on a

$$G_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad G_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad G_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

étant

$$U = \int \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma,$$

et la distribution G est *lamellaire*.

Les deux vecteurs j et J satisfont à quatre relations dont l'auteur donne, comme simple illustration, employée aussi quelquefois dans la suite, une interprétation hydrodynamique; ces relations sont nécessaires et suffisantes pour que les V_x, V_y, V_z satisfassent à la relation solénoïdale

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$

Étant donnés, dans un champ déterminé (S, σ), deux vecteurs j, J, il n'est pas toujours possible d'attribuer à ce champ une polarisation magnétique m_a, m_b, m_c telle que la terne polaire correspondante soit donnée par les formules (1), mais s'il en existe une, il y en a infinies, et l'action polaire est la même pour toutes. La différence de deux de ces distributions n'a donc pas d'action polaire et appartient au type défini par les équations

$$m_x = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad m_y = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad m_z = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial z}.$$

ce que l'auteur appelle *distributions lamellaires fermées.* Ensuite, il étudie le cas où le couple de vecteurs (j, J) ne correspond à aucune distribution magnétique. Il est ainsi amené à considérer un système de courants galvaniques dans l'espace S avec l'intensité spécifique (cubique) j et sur les surfaces σ avec l'intensité spécifique (superficielle) J.

Dans un champ (S, σ) on peut avoir à la fois une distribution magnétique m et une distribution galvanique (j, J); on peut attribuer à ce système mixte une fonction potentielle unique V, telle que V_x, V_y, V_z soient les sommes des composantes homologues des deux distributions; les

$$G_x = \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}, \qquad G_y = \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}, \qquad G_z = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$$

sont alors les composantes de la *force polaire totale* G ou *force électromagnétique.* Maxwell attribue aussi à ce système mixte une *force magnétique* F, comme résultante de la force apolaire F de la distribution m, et de la force électromagnétique G due à la distribution galvanique (j, J). La force F n'a pas de fonction potentielle unique à l'intérieur du système et l'on a

$$G_x = F_x + 4\pi m_x, \qquad G_y = F_y + 4\pi m_y, \qquad G_z = F_z + 4\pi m_z,$$

$$4\pi j_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \qquad 4\pi J_x = DF_z \frac{dy}{dn} - DF_y \frac{dz}{dn},$$

$$4\pi j_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \qquad 4\pi J_y = DF_x \frac{dz}{dn} - DF_z \frac{dx}{dn},$$

$$4\pi j_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}, \qquad 4\pi J_z = DF_y \frac{dx}{dn} - DF_x \frac{dy}{dn},$$

DF_x, ..., étant des différences finies analogues à celles de la Note précédente; la densité cubique du magnétisme libre dans la distribution m est

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right),$$

et la densité superficielle

$$\frac{1}{4\pi}(F_n + F_{n'}).$$

Étant, comme ci-dessus V_x, V_y, V_z la terne potentielle d'une distribution magnétique ou galvanique (j, J), et V'_x, V'_y, V'_z celles d'une autre (j', J'), on a

$$\int (V'_x j_x + V'_y j_y + V'_z j_z)\, dS + \int (V'_x J_x + V'_y J_y + V'_z J_z)\, d\sigma$$

$$= \int (V_x j'_x + V_y j'_y + V_z j'_z)\, dS + \int (V_x J'_x + V_y J'_y + V_z J'_z)\, d\sigma$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int (G_x G'_x + G_y G'_y + G_z G'_z)\, dS_\infty.$$

et l'auteur déduit aussi deux nouvelles expressions pour le potentiel mutuel de deux distributions magnétiques, où entrent les éléments des deux distributions galvaniques qui leur sont respectivement équivalentes. Puis après avoir

étudié la variabilité de la distribution magnétique pendant une déformation donnée du corps magnétique S′, il étudie les actions qui interviennent entre une distribution magnétique dans un espace S′ et une distribution galvanique dans un espace S, les deux espaces pouvant subir des déformations. D'abord il suppose que l'état magnétique de S′ soit indépendant de l'état galvanique de S; puis il suppose que S′ soit un aimant temporaire, et que l'aimantation de S′ soit due seulement à l'induction électromagnétique.

Santagata (*D.*). — [U10*b*]. Le méridien de Bologne, en relation avec la double date sur la surface du globe, et l'attitude de l'Italie dans la question du méridien initial. (505-521).

Pincherle (*S.*). — [H5*h*]. Contribution à l'intégration des équations différentielles linéaires au moyen d'intégrales définies. (523-546).

L'auteur appelle *transformation* de la fonction $\varphi(t)$ en la fonction $J(x)$ l'opération

$$J(x) = \int_\lambda A(t, x)\,\varphi(t)\,dt,$$

et $A(t, x)$ sa *fonction caractéristique*. En prenant

$$A(t, x) = (t-x)^\rho,$$

cette transformation, appliquée à l'intégrale d'une équation différentielle linéaire et à coefficients rationnels, et pour un chemin d'intégration convenable, la transforme en l'intégrale d'une nouvelle équation qui est aussi régulière et à coefficients rationnels, et que l'auteur appelle la *transformée* de la première. Pour certains chemins d'intégration l'expression

$$\int_a^b (t-x)^\rho\,\varphi(t)\,dt$$

a des propriétés semblables aux périodes des intégrales abéliennes. Après cela l'auteur trouve la formule effective de la transformée, puis il considère des systèmes d'équations de même *espèce*, et termine par l'étude de la transformation plus générale

$$J(x) = \int_\lambda \varphi(t)\,G^\rho(t, x)\,dt,$$

$\varphi(t)$ étant encore l'intégrale d'une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels et $G(t, x)$ une fonction rationnelle entière en t et x.

Saporetti (*A.*). — [U]. Méthode analytique avec discussion générale pour la transformation des coordonnées sphériques célestes au lieu de la méthode synthétique des astronomes modernes (Brünnow, 1869, et Gruey, 1885). (547-559).

2ᵉ Partie.

Retali (*V.*). — [O8*a*]. Sur le déplacement fini d'une figure plane dans son plan. (585-589).

Rectification d'une proposition de Chasles.

Tome III; 1892.

Saporetti (*A.*). — [U]. Sur l'origine de la détermination entre le temps moyen et le vrai temps solaire, exposée par quelques astronomes qui interprétèrent diversement les découvertes de Képler expliquées dans son Ouvrage : *Astronomia nova;* Pragae, 1609. (145-152).

Razzaboni (*C.*). — [S3*a*]. Sur la hauteur des jets d'eau par des ouvertures pratiquées en minces parois, en relation avec la charge qui les produit et avec le diamètre des ouvertures d'écoulement. (189-192, 2 pl.).

Ruffini (*F.-P.*). — [$M_1 3 j\alpha$, $M_1 3 k$]. Sur les lignes planes algébriques dont les podaires peuvent avoir puissance en tout point de leur plan. (277-285).

Pincherle (*S.*). — [A5*b*]. Sur l'interpolation. (293-318).

Détermination d'une fonction au moyen des valeurs qu'elle prend pour certaines valeurs de la variable. La question est traitée pour les fonctions d'une variable complexe.

Cavani (*Z.*). — [T3*a*]. La lunette anallatique de Porro à anallatisme central. (371-392, 1 pl.).

Montesano (*D.*). — [$N_1 1 j\alpha$]. Sur un complexe de rayons du troisième degré (549-577).

Étude du complexe formé par les génératrices des quadriques d'un réseau et de certaines correspondances birationnelles qui en découlent.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome CXX; 1895 [1].

Dyck (W.). — Sur les racines communes à plusieurs équations. (34-36).

Stodolkievitz. — Sur la théorie du système des équations différentielles. (36-39).

L'auteur se donne le système des intégrales

$$(1) \qquad f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_i \ (n \geq 5) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2),$$

ainsi que les équations différentielles correspondantes

$$(2) \qquad \alpha_{i,1}\,dx_1 + \alpha_{i,2}\,dx_2 + \ldots + \alpha_{i,n}\,dx_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2).$$

En ajoutant la première équation (2) successivement à toutes les autres, puis exprimant $n-3$ des différentielles au moyen des trois autres, on obtient le système

$$(3) \qquad dx_{r+3} = X_{r,1}\,dx_1 + X_{r,2}\,dx_2 + X_{r,3}\,dx_3 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-3),$$

qui ne renferme plus que deux variables indépendantes et $n = 2$ variables dépendantes. Les coefficients de ce système ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité connues, mais ils doivent remplir d'autres conditions que M. Stodolkievitz apprend à former.

Demeczky. — Sur la théorie des substitutions échangeables. (39-42).

Soit A^λ la première des puissances de la substitution A qui soit en même temps une puissance de B, et soit B^μ la première des puissances de la substitution B qui soit en même temps une puissance de A.

Pour que les deux substitutions A et B échangeables entre elles et d'ordre n et n' soient des puissances d'une même substitution R, il faut et il suffit que λ et μ soient premiers entre eux.

Cette condition remplie, il y a précisément $\varphi(N)$ snbstitutions R parmi les $k\lambda\mu$ substitutions

$$A^x B^y (x = 0, 1, 2, \ldots, \lambda - 1; y = 1, 2, 3, \ldots, h_{\mu-1}),$$

N désignant le plus petit commun multiple de n et n'.

Drach. — Sur l'application aux équations différentielles de méthodes analogues à celle de Galois. (73-76).

---

[1] Voir *Bulletin*, XX_2, p. 185.

L'auteur expose à grands traits la théorie des équations algébriques donnée par Galois, sous une forme aussi élémentaire et intuitive que possible, de manière à rendre immédiate l'extension de cette théorie aux systèmes d'équations différentielles.

Vessiot. — Sur la détermination des équations des groupes continus finis. (77-79).

M. Vessiot s'est occupé déjà de l'intégration des équations de Lie, c'est-à-dire des équations de la forme

$$(1) \qquad \frac{df}{dt} + \sum_{k=1}^{r} \theta_k(t)\, X_k f = 0,$$

où les expressions

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{k,i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

sont les symboles de r transformations infinitésimales indépendantes d'un groupe continu fini G à r paramètres. Il s'était borné au cas particulier où l'on connaît les équations finies du groupe G, c'est-à-dire qu'il avait supposé résolu ce problème préliminaire : « Déterminer les équations finies d'un groupe continu fini, dont on connaît les transformations infinitésimales. »

Or ce problème se ramène précisément lui-même à l'intégration d'une équation de Lie pour laquelle on connaît les équations finies du groupe correspondant, du moins toutes les fois que le groupe considéré est transitif.

Au point de vue des équations de Lie, ce cas peut être considéré comme le plus intéressant; car, si le groupe G qui correspond à l'équation (1) n'est pas transitif, celle-ci admet un certain nombre d'intégrales absolument indépendantes de la nature des fonctions $\theta_k(t)$, à savoir les invariants du groupe.

Parmi les conséquences de cette proposition, on doit noter que l'intégration de toute équation de Lie dont le groupe correspondant est transitif dépend uniquement de l'intégration d'équations linéaires auxiliaires. En particulier, c'est toujours d'équations différentielles linéaires que dépend la détermination des équations finies d'un groupe transitif dont on connaît les transformations infinitésimales.

Koch (H. von). — Sur la convergence des déterminants d'ordre infini et des fractions continues. (144-147).

Le Roy. — Sur le problème de Fourier. (179-181).

L'auteur montre que la méthode d'approximations successives, au moyen de laquelle M. Poincaré a résolu le problème de Dirichlet, ne réussit pas seulement pour l'équation de Laplace. Elle s'applique notamment au problème du refroidissement d'un solide, où il s'agit, comme on le sait, de trouver une fonction $V(x, y, z, t)$ continue à l'intérieur d'un domaine D limité par une

surface fermée S, satisfaisant en tout point de D à l'équation

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial t},$$

prenant sur S des valeurs données indépendantes des temps et se réduisant pour $t = 0$ à une fonction de x, y, z arbitrairement donnée.

Poincaré (*H.*). — Sur les fonctions abéliennes. (239-243).

Parmi les fonctions abéliennes, on doit distinguer les fonctions abéliennes *spéciales*, qui doivent leur origine à une courbe algébrique (C) de genre p. On sait que, pour $p = 2$ et pour $p = 3$, toutes les fonctions abéliennes sont spéciales, mais qu'il n'en est plus de même pour $p \geqq 4$.

Si l'on considère une fonction Θ, on peut étudier ses zéros à deux points de vue différents. On peut d'abord former p équations à p inconnues,

$$\Theta(u_i - e_{ik}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

où les e_{ik} sont p^2 constantes données. Ces équations admettent, comme l'a montré M. Poincaré, $p!$ solutions.

On peut encore, s'il s'agit de fonctions spéciales, former une équation à une seule inconnue

$$\Theta[v_i(x) - e_i] = 0,$$

où les e_i sont p constantes données et les $v_i(x)$ p intégrales abéliennes de première espèce attachées à la courbe (C). Le nombre des solutions est alors égal à p (Riemann).

M. Poincaré généralise ces résultats de plusieurs manières différentes.

Passant à une autre question, il envisage les surfaces de translation de M. Lie

$$x_i = f_i(t) + \varphi_i(t') \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Riemann a démontré que la surface

$$\Theta(u_1, u_2, u_3) = 0$$

était de translation; ce résultat peut être étendu à l'espace à p dimensions, s'il s'agit de fonctions abéliennes spéciales, mais ne subsiste plus pour les fonctions non spéciales.

On pourrait déduire de là, sous la forme d'équations aux dérivées partielles auxquelles doit satisfaire Θ, la condition pour que les fonctions abéliennes de périodes données soient spéciales.

Borel. — Sur une propriété des fonctions méromorphes. (303-304).

M. Borel a démontré (*Bulletin des Sciences math.*, 1894) qu'une fonction méromorphe, ne se réduisant pas au quotient de deux polynomes, ne peut être représentée par un développement de Taylor à coefficients entiers (réels ou complexes).

Il recherche actuellement dans quelle mesure un théorème analogue peut

être démontré pour les séries de Taylor à coefficients rationnels. Soit

$$(1) \qquad \sum \frac{A_n}{B_n} z^n$$

un tel développement, A_n et B_n étant des entiers premiers entre eux.

Dans l'hypothèse où l'on a $|B_n| < M^n$, M étant un nombre déterminé, si le développement (1) représente une fonction méromorphe, B_n renferme des facteurs premiers dont le module augmente indéfiniment avec n.

Beudon. — Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles. (304-307).

Soit une expression $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dépendant d'une fonction arbitraire d'un seul argument fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. M. Tresse a montré que le système différentiel dont φ est la solution la plus générale est tel qu'à partir d'un certain ordre p, les dérivées d'ordre $p' \geqq p$, sauf l'une d'entre elles, s'expriment en fonction de cette dernière et des dérivées d'ordre inférieur.

M. Beudon considère un système complètement intégrable jouissant de cette propriété et il fait voir que la méthode de M. Darboux (*Annales de l'École Normale*, 1870) permet d'en ramener l'intégration à celle d'équations différentielles ordinaires.

Poincaré (H.). — Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. (347-354).

La méthode de Neumann pour résoudre le problème de Dirichlet consiste en ceci :

Soit S une surface sur laquelle on suppose répandue une double couche de matière attirante; soit W le potentiel de cette double couche; V la limite vers laquelle tend W quand on se rapproche indéfiniment de S par l'intérieur; V' la limite de W quand on s'en rapproche par l'extérieur; enfin $V = \frac{V + V'}{2}$ la valeur de V sur S elle-même. Soit λ une constante arbitraire et Φ une fonction donnée définie en tous les points de S.

On cherche à développer W suivant les puissances croissantes de λ en posant

$$(1) \qquad W = W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots.$$

Cette série, dont les formules de Neumann permettent de calculer les termes de proche en proche, fournit la solution du problème de Dirichlet pour la région intérieure à S quand on y fait $\lambda = -1$ et pour la région extérieure quand on y fait $\lambda = 1$.

Or Neumann a démontré que la série (1) converge pour $\lambda = \pm 1$ à deux conditions : 1° si la surface S est convexe; 2° si l'on a

$$\int \Phi \gamma \, d\omega = 0,$$

γ étant la densité de l'électricité en équilibre naturel sur S.

Mais M. Poincaré fait voir que la série (2) converge encore pourvu que

cette seconde condition soit remplie, même quand S n'est pas convexe. Il suppose toutefois que S est simplement connexe et sans singularités.

A propos du problème de Dirichlet, M. Poincaré a été conduit à un certain nombre de propositions qu'il énonce sans pouvoir les démontrer complètement, mais qu'il rend vraisemblables par un mode de démonstration dont on s'est longtemps contenté en Physique mathématique.

Resal. — Sur la forme de l'intrados des voûtes en anse de panier. (352-354).

On attribue à Huygens le premier tracé rationnel d'un profil composé de trois arcs de cercle. Ce profil est disgracieux, à cause du trop brusque changement de courbure aux points de raccordement.

A ce point de vue, l'ellipse est supérieure au profil dû à Huygens, mais elle est peu employée, parce que le débouché est restreint aux naissances.

M. Resal propose un intrados analogue à celui de Huygens, dont la construction est commode, mais dont la forme est plus agréable à l'œil. Cette nouvelle forme est d'ailleurs à l'abri des critiques dont l'ellipse est l'objet.

Humbert (G.). — Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes du genre trois (365-366).

L'auteur étudie les surfaces qui correspondent *point par couple* à une courbe C du genre p. Si à un point de la surface correspond un seul couple sur la courbe, la surface est de genre $\frac{1}{2}p(p-1)$.

Pour les surfaces qui répondent à $p=3$, les coordonnées non homogènes d'un point sont des fonctions uniformes, à six paires de périodes, de trois paramètres u, v, w, liées par la relation

$$\mathfrak{S}(u, v, w) = 0,$$

où $\mathfrak{S}(u, v, w)$ désigne une des soixante-quatre fonctions abéliennes normales du premier ordre. La courbe C est la courbe plane la plus générale d'ordre 4.

Pour obtenir par ce procédé des surfaces intéressantes, il faut abaisser le degré le plus possible. Si l'on veut des surfaces de genre trois, 6 sera le minimum du degré.

M. Humbert montre comment on peut définir une surface du sixième ordre, de la classe indiquée; cette surface est liée d'une manière très simple à celle de Kummer.

Resal. — Sur la pénétration d'un projectile dans les semi-fluides et les solides. (397-401).

Euler et plus tard Poncelet ont donné, pour représenter la pénétration d'un projectile dans un milieu, des formules inadmissibles, car elles impliquent que le projectile éprouverait une résistance quand même il ne pénétrerait pas dans le milieu.

Reprenant la question avec les ressources que lui fournissent nos connaissances actuelles sur la cohésion des semi-fluides et la résistance des solides

au cisaillement, M. Resal donne, pour exprimer cette pénétration l en fonction de la vitesse initiale V_0, la formule

$$l = A \log(1 + rV_0),$$

qui présente un accord satisfaisant avec les expériences très complètes exécutées en 1834-1835 dans une terre argilo-calcaire des environs de Metz par les capitaines Morin, Piobert et Didion.

Picard (*Ém.*). — Sur une classe d'équations dont l'intégrale générale est uniforme. (402-404).

Il est intéressant de former des types étendus d'équations à intégrale générale uniforme. M. Picard y réussit en se servant du groupe de transformations à r paramètres

$$(1)\quad \begin{cases} z_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_r), \\ z_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_m = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_r), \end{cases}$$

dans le cas où ce groupe est un groupe de substitutions birationnelles entre les z et les x, les a y figurant algébriquement.

Si l'on donne aux constantes a des valeurs déterminées

$$a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0,$$

il existe une infinité de systèmes de transcendantes

$$F_1(t), \ldots, F_m(t),$$

uniformes dans tout le plan, admettant une première période ω' et telles que

$$F_i(t+\omega) = f_i[F_1(t), F_2(t), \ldots, F_m(t), a_1^0, a_1^0, \ldots, a_m^0]$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Si l'on met à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ un tel système de fonctions, on peut, par l'élimination des constantes, former un système d'équations du premier ordre en $z_1, z_2, \ldots, z_r$, dont les coefficients sont des fonctions doublement périodiques de t.

On a donc un système d'équations différentielles algébriques à coefficients doublement périodiques et dont l'intégrale générale est une transcendante uniforme jouissant de propriétés remarquables par rapport au groupe de la double périodicité.

En terminant, l'auteur examine la question inverse de celle dont la solution vient d'être indiquée.

De Jonquières. — Sur les dépendances mutuelles des déterminants potentiels. (408-410).

L'auteur indique quelques conséquences, relatives aux dépendances mutuelles des *déterminants potentiels*, de la propriété suivante des nombres entiers qui n'avait pas été remarquée jusqu'à lui :

Le produit $\Pi(a)$ de n nombres entiers différents $a, b, c, \ldots$, multiplié par le produit $\Pi(a-b)$ de leurs différences deux à deux, a pour valeur un multiple λ des n premières factorielles

$$\Pi(a)\,\Pi(a-b) = \lambda\, n!\,(n-1)!\ \ldots,\ 3!\,2!$$

ou sous une autre forme

$$\Pi(a)\,\Pi(a-b) = \lambda.1^n.2^{n-1}.3^{n-2}\ldots(n-1)^2 n.$$

Par *déterminants potentiels*, M. de Jonquières entend ceux dont chaque ligne ne contient que des puissances entières de l'élément qui le caractérise et chaque colonne contient une même puissance des divers éléments. On suppose que les éléments se succèdent dans les colonnes et dans les lignes selon leurs valeurs croissantes.

Humbert (G.). — Sur une surface du sixième ordre qui se rattache à la surface de Kummer. (425-427).

Soit $K(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ l'équation d'une surface du quatrième ordre; une sécante quelconque issue d'un point $O(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ coupe la surface en quatre points a_1, a_2, a_3, a_4 qu'on peut de trois manières répartir en deux couples.

Soit a_1, a_2 et a_3, a_4 un de ces groupements : les couples a_1, a_2 et a_3, a_4 déterminent sur la sécante une involution du second ordre, dans laquelle le point O a un conjugué m. Cette construction donne trois points m sur toute sécante issue de O; le lieu des points m, quand la sécante varie, est une surface du sixième ordre ayant pour équation

$$K(x_1, x_2, x_3, x_4)\, H^2(x_1, \ldots, x_4) - K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\, P^2(x_1, \ldots, x_4) = 0,$$

où P et H ont respectivement pour valeurs

$$P = \alpha_1 \frac{\partial K}{\partial x_1} + \ldots + \alpha_4 \frac{\partial K}{\partial x_4},$$

$$6H = \alpha_1^3 \frac{\partial^3 K}{\partial x_1^3} + 3\alpha_1^2 \alpha_2 \frac{\partial^3 K}{\partial x_1^2\, \partial x_2} + \ldots + \alpha_4^3 \frac{\partial^3 K}{\partial x_4^3}.$$

Lorsque K est une surface de Kummer, la surface du sixième ordre ainsi obtenue est précisément la surface S que, dans une Note précédente, M. Humbert a définie directement à l'aide des fonctions abéliennes de genre 3.

Cette nouvelle définition de S met immédiatement en évidence les propriétés géométriques les plus remarquables de cette surface.

Leau. — Sur les équations fonctionnelles. (427-429).

Soient les substitutions

$$x_s^{(j)} = \varphi_{sj}(x_1, \ldots, x_p) \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix},$$

où les fonctions φ_{sj}, holomorphes au point $a_1, a_2, \ldots, a_n$, se réduisent à a_s pour $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$; et soit $z^{(j)}$ le résultat de la substitution de $x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}$ à $x_1, \ldots, x_n$ dans une fonction z.

On considère le système d'équations fonctionnelles

$$(1) \qquad u_i = F_i(x_s, u_l^{(k)}) \qquad (i, l = 1, 2, \ldots, m),$$

où les F_i désignent des fonctions holomorphes des variables x et des quantités $u_l^{(k)}$ au voisinage du point

$$x_1 = a_1, \quad \ldots, \quad x_n = a_n, \quad u_l^{(k)} = b_l,$$

pour lequel on a

$$b_i = F_i(a_s, b_l).$$

On peut chercher à calculer par différentiation des équations (1) les dérivées des fonctions inconnues u au point a. Soit Δ_α le déterminant des inconnues lorsqu'on veut déterminer ainsi des dérivées d'ordre α, celles des ordres précédents étant supposées connues.

Si l'on a pour les dérivées des u, jusqu'à l'ordre r inclusivement, un système de valeurs S vérifiant les équations dérivées, et si $\Delta_\alpha \neq 0 \, (\alpha > r)$; si de plus

$$\frac{1}{n} > \left| \frac{\partial \varphi_{sj}}{\partial x_h} \right|_{x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n},$$

pour toutes les valeurs de s, j et h, il existe une solution holomorphe et une seule, vérifiant les équations (1) et formée de fonctions u qui en a se réduisent aux b et dont les dérivées au même point prennent les valeurs du système S.

Tresse. — Sur les invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre. (429-430).

L'auteur s'est occupé antérieurement de la recherche des invariants différentiels d'une multiplicité analytique soumise aux transformations d'un *groupe continu de Lie*. Actuellement, il en indique une application particulière à l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \omega\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

sur laquelle on effectue une transformation quelconque du groupe ponctuel du plan

$$x' = X(x, y), \qquad y' = Y(x, y).$$

Pour toute équation de cette nature (sauf pour une classe exceptionnelle) il existe une infinité d'invariants relatifs : on les obtient tous en combinant trois paramètres différentiels avec quatre invariants seulement. Il existe deux invariants relatifs du quatrième ordre, trois du cinquième, onze du sixième, et, en général, pour $n > 6$, $\frac{n^2 - n - 8}{2}$ du $n^{\text{ième}}$ ordre.

A l'aide de ces invariants, on peut former des critériums nécessaires et suffisants pour qu'une équation (1) puisse se ramener, par une transformation ponctuelle, à une équation donnée de même forme.

Par exemple, on peut chercher à quels caractères on reconnaîtra qu'une

équation (1) admet une transformation infinitésimale : les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi sont que trois invariants absolus quelconques soient toujours liés par une relation.

Bougaïef. — Sur quelques théorèmes de l'Arithmologie. (432-434).

Resal. — Axoïdes de deux lignes planes. (484-488).

Lorsqu'on se donne le profil d'un tuyau dont la section est variable, ou bien l'intrados et l'extrados d'une voûte en berceau, la Mécanique appliquée conduit au théorème suivant :

« Déterminer une ligne telle que deux segments de sa normale, limités par deux lignes données (directrices), soient égaux. »

M. Resal montre que toute une famille de lignes, auxquelles il donne le nom d'*axoïdes*, satisfait à la condition énoncée.

Pepin (le P.). — Rectification de quelques théorèmes d'Arithmétique. (494).

Picard (*Ém.*). — Remarques sur les courbes définies par une équation différentielle du premier ordre. (522-524).

L'auteur élucide quelques points, laissés dans l'ombre par M. Poincaré, de la théorie des courbes définies par une équation différentielle du premier ordre, dans le voisinage d'un point singulier.

L'origine étant transportée au point singulier, l'équation prendra la forme

$$\frac{dx}{ax+by+\ldots} = \frac{dy}{a'x+b'y+\ldots}.$$

La nature de la singularité dépend, comme on sait, de la nature des racines de l'équation du second degré en λ

$$(a-\lambda)(b'-\lambda) - ba' = 0.$$

Si les racines (supposées distinctes) sont réelles et inégales, toutes les courbes intégrales passent par l'origine et y ont une tangente déterminée (l'origine est un *nœud*).

Si les racines sont imaginaires (leur rapport n'étant pas -1), toutes les courbes intégrales ont pour point asymptote l'origine, qui est un *foyer*.

Si les racines sont réelles et de signes contraires, deux courbes intégrales passent par l'origine (*col*) avec une tangente déterminée. Mais n'existe-t-il pas de courbe intégrale se rapprochant indéfiniment de l'origine sans y arriver avec une tangente déterminée? M. Picard montre que la réponse à cette question est négative.

De Jonquières. — Démonstration d'un théorème sur les nombres entiers. (534-537).

Le théorème dont il s'agit est le suivant :

« Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont n nombres entiers différents, le produit $\Pi(a)$ de tous ces nombres multiplié par le produit $\Pi(a_i - a_j)$ de leurs différences deux à deux, est un multiple λ du produit des n premiers nombres $1.2.3\ldots n$ multiplié par le produit de leurs différences deux à deux, c'est-à-dire est égal à

$$\lambda\left(1^n.2^{n-1}.3^{n-2}\ldots\overline{n-1}^2.n\right) ».$$

Goursat. — Sur la méthode de M. Darboux pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. (542-544).

La méthode d'intégration de M. Darboux pour les équations aux dérivées partielles du second ordre

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

consiste à rechercher les intégrales intermédiaires d'un ordre supérieur au premier. Toutefois il n'est pas possible en général, quand on connaît ces intégrales, d'obtenir pour représenter l'intégrale générale des formules où les fonctions arbitraires figurent explicitement.

Il n'en est plus de même lorsque les deux systèmes de caractéristiques de l'équation (1) sont confondus; si l'équation admet une intégrale intermédiaire d'un ordre quelconque, renfermant une fonction arbitraire, il suffit d'intégrer un système unique d'équations différentielles ordinaires pour pouvoir en déduire sans aucune intégration nouvelle l'intégrale générale de l'équation (1), qui appartient alors à la première classe d'Ampère.

M. Goursat indique le détail des calculs à exécuter pour résoudre complètement le problème.

Cartan. — Sur certains groupes algébriques. (544-548).

Il y aurait un intérêt considérable à relier la théorie des fonctions à celle des groupes de Lie.

M. Cartan montre quelle est l'importance des considérations de *structure* dans cet ordre de recherche et il indique quelques théorèmes très généraux auxquels conduisent les derniers résultats trouvés sur la structure des groupes finis. Nous citerons les propositions suivantes :

Le groupe dérivé d'un groupe linéaire et homogène quelconque est tel que dans ses équations finies on peut toujours faire entrer les paramètres rationnellement.

Si un groupe est de rang zéro ou si son plus grand sous-groupe invariant intégrable est de rang zéro, on peut faire en sorte que, dans les équations finies de son groupe adjoint, les paramètres entrent rationnellement.

Si un groupe transitif n'admet pas de transformation distinguée et que son plus grand sous-groupe invariant intégrable soit de rang zéro, on peut toujours, au moyen d'un changement de variables et de paramètres convenable, faire en sorte que les coefficients des transformations infinitésimales de ce groupe soient des fonctions rationnelles des variables et que les équations finies dépendent algébriquement des variables et des paramètres. On peut

même, en prenant pour nouvelles variables certaines fonctions rationnelles des variables ainsi déterminées, faire en sorte que les équations finies dépendent rationnellement des paramètres.

Desaint. — Sur les fonctions entières. (548-550).

Les fonctions entières de genre pair ω, telles que le multiplicateur exponentiel du produit infini de facteurs primaires de M. Weierstrass soit de la forme

$$A e^{\alpha x^{\omega+2}+\beta x^{\omega+1}+\gamma}$$

(A étant une constante), jouissent de cette propriété que, si leurs zéros sont réels, les zéros de leur dérivée sont tous réels aussi.

A ce théorème, l'auteur en adjoint d'autres ayant pour but de circonscrire la région où se trouvent les zéros de certaines fonctions de variables complexes. En particulier, la fonction

$$\int_0^\alpha f(x)(1-zx)^{-\lambda}\,dx,$$

où l'on a $0 < \lambda < 1$ et où $f(x)$ est assujettie uniquement à être continue et à garder le même signe entre $x = 0$ et $x = \alpha$, ne s'annule jamais en dehors de sa coupure $\infty \ldots \frac{1}{\alpha}$.

Stodokievitz. — Sur la théorie du système des équations différentielles. (595-596).

Painlevé. — Sur la définition générale du frottement. (596-599).

Soit S un système de n points matériels M de masse m, assujettis à des liaisons. Soit $(F) = m(\gamma)$ la force totale qui s'exerce sur M, $(F') = m(\gamma')$ celle qui s'y exercerait si l'on supprimait les éléments matériels immédiatement en contact avec lui; soit enfin (R) la force absolue exercée sur M par les éléments matériels en question. (F′) est la *force active*, (R) la *réaction* et (F) est égale à $(F') + (R)$.

Le système S est dit *sans frottement* si, pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons, le travail des réactions est nul.

Dans le cas contraire, soit (R) la réaction sur M, (R′) celle qui s'exercerait s'il n'y avait pas frottement.

La différence $(R) - (R') = (\rho)$ est dite *force de frottement*, la force (R′) *force de liaison*.

Les forces (R) se trouvent alors décomposées en force (ρ) et (R′) qui répondent à deux conditions : 1° le travail virtuel des (R′) est nul; 2° le déplacement $\frac{(\rho)}{m}dt$ imposé à chaque point M constitue un déplacement virtuel de S.

Pour un système quelconque de segments, une telle décomposition est toujours possible et d'une seule manière. Le système des segments (ρ) satisfait à

la relation

$$\sum \frac{R^2}{m} = \sum \frac{R'^2}{m} + \sum \frac{\rho^2}{m}.$$

Tout ceci est vrai quelles que soient les lois du frottement. Ces lois doivent être déterminées empiriquement; les équations de la Mécanique permettent alors de calculer ce mouvement.

La concordance de cette conception avec la notion vulgaire du frottement est immédiate pour les types de liaisons simples; dans les cas plus compliqués elle ressort de la remarque suivante : qu'on imagine les liaisons de S comme résultant de la combinaison de deux groupes de liaisons matérielles G_1 et G_2, et qu'on représente par S_1, S_2 le système S soumis aux seules liaisons G_1 et G_2. Alors les lois de frottement de S_1 et de S_2 déterminent celle de S, pourvu que les liaisons matérielles $G_1 + G_2$ ne soient pas *surabondantes*.

Le Roy. — Sur le problème de Fourier. (599-602).

Picard (*Ém.*). — Sur la théorie des surfaces et des groupes algébriques. (658-660).

L'auteur envisage, dans un espace à n dimensions, une surface algébrique admettant un groupe G continu et fini de transformations birationnelles. Si le groupe G est à r paramètres, on peut s'arranger de manière que les coefficients des fonctions rationnelles des x qui donnent le groupe soient des fonctions uniformes des r paramètres s'exprimant au moyen des transcendantes de la théorie des fonctions abéliennes ou de leurs dégénérescences.

Un cas particulièrement simple est celui des groupes de substitutions Cremona

$$X_i = R_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

On peut toujours faire en sorte que les R soient des fonctions rationnelles des paramètres a s'exprimant par des transcendantes abéliennes.

M. Picard démontre encore un théorème relatif aux surfaces algébriques $f(x, y, z) = 0$ admettant un groupe de transformations birationnelles : quand ce groupe est transitif, les coordonnées d'un point quelconque de la surface s'expriment par des fonctions abéliennes (ou dégénérescences) de deux paramètres.

Mannheim. — Une propriété générale des axoïdes. (671).

M. Resal a donné le nom d'*axoïde* à une courbe qui partage constamment en deux parties égales les portions de ses normales comprises entre deux lignes données.

M. Mannheim démontre un théorème qui fournit une infinité d'axoïdes : *Les développées successives d'un axoïde sont des axoïdes par rapport à des courbes engendrées de la même manière.*

Craig. — Sur les lignes de courbure. (672-673).

On sait (Darboux) qu'une surface quelconque étant donnée, les trois coordonnées rectangulaires d'un de ses points satisfont à une équation de la

forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho \, \partial \rho_1} = a \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + b \frac{\partial \theta_1}{\partial \rho_1}, \tag{1}$$

si ρ et ρ_1 sont les paramètres d'un système conjugué. Si de plus l'équation admet la solution $x^2 + y^2 + z^2$, ρ et ρ_1 sont les paramètres des lignes de courbure.

M. Craig généralise cette proposition, dans le cas où l'équation (1), outre les solutions x, y, z, admet aussi une solution de la forme

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(y) + \varphi_3(z).$$

De Tannenberg. — Sur la théorie des équations aux dérivées partielles. (674-676).

On sait que le problème de l'intégration d'un système d'equations aux dérivées partielles peut être considéré comme un cas particulier du problème général suivant :

Déterminer n fonctions $x_1, \ldots, x_n$ de q variables indépendantes satisfaisant aux p équations aux différentielles totales

$$\Theta_d^i = \sum_k X_{ik} \, dx_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{1}$$

où les X_{ik} sont des fonctions données de $x_1, \ldots, x_n$.

La Note de M. de Tannenberg a pour but d'indiquer une classe assez étendue de systèmes (1) pour lesquels la question peut être simplifiée.

Borel. — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles. (677).

Étant donnée une équation linéaire aux dérivées partielles à coefficients analytiques, toute intégrale analytique de cette équation est donnée par la formule

$$z = \int_0^{2\pi} \theta(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_n, r, \alpha) f(\alpha) \, d\alpha.$$

Dans cette formule, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les variables, θ est une intégrale particulière dépendant de $n+2$ constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n, r, \alpha$, dont on sait calculer par la méthode de Cauchy un développement en série ; $f(\alpha)$ est une fonction réelle arbitraire de la variable réelle α, admettant la période 2π et ayant des dérivées de tout ordre dans tout intervalle.

Chapel. — Sur le mouvement des projectiles dans l'air. (677-678).

L'expression linéaire $R = a(v - h)$, que M. Chapel avait proposée à la suite des expériences russes et anglaises (1875) pour représenter la loi de résistance de l'air, peut être étendue jusqu'aux plus hautes vitesses expérimentées, soit 1100 mètres.

L'auteur établit les équations du mouvement des projectiles en partant de cette loi.

Goursat. — Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre. (712-714).

Soit $s = F(x, y, z, p, q, r, t)$ une équation du second ordre où le second membre est holomorphe dans le voisinage des valeurs x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, t_0 des variables x, y, z, p, q, r, t; soient $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ deux fonctions holomorphes dans le domaine des points x_0 et y_0 respectivement et telles que l'on ait

$$\varphi(x_0) = z_0, \quad \varphi'(x_0) = p_0, \quad \varphi''(x_0) = r_0,$$
$$\psi(y_0) = z_0, \quad \psi'(y_0) = q_0, \quad \psi''(y_0) = t_0.$$

Si, en outre, les deux dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial r}$, $\frac{\partial F}{\partial t}$ sont nulles pour ces valeurs initiales, l'équation (1) admet une intégrale holomorphe dans le voisinage du point (x_0, y_0), se réduisant à $\varphi(x)$ pour $y = y_0$ et à $\psi(y)$ pour $x = x_0$.

Ce théorème permet de démontrer rigoureusement que si l'ensemble d'une courbe C et d'une développable Δ forme une caractéristique de l'équation du second ordre, il existe une infinité d'intégrales tangentes à Δ le long de C, ces intégrales dépendant d'une infinité de constantes arbitraires.

André (D.). — Sur les séquences des permutations circulaires. (714-715).

Les permutations circulaires dont s'occupe l'auteur sont celles qui ont pour éléments les n premiers nombres. Un *maximum* est un élément plus grand que chacun de ses deux voisins; un *minimum* est un élément plus petit que chacun d'eux; une *séquence* est une suite d'éléments dont le premier est un maximum et le second un minimum ou réciproquement, mais dont aucun intermédiaire n'est ni maximum ni minimum.

M. D. André énonce sur ces séquences de permutations circulaires différents résultats qui rappellent ceux qu'il a trouvés antérieurement pour les permutations rectilignes.

D'Ocagne. — Sur une application de la théorie de la probabilité des erreurs aux nivellements de haute précision. (717-720).

Si x_1 et x_2 sont des erreurs toujours de même sens commises sur deux lectures consécutives, la différence de niveau des points correspondants est entachée de l'erreur $y = x_1 - x_2$.

Dès lors se pose le problème suivant : « La valeur probable d'une quantité variable étant par définition celle dont la probabilité est égale à $\frac{1}{2}$, déduire de la valeur probable x_0 de x la valeur probable y_0 de y. »

La solution du problème, bien connue dans le cas où x peut varier dans tout le champ de $-\infty$ à $+\infty$, est profondément modifiée par le seul fait que les variations de x sont limitées de 0 à $+\infty$.

En posant

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2}\, dt,$$

on trouve

$$\Theta\left(\frac{y_0}{x_0} \frac{\sqrt{2}}{0,4769}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

et par interpolation dans la Table des fonctions Θ

$$y_0 = 0,7879 x_0.$$

Zochios. — Sur les substitutions. (766-767).

Guccia. — Sur une question concernant les points singuliers des courbes gauches algébriques. (816-819).

Si deux surfaces algébriques F et F′ possèdent en un même point O de l'espace des singularités *quelconques* (σ) et (σ′), l'abaissement produit par le point O dans le rang de la courbe gauche intersection complète des deux surfaces est égal au nombre des intersections confondues en O de la surface F (ou F′) avec une courbe gauche A (générique), diminué de l'abaissement que la singularité (σ) (ou σ′) produit dans la classe de la surface F (ou F′).

Pareillement, si deux surfaces algébriques F et F′ possèdent en un même point O de l'espace des singularités quelconques (σ) et (σ′), l'abaissement produit par le point O dans le nombre des plans tangents que l'on peut mener à la courbe gauche intersection complète de F et F′, par une droite issue de O, est égal au nombre des intersections confondues en O de F (ou de F′) avec une courbe gauche A correspondant à une droite passant par O, diminué de l'abaissement produit par O dans le nombre des plans tangents qu'on peut mener à F (ou à F′) par une droite issue de O.

Petrovitch. — Sommation des séries à l'aide des intégrales définies. (819-821).

L'auteur démontre l'identité suivante entre une série et une intégrale définie

$$4\pi i \sum_{n=1}^{n=\infty} \varphi(n, e^{\beta i}) = \int_0^{2\pi} f(z)\, \Phi(z, \beta)\, dz.$$

Dans cette formule β est une quantité complexe avec le coefficient de i positif; $f(z)$ est une fonction développable en série de Fourier pour $0 < x < 2\pi$

$$f(x) = \sum_0^\infty (a_m \sin mx + b_m \cos mx);$$

de plus, on a posé

$$\varphi(x, r) = \sum_0^\infty (a_m \sin mx + b_m \cos mx) r^m;$$

2de Partie.

la partie réelle de r étant comprise entre -1 et $+1$; enfin

$$\Phi(z, \beta) = C\left(-z-\beta, \frac{1}{2}\right) - C\left(-z-\beta, \frac{1}{2}\right)$$

où

$$C(x, a) = -\sum_{n=1}^{n=\infty} [\cot a(n+x) + i].$$

M. Petrovitch donne deux autres formules qui permettent assez souvent d'exprimer des transcendantes nouvelles sous forme d'intégrale définie portant sur des fonctions simples.

Le Vavasseur. — Sur les types de groupes de substitutions dont l'ordre égale le degré. (822-825).

On connaît l'importance de la recherche de tous les types Ω dont l'ordre égale le degré. M. Netto a indiqué les types d'ordre p, p^2, pq, où p et q sont des nombres premiers différents ($p > q$).

M. Le Vavasseur indique tous les types correspondants aux ordres p^3, $p^2 q$, pq^2, pqr, où p, q, r sont trois nombres premiers différents tels qu'on ait $p > q > r$.

Stodolkievitz. — Sur la théorie du système des équations différentielles. (825-826).

L'auteur indique les conditions d'intégrabilité du système

$$dx_{m+s} = X_{s,1}\, dx_1 + X_{s,2}\, dx_2 + \ldots + X_{s,m}\, dx_m$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n-m), \qquad (n \geqq s \geqq 3),$$

dans le cas où il ne renferme plus que deux variables indépendantes, toutes les autres étant fonctions de ces deux-là.

Maltézos. — Sur la règle de Rondelet sur les bois et les pièces chargées debout. (826-828).

En désignant par N la charge totale en kilogrammes qu'une pièce de bois pressée par ses abouts puisse supporter sans fléchir latéralement, par s l'aire de la section transversale en centimètres carrés, par a la longueur de la pièce, par c le plus petit côté de la section, on a, suivant M. Maltézos,

$$\frac{N}{s} = -55200\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 10150\,\frac{c}{a} - 113,4.$$

Cette formule parabolique conduit aux mêmes résultats que la règle pratique de Rondelet.

Kœnigs. — Toute surface algébrique peut être décrite par le moyen d'un système articulé. (861-863).

M. Kœnigs établit en toute rigueur ce théorème énoncé par Sylvester, mais qui n'avait jamais reçu de démonstration suffisante.

Humbert (*G.*). — Sur les courbes de quatrième classe. (863-866).

Dans deux Notes récentes, l'auteur a fait connaître une surface du sixième ordre, définie analytiquement à l'aide des fonctions abéliennes du genre 3 et reliée géométriquement à la surface de Kummer. Plusieurs propriétés de la surface de M. Humbert conduisent à des propriétés correspondantes de la courbe plane générale de quatrième classe et de la configuration de Kummer.

Guccia. — Sur les points doubles d'un faisceau de surfaces algébriques (896-899).

Solution de la question suivante :

En supposant qu'un faisceau de surfaces algébriques d'ordre n possède, en un point O de l'espace, une singularité base *quelconque*, exprimer l'abaissement que le point O fait subir au nombre $4(n-1)^3$ des points doubles du faisceau.

Le Vavasseur. — Sur les types de groupes Ω de substitutions dont l'ordre égale le degré. (899-902).

Beudon. — Sur une application de la méthode de M. Darboux. (902-903).

M. Beudon indique un type d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre

$$s = qz + q^2 f\left(\frac{t}{q}, y\right)$$

admettant une intégrale intermédiaire du troisième ordre

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = q\,\varphi\left(\frac{t}{q}, y\right),$$

que l'on aura en remplaçant φ par la solution générale de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre obtenue en écrivant les conditions d'intégrabilité.

Liouville (*R.*). — Sur la rotation des solides. (903-905).

Le mouvement d'un solide pesant fixé par un de ses points a pu être étudié dans plusieurs cas, lorsque l'ellipsoïde d'inertie relatif au point fixe est de révolution.

M. R. Liouville signale un cas où, si le point de suspension est convenablement placé, et quelle que soit la forme de l'ellipsoïde d'inertie, il suffit que les données initiales du mouvement satisfassent à une seule condition, facile à vérifier, pour que la position du solide puisse être déterminée à un instant quelconque.

Voici comment peut être caractérisé le cas en question :

On considère au point fixe la polaire réciproque de l'ellipsoïde d'inertie par rapport à son centre, et dans ce deuxième ellipsoïde on mène l'un des plans cycliques, le plan bissecteur du dièdre principal où il est compris et qui a pour arête l'axe moyen, le plan principal perpendiculaire à cet axe moyen. A la trace du plan cyclique sur le plan principal on fait correspondre une droite symétrique par rapport au plan bissecteur ; c'est sur cette droite qu'est supposé situé le centre de gravité du solide. On prend ensuite l'ombilic conjugué du plan cyclique, le plan qui le contient avec l'axe moyen, puis un plan P, symétrique du précédent par rapport au bissecteur déjà employé.

Cela posé, si la rotation est d'abord parallèle au plan P, elle lui reste toujours parallèle ; l'angle que fait avec la verticale le rayon qui passe par le centre de gravité s'exprime par une fonction elliptique du temps ; la rotation et par suite toutes les inconnues s'obtiennent en intégrant une équation linéaire du second ordre à coefficients uniformes et doublement périodiques.

Kœnigs. — Toute condition algébrique imposée au mouvement d'un corps est réalisable par le moyen d'un système articulé. (981-983).

De la Rive. — Sur l'emploi d'une quatrième dimension. (983-986).

Schuster. — Sur les spectres cannelés. (987-989).

Il s'agit de l'expérience de Foucault et Fizeau sur le spectre cannelé qu'on observe si deux rayons de lumière blanche tombent avec un retard relatif sur la fente d'un spectroscope. M. Poincaré, en soumettant cette expérience à l'analyse, en avait conclu, comme les deux physiciens, que le mouvement lumineux possède une espèce de permanence. M. Schuster conteste la solution de M. Poincaré.

Markoff. — Démonstration d'un théorème de Tchébychef. (1032-1034).

Soit μ le plus grand diviseur premier des nombres

$$1+2^2,\quad 1+4^2,\quad 1+6^2,\quad \ldots,\quad 1+4N^2;$$

le rapport $\frac{\mu}{N}$ croît indéfiniment avec N.

De Salvert. — Sur l'équivalence des six formes différentes d'expression des quadratures de différentielles algébriques réductibles aux intégrales elliptiques. (1034-1036).

Stodolkievitz. — Sur l'intégration du système des équations différentielles. (1037).

De Jonquières. — Sur une question d'Algèbre qui a des liens avec le dernier théorème de Fermat. (1139-1143).

Soient a, b, c des quantités non transcendantes, plus grandes que zéro, n un nombre entier positif et $a = pq$.

Dans la formule $a^n = c^n - b^n$, qu'on peut d'après cela écrire

$$p^n q^n = c^n - b^n,$$

est-il possible d'exprimer c et b par des fonctions algébriques de p et q telles que l'identité littérale s'établisse entre les deux membres?

A cette question M. de Jonquières répond par le théorème suivant :

« Pour $n > 2$, il n'existe pas de fonctions algébriques binomes ou polynomes de p et q qui répondent à la question. »

Les formes monomes font seules exception, mais à la condition que les indéterminées soient réduites à deux dans la formule, la troisième étant alors l'unité.

Cette forme devient elle-même incompatible si les trois indéterminées a, b, c doivent être des nombres entiers, comme l'exige le théorème de Fermat.

Pellet. — Sur le mouvement d'une figure plane dans son plan. (1204-1206).

Le Vavasseur. — Sur une catégorie de groupes de substitutions associées aux groupes dont l'ordre égale le degré. (1206-1208).

De Salvert. — Sur deux formules connexes concernant les fonctions complètes de troisième espèce, relatives à des modules complémentaires. (1208-1211).

Parmi les transformations du premier ordre relatives aux fonctions elliptiques de première espèce, celle dans laquelle l'ancien et le nouveau module sont complémentaires l'un de l'autre offre une importance particulière : en premier lieu parce qu'elle fournit l'expression des fonctions d'argument iz à l'aide des fonctions d'argument z, et réciproquement; en second lieu, à cause de la réversibilité qui existe alors entre les fonctions complètes relatives à l'un ou à l'autre de ces deux modules.

Or, contrairement à ce qui a lieu pour la fonction de deuxième espèce, cette même transformation par modules complémentaires présente encore les mêmes propriétés en ce qui concerne la fonction elliptique de troisième espèce, sous la réserve d'un changement linéaire du paramètre que l'auteur fait connaître.

Boussinesq. — Sur la forme nécessairement pendulaire de la houle de mer quant à l'expression des déplacements de chaque particule en fonction du temps. (1240-1246).

Le cas le plus simple et le plus intéressant est celui de la houle de haute

mer, où les mouvements sont insensibles au fond. Gerstner a reconnu que toutes les équations du mouvement sont alors satisfaites dans l'hypothèse d'orbites circulaires, décrites d'un mouvement uniforme et continu durant la période $2T$, synchroniquement pour toutes les molécules qui ont le centre de leur orbite sur une même verticale et avec des vitesses dirigées, au sommet des orbites suivant le sens du transport apparent de la surface libre, laquelle est dès lors trochoïdale : les rayons de ces orbites décroissent avec la profondeur suivant une formule exponentielle, et chaque particule reste soumise, pendant son mouvement, à la pression qu'elle éprouvait à l'état primitif de repos.

Mais ces lois ont été établies sur la supposition non évidente que, dans la houle, chaque composante des déplacements est pendulaire; en sorte qu'on peut se demander si des houles d'autres formes ne sont pas possibles en pleine mer.

M. Boussinesq montre que ce doute n'est pas fondé, et que toute houle simple à mouvements évanouissants aux grandes profondeurs est bien régie par les lois de Gerstner.

Cosserat. — Sur les courbes algébriques à torsion constante et sur les surfaces minima algébriques inscrites dans une sphère. (1252-1254).

M. Cosserat démontre que la détermination des surfaces minima algébriques inscrites dans une sphère revient à la recherche des courbes algébriques à torsion constante.

Il fait voir comment de cette proposition on peut déduire ce théorème dû à M. Fouché :

« La recherche des courbes algébriques à torsion constante revient à la détermination de deux fonctions algébriques v et $f(u)$ d'une variable u vérifiant la relation

$$\frac{4v'}{(u-v)^2} = f'''(u).$$

Pépin (le P.). — Nouveaux théorèmes d'Arithmétique. (1254-1256).

Andrade. — Sur un système explosif propre à mettre en évidence la rotation du globe terrestre. (1257-1259).

Poinsot a eu le premier l'idée de demander à un système explosif une preuve expérimentale de la rotation de la Terre.

La manière dont l'explosion est produite a une influence, que l'on peut d'ailleurs diriger et qui permet d'indiquer un type d'expérience propre à déterminer non seulement la colatitude, mais encore la direction du méridien. Mais le calcul de Poinsot n'est pas tout à fait exact.

Le système S est d'abord en repos relatif à la surface de la Terre en un lieu de colatitude λ. Son moment d'inertie est A. Une explosion interne se produit dans le système qui se rigidifie à nouveau. Son moment d'inertie autour de

la verticale Oz est devenue A'. On demande sa vitesse de rotation φ autour de cette verticale.

Suivant M. Andrade, φ est donnée par la relation

$$A'\varphi = r(A' - A) - p \sum m \int 2x \frac{dz}{dt} dt.$$

Le second terme du second membre ne figure pas dans le résultat de Poinsot. Ce terme d'ailleurs se réduit à zéro pour toute explosion qui admettrait l'axe vertical comme axe de symétrie.

Boussinesq. — Sur la forme nécessairement pendulaire des déplacements dans la houle de mer, même quand on ne néglige plus les termes non linéaires des équations du mouvement. (1310-1316).

Une houle cylindrique simple, propagée au sein d'une mer de profondeur constante, est périodique dans l'espace comme dans le temps, tant qu'on peut négliger les frottements du liquide. Mais, dès qu'il y a lieu d'en tenir compte, cette périodicité ne subsiste rigoureusement que par rapport au temps.

Le but du travail de M. Boussinesq est de déterminer, pour le cas d'une houle de haute mer, les variations de la hauteur des vagues avec leur distance à la région où elles naissent par l'effet soit d'un coup de vent, soit d'impulsions périodiques quelconques. L'auteur montre ensuite comment l'agitation confuse due à un mélange de houles de diverses longueurs, produites en un même lieu, se simplifie dans les régions assez éloignées de ce lieu, par suite de la persistance de la plus longue des houles données et de l'extinction rapide de toutes les autres.

Schlesinger. — Sur l'intégration des équations linéaires à l'aide des intégrales définies. (1396-1398).

ANNALES DES MINES (¹).

8ᵉ série. — Tome XV; 1ᵉʳ semestre 1889.

Ce Volume ne renferme aucun Mémoire ayant trait aux Mathématiques.

Tome XVI; 2ᵉ semestre 1889.

Walckenaer (C.). — Expériences à propos de la soupape de sûreté de M. Dulac. (124-157, 5 pl.).

(¹) Voir *Bulletin*, t. XIII_2, 190.

La relation de ces expériences est précédée de l'exposé de quelques considérations théoriques sur le rôle de la nouvelle soupape de M. Dulac et sur les conditions imposées à l'appareil destiné à l'enregistrement des variations de la pression.

Tome XVII, 1er septembre 1890.

Rateau. — Note sur les rondelles Belleville. (5-46, 3 pl., 3 tabl.).

L'auteur a fait connaître en 1887 (*Comptes rendus*, 13 juin) une formule permettant de calculer les charges que peuvent supporter des rondelles dont les constantes géométriques sont données. Dans le présent article, il expose le mode de calcul qui l'a conduit à cette formule. Il la compare ensuite aux résultats des expériences et montre qu'elle les suit d'une manière satisfaisante. Enfin il en donne quelques applications, notamment à la recherche des meilleures formes de méridienne à adopter pour avoir l'utilisation la plus grande.

L'intégration complète des équations différentielles obtenues étant impossible est faite ici par approximation. L'auteur obtient la formule

$$P = A(1-\xi)(1+m\xi+m\xi^2);$$

P, pression sur la rondelle; A, charge d'aplatissement complet; m, coefficient spécifique ou module, fonction du rapport de la flèche initiale à l'épaisseur; f_0, flèche initiale à l'état naturel; f, flèche sous charge; $\xi = \frac{f}{f_0}$.

Cette formule est assez compliquée en apparence; mais, au fond, elle se prête facilement au calcul. L'auteur donne un abaque à indicateur hexagonal, construit par M. Ch. Lallemand, permettant de trouver très rapidement, avec une approximation de $\frac{1}{50}$, la charge que supporte une rondelle donnée sous une flexion quelconque.

Mettrier. — Notes sur le Service du matériel et de la traction des chemins de fer de l'État belge. (56-198, 3 pl.).

A signaler, dans ce Travail, les calculs relatifs à l'essai et à l'épreuve des essieux droits et des bandages de roues.

Tome XVIII; 2e semestre 1890.

Ce Volume ne renferme aucun Mémoire ayant trait aux Mathématiques.

Tome XIX; 1er semestre 1891.

Massieu. — Nouveaux ordres généraux de la Compagnie de l'Ouest. (529-621).

Exposé des recherches théoriques qui ont servi de base à une revision d'ordres généraux concernant : 1° la limitation de la vitesse des trains; 2° la distance à réserver entre les signaux avancés et leurs poteaux de protection; 3° le nombre de freins à placer dans les trains.

Keller (*O.*). — Influence de la distance et du champ de visibilité sur la probabilité d'être atteint par un projectile dans le tir des armes à feu, les explosions de coups de mines, les projections quelconques. (622-640, 5 fig.).

Le sujet de cette étude est très différent des questions qui sont traitées dans les Ouvrages de Balistique, soit anciens, soit récents, où l'on se préoccupe spécialement de la précision et de la rectification du tir exécuté sur un but déterminé. Ici, au contraire, on essaye d'établir quelques notions élémentaires de la probabilité d'être atteint par un projectile quelconque lorsque l'on n'est pas défilé, c'est-à-dire à l'abri.

Tome XX: 2e semestre 1891.

Nillus (*A.*). — Forces d'inertie dues aux bielles motrices dans les machines à vapeur. (187-220, 3 pl., 2 tabl.).

Les machines à grande vitesse prenant, aujourd'hui, pour la propulsion des navires et l'éclairage électrique, une importance croissante, il devient absolument indispensable d'apporter la plus grande exactitude dans les calculs qui tiennent compte de l'inertie des pièces dites *à mouvement alternatif*.

La connaissance aussi exacte que possible des efforts d'inertie, et, pour y arriver, celle des accélérations des pièces en mouvement, pour chacun de leurs points et pour chaque position de la manivelle, est le but que l'auteur s'est proposé dans cette étude.

9e Série. — Tome I; 1er semestre 1892.

Sauvage (*E.*). — Note sur l'accélération des pièces à mouvement alternatif des machines à vapeur. (277-282, 1 pl.).

Complément à l'article susmentionné de M. Nillus, et développement de la *règle de Mohr*, que peu d'Ouvrages ont fait connaître.

Tome II; 2e semestre 1892.

Colson (*C.*). — La formule d'exploitation de M. Considère. (44-96).

Discussion du Mémoire de M. Considère, paru aux *Annales des Ponts et Chaussees* (7e série, t. III, 1er semestre 1892). Cette discussion s'ajoute ici à quelques réflexions sur l'utilité des chemins de fer secondaires et sur les tarifs.

Sauvage (*E.*). — Écoulement de l'eau des chaudières. (192-202, 4 fig.).

Indication des formules théoriques et description de quelques expériences relatives au dégagement de vapeur et de gouttelettes d'eau chaude sortant d'une chaudière sous pression. Il est à signaler que le jet ne possédait pas de partie cylindrique à l'ajutage, mais s'épanouissait immédiatement, formant une sorte de paraboloïde de révolution dont le sommet posait sur l'orifice.

Dans les conditions et entre les limites des expériences, on peut dire que la plupart des débits observés sont un peu inférieurs à la moitié du débit de l'eau froide s'écoulant dans l'atmosphère par le même orifice et sous la même pression.

Ledoux. — Étude sur les pertes de charge de l'air comprimé et de la vapeur dans les tuyaux de conduite. (541-598, 3 pl., 12 tabl.).

Dans un tuyau rectiligne et horizontal, la perte de charge z est exprimée par la formule

$$z = K\delta \frac{Lu^2}{D},$$

K étant un coefficient numérique, L et D la longueur et le diamètre, δ le poids du mètre cube de gaz, u sa vitesse.

En présence de plusieurs résultats contradictoires, l'auteur a fait faire à Anzin un certain nombre d'expériences ayant pour but de vérifier l'exactitude de la formule et de déterminer la valeur du coefficient K (généralement très voisin de 0,001).

Plusieurs abaques, annexés à ce Mémoire, facilitent la résolution de divers problèmes particuliers.

Tome III; 1er semestre 1893.

Sauvage (E.). — Pertes de charge dans les conduites d'eau d'après la formule de M. Flamant. (196-198, 1 pl.).

Cette formule donne la perte de charge J, par mètre courant, pour une vitesse moyenne U, dans une conduite de diamètre D :

$$(1) \qquad D^5 J^4 = (4a)^4 U^7;$$

a est un coefficient numérique, variable avec la nature de la conduite.

En y introduisant le débit Q, en mètres cubes, et posant $y = D$ et $x = Q^{\frac{7}{19}}$, elle devient

$$J^{\frac{4}{19}} y = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{7}{19}} \times (4a)^{\frac{4}{19}} x.$$

et représente alors une droite passant par l'origine, ce qui permet d'établir un abaque pour la résolution graphique.

La formule (1) a été indiquée par M. Flamant dans les *Annales des Ponts et Chaussées* (7e série, t. IV, 2e sem. 1892).

Nadal. — Étude théorique du rendement réel des machines à vapeur. (675-730, 10 fig., 1 pl.).

Théorie de la transmission de la chaleur dans les parois des cylindres des machines à vapeur.

Théorie des diagrammes des pressions.

Application aux locomotives.

Tome IV; 2ᵉ semestre 1893.

Considère. — Utilité des chemins de fer d'intérêt local. Tarifs. Formule d'exploitation. (45-107, 115-188, 3 fig.).

La Note susmentionnée de M. Colson (t. II) a été également insérée aux *Annales des Ponts et Chaussées*. M. Considère y répond ici en apportant des arguments nouveaux et plus décisifs, d'après lui, pour préciser une discussion technique plutôt que mathématique, mais qui touche à des questions intéressant les finances publiques.

Walckenaer (*C.*). — Note sur les relations entre la pression, le volume et la température de l'acide carbonique. (420-483, 5 pl.).

États physiques ordinaires de l'acide carbonique.

Recherches expérimentales antérieures à la découverte du point critique.

Le point critique.

Nouvelles déterminations expérimentales du réseau d'isothermes.

Chaleur de vaporisation; chaleurs spécifiques de la vapeur saturée et du liquide.

L'équation caractéristique.

Fuchs (*E.*). — Théories relatives à la coordination des soulèvements. Réseau pentagonal et réseau tétraédrique. (539-594, 23 fig.).

I. Actions mécaniques mises en jeu par un soulèvement.

Expérience de M. de Chancourtois. Efforts d'extension. Efforts de compression. Efforts de torsion. Reproductions expérimentales. Causes originaires du soulèvement. Filons métallifères.

II. Principes de la coordination des soulèvements.

1° Nécessité d'une symétrie sphérique.

2° Étude de la symétrie des polyèdres sphériques.

3° Définition et description des cinq polyèdres réguliers sphériques.

4° Choix du mode de symétrie sphérique applicable à la systématisation du relief terrestre.

III. Théorie du réseau pentagonal.

1° Définition des cercles. Première catégorie : Cercles primitifs. Deuxième

catégorie : Cercles principaux. Troisième catégorie : Cercles semi-principaux.
2° Classement des cercles.

IV. Théorie du réseau tétraédrique.
1° Exposé du système.
2° Objections au système tétraédrique.

V. Représentation des grandes lignes du relief par d'autres courbes que les grands cercles de la sphère.

VI. Conclusions générales.

Malgré les immenses travaux accumulés par Élie de Beaumont et ses disciples, le réseau pentagonal n'a jamais été populaire, et il a été abandonné ces dernières années par la plupart des géologues. On peut se demander quelles sont les causes de ce discrédit, qui n'est sans doute que momentané. L'auteur en signale deux principales.

Walckenaer (*C.*). — Sur les moteurs électriques à courants alternatifs. (599-649, 2 pl.).

I. Généralités sur les moteurs à courants alternatifs. 1. Moteurs synchrones. 2. Moteurs à champ tournant.

II. Distribution par courants diphasés des mines de Decize. — Machines génératrices. Tableau de distribution. Ligne. Machine réceptrice.

Tome V; 1er semestre 1894.

Sauvage (*E.*). — Revue de Mécanique appliquée. Pneumatique. (413-510, 31 fig.).

Importante étude où sont traités les sujets suivants :

Bibliographie. Notations. Tracé des courbes de détente. Formule générale du mouvement permanent des gaz. Écoulement par un orifice. Frottement des gaz. Mouvement dans une conduite. Tuyauterie d'air comprimé. Conduites de gaz d'éclairage. Circulation de l'air dans les galeries de mines. Tirage des cheminées. Passage des gaz dans les tubes de chaudières. Ventilateurs à force centrifuge. Principes des machines à piston. Ventilateurs rotatifs, assimilables en principe à des machines à piston. Machines soufflantes. Compresseurs. Moteurs à air comprimé. Transmissions par l'air comprimé. Machines pneumatiques. Transmissions par l'air raréfié.

L'auteur a laissé de côté, pour ne pas allonger ce Mémoire, deux Chapitres de la Pneumatique, l'un relatif à l'emploi de la puissance motrice du vent (moulins, panémones, voilure de navires); l'autre aux appareils fonctionnant par entraînement de l'air ou des gaz (échappement des locomotives, souffleurs, aspirateurs).

Tome VI; 2e semestre 1894.

Nadal. — Étude théorique et pratique des locomotives compound. (5-114, 2 pl.).

L'application du système compound aux locomotives a fait de très grands progrès dans ces dernières années. Il est démontré que ce système est avantageux. Mais on n'a pu, jusqu'ici, préciser d'une façon bien nette les motifs et l'étendue de cette supériorité. L'auteur a pensé qu'on peut y parvenir en appliquant à l'étude des locomotives compound la théorie mathématique des machines à vapeur dont il a fait connaître le résumé dans les *Annales des Mines*, (t. III, 1893).

Tome VII; 1[er] semestre 1895.

Auscher. — Étude sur l'écoulement de la vapeur dans les tuyaux. (325-362, 4 pl.).

L'auteur est amené à conclure de ses expériences qu'on peut réduire franchement le diamètre des tuyaux de vapeur, ce qui a son importance dans les machines marines, pour lesquelles on manque d'espace.

Tome VIII; 2[e] semestre 1895.

Babu (L.). — Calcul des câbles porteurs de plans aériens. (621-650, 11 fig., 1 pl.).

Ce Mémoire comprend trois Chapitres :

Étude d'un câble à vide.

Action exercée par une charge roulante.

Calcul d'un câble en charge.

Il est complété par des abaques destinés à la résolution des formules servant à la détermination des éléments d'un câble assimilé à un arc de chaînette.

Tome IX; 1[er] semestre 1896.

Nadal (J.). — Théorie de la stabilité des locomotives. (413-467, 5 fig., 1 pl.).

La question de la stabilité des locomotives a de tout temps préoccupé les ingénieurs. Mais, en voyant la diversité des solutions adoptées dans la pratique, il est facile de reconnaître que le problème n'est pas complètement résolu. Cela tient à ce que les lois des mouvements parasites n'ont jamais été établies nettement et que, par conséquent, on ne peut pas se rendre compte du degré de stabilité d'une machine donnée.

Le présent Mémoire est divisé en deux Parties. Dans la première, seule ici insérée, on étudie les oscillations du bâti d'une locomotive sur les ressorts.

Carcanagues. — Recherches expérimentales sur l'échauffement de l'air parcourant un tuyau maintenu extérieurement à une température déterminée. (529-552, 2 fig. 1 pl., 11 tabl.).

Les machines locomotives ne peuvent emporter toute l'eau nécessaire à leur

alimentation et, à plus forte raison, celle qu'il faudrait employer à la condensation de la vapeur. On peut donc se demander s'il ne serait pas possible de recourir à l'emploi de l'air atmosphérique comme réfrigérant, ainsi que cela s'est fait déjà pour quelques machines fixes. L'auteur s'est proposé d'étudier les moyens de réaliser cette solution, mais il arrive à des conclusions tellement défavorables, qu'il suffit de les énoncer pour montrer leur impossibilité pratique:

1° L'application d'un condenseur à air aux locomotives se traduirait par une perte de puissance de 12 à 15 pour 100.

2° Elle nécessiterait l'adjonction aux locomotives d'un appareil tubulaire volumineux et du poids de 30 à 35 tonnes et d'une soufflerie encombrante et qui devrait pouvoir fournir 200 mètres cubes par seconde. Ce dernier dispositif à lui seul serait impossible à établir.

On peut donc affirmer, sans crainte d'erreur, qu'il n'y a rien à chercher dans cet ordre d'idées pour l'amélioration des machines locomotives. Cependant, la question paraît pouvoir être reprise avec plus de succès pour la construction d'un moteur léger, à vapeur, qui servirait à l'aérostation.

H. B.

RECUEIL MATHÉMATIQUE, PUBLIÉ (EN RUSSE) PAR LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE MOSCOU.

Tome XVIII; 1896.

Procès-verbal de la séance du 9 janvier 1894. (V-XLII).

Le 9 janvier 1894, la Société mathématique de Moscou célébrait, en séance réunie avec les membres du IXe congrès russe des naturalistes et des médecins, le vingt-cinquième anniversaire de sa fondation. Il y avait plus de trente ans qu'un petit groupe de jeunes professeurs de la Faculté des Sciences mathématiques de Moscou avait formé un petit cercle ayant pour but de tenir ses membres au courant des progrès des Sciences mathématiques, au moyen de communications originales et de comptes rendus de nouveaux travaux. Ce fut de ce cercle que sortit la plus ancienne des Sociétés mathématiques russes, celle de Moscou. Peu de temps après sa fondation, parut son journal spécial, le *Recueil mathématique,* qui fut depuis régulièrement publié par la Société. Dès lors, le nombre des membres de la Société mathématique ne fit que croître. De nouveaux adhérents venaient se joindre à elle, principalement de jeunes mathématiciens de Moscou, pour lesquels la Société se présentait comme une école de haute science. En même temps, l'organe de la Société, le *Recueil mathématique,* qui occupe aujourd'hui une place importante parmi les journaux mathématiques, prenait un développement de plus en plus grand. Le jour de la célébration du vingt-cinquième anniversaire, dix-sept gros Volumes, formés chacun de quatre Parties, avaient déjà paru.

La séance solennelle du 9 janvier fut ouverte par un discours du président de la Société, le professeur N.-V. Bougaïeff, sur l'origine et le but de la Société et sur son importance pour la Science russe, suivi de l'historique de la Société

retracé par son secrétaire, le professeur B.-C. Mlodzieiowski. Vint ensuite la réception des députations apportant des adresses de félicitations de la part des universités et de diverses Sociétés savantes russes; enfin la lecture des télégrammes et des lettres adressées par des institutions et des Sociétés savantes étrangères (dont une lettre flatteuse de la Faculté des Sciences de Paris, revêtue de la signature de son doyen, M. G. Darboux).

La séance fut terminée par une conférence du professeur N.-E. Joukovsky *Sur le rôle de l'interprétation géométrique dans la Mécanique rationnelle.*

Bougaïeff (N.-V.). — Intégrales numériques suivant les diviseurs de caractère mixte. (1-54).

Ce Mémoire fait suite à toute une série de travaux du même auteur. Dans son Ouvrage *Théorie des dérivées numériques* (*Rec. math.*, t. V-VI, 1870-72), M. Bougaïeff a déduit plusieurs lois numériques qui découlent de l'étude des intégrales suivant les diviseurs, et donné des méthodes générales pour la discussion des fonctions numériques. Plus tard, dans son article sur les *Intégrales numériques définies suivant les diviseurs* (*Rec. math.*, t. XVII, 1895), M. Bougaïeff a étudié les lois numériques liées à ces dernières intégrales. L'intégrale numérique définie

$$\sum_{a(n)}^{b} \theta(d),$$

représente la somme des fonctions $\theta(d)$ prise pour tous les diviseurs de l'entier n qui sont compris entre les nombres a et b.

La fonction $\overline{p}(n)$ qui devient égale à l'unité pour tous les nombres n multiples de p, et à zéro pour tous les autres, joue un rôle très important dans la discussion de ces intégrales.

Dans le présent Mémoire se trouvent déduites les lois numériques de caractère mixte; elles comprennent diverses intégrales numériques qui diffèrent entre elles non seulement par les limites a et b, mais encore par les nombres mêmes n. Les plus simples lois numériques de caractère mixte sont celles qui dépendent des fonctions $\overline{\delta}(d)$, où d et δ sont deux diviseurs complémentaires du nombre n, c'est-à-dire tels que $d\delta = n$.

Au commencement de son Mémoire, M. Bougaïeff déduit par la discussion de la fonction

$$\overline{f}(n) = \mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=n} \sum_{u} \bar{\bar{\delta}}(d)$$

le théorème suivant : « La somme des fonctions qui expriment le nombre des diviseurs quadratiques pour les nombres de la suite 1, 2, ..., n, est égale à la somme des fonctions qui expriment le nombre des diviseurs simples ne dépassant pas certaines limites ». (Ce théorème est plus loin étendu à des diviseurs de degrés supérieurs.)

Ensuite, l'auteur étudie des sommes dans lesquelles une ou plusieurs fonctions arbitraires entrent sous le signe Σ de l'intégrale numérique. En terminant, M. Bougaïeff donne plusieurs lois numériques à l'aide d'expressions dans lesquelles les fonctions numériques ou leurs arguments ont un caractère plus complexe.

Bervy (*N.-V.*). — Solution de quelques questions générales de la théorie des intégrales numériques. (519-585).

Ce travail constitue un développement des méthodes proposées par M. Bougaïeff dans son Ouvrage *Théorie des dérivées numériques*, et dans quelques autres travaux du même auteur.

M. Bervy part de l'étude des sommes de la forme

$$\tau(z) = \sum \varphi(x)\,\psi(y),$$

où les quantités x et y sont les racines de l'équation indéfinie $\xi(x, y, z) = 0$, dont on ne prend que les solutions entières.

Dans la grande variété des sommes de ce genre, on choisit *une classe*, celle qui jouit de cette propriété que l'opération directe θ, à l'aide de laquelle on tire la fonction τ de la fonction φ, et l'opération inverse θ^{-1}, qui fournit la fonction φ à l'aide de la fonction τ, sont liées par une relation rationnelle.

Au début de son étude, l'auteur aborde le problème particulier suivant : « Connaissant deux fonctions $\tau(n)$ et $\psi(n)$, trouver la fonction $\varphi(n)$ à l'aide de l'équation

$$\sum_n \varphi(\delta)\,\psi(d) = \tau(n),$$

étant donné que la somme, appelée intégrale suivant les diviseurs, est étendue à tous les diviseurs d et δ du nombre n, tels que $d\delta = n$. Ayant désigné par $\theta(\varphi)$ l'opération à l'aide de laquelle on tire τ de φ, l'auteur examine le caractère de cette opération dans sa répétition réitérée et résout facilement le problème en question. Les propriétés fondamentales de l'opération θ sont ensuite étendues à des sommes de forme plus générale, dans lesquelles les quantités x, y et z sont liées par l'équation $\xi(x, y, z) = 0$. De cette manière, on obtient la solution du problème généralisé.

Dans le second Chapitre, l'auteur s'arrête sur la résolution des équations linéaires aux dérivées numériques de la forme

$$D^n\tau + a_1 D^{n-1}\tau + \ldots + a_n\tau = \varphi,$$

dont les coefficients $a_1, \ldots, a_n$ sont constants; D est le symbole de la dérivée numérique.

Le troisième Chapitre renferme quelques cas particuliers de la résolution des équations numériques; ici se trouvent étudiées, entre autres, les sommes dont les termes dépendent de racines d'équations indéfinies. Dans le quatrième Chapitre, l'auteur traite des développements de fonctions en séries numériques. Le dernier Chapitre est consacré aux expressions asymptotiques de diverses fonctions numériques.

Aladov (*N.-S.*). — Sur la distribution des résidus quadratiques et non quadratiques d'un nombre premier p dans la suite $1, 2, \ldots, p-1$. (61-75).

L'auteur donne cinq théorèmes qui caractérisent la distribution et la posi-

tion réciproque des résidus quadratiques et non quadratiques dans la suite 1, 2, ..., $p-1$.

Mlodzieiovski (*B.-C.*). — Sur un cas du mouvement d'un corps pesant autour d'un point fixe. (76-85).

Ce travail examine le problème de Mme Kowalevski dans le cas simple où les composantes p, q, r de la vitesse angulaire de rotation du corps suivant les axes x, y, z et les cosinus γ, γ', γ'' des angles des mêmes axes avec la direction de la pesanteur sont des fonctions rationnelles du temps. Ayant fait tous les calculs, l'auteur arrive à la conclusion suivante : « Dans le mouvement absolu, le hodographe mobile représente une courbe du quatrième degré, et hodographe fixe une courbe transcendante; dans le mouvement relatif, les deux hodographes sont des courbes unicursales du huitième degré. »

Egoroff (*D.-Th.*). Sur la théorie générale de la correspondance des surfaces. (86-107).

Sur deux surfaces dont les points se correspondent, il existe en général deux systèmes de lignes dont les éléments linéaires correspondants ont un rapport constant le long de chaque ligne. La présente Note a pour objet la recherche et l'étude de ces lignes.

Dolbnia (*J.-P.*). Sur l'expression par des logarithmes de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+px^2+q}}.$$

(108-120).

La traduction de cette Note a été insérée dans le *Bulletin*, t. XVII_2, n° 4.

Dolbnia (*J.-P.*). — Sur un nouveau cas d'intégration par des logarithmes. (150-160).

En se servant des résultats obtenus dans son Mémoire *Sur les intégrales pseudo-elliptiques qui dépendent d'une racine cubique d'un polynome du troisième degré* (voir *Bulletin*, t. XVII_2), l'auteur trouve les deux cas où l'intégrale

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(x^3-a)(x^3-b)}}$$

s'exprime par des logarithmes. Le premier cas a lieu pour $b=2a$; le deuxième cas pour $b=-a\alpha$, où α est la racine complexe de l'équation $\alpha^3=1$.

Dolbnia (*J.-P.*). — Sur la réduction des intégrales abéliennes dépendant d'une équation algébrique binome. (647-688).

Les principaux résultats obtenus dans ce travail ont été donnés dans le *Bulletin*, t. XXII, n° 7.

2de Partie

Pokrovsky (*P.-M.*). — Théorème d'addition des fonctions transcendantes. (121-136).

L'auteur se sert des propriétés des fonctions algébriques renfermant des radicaux quadratiques et du théorème d'Abel. Comme type général des fonctions mentionnées, on peut prendre l'expression

$$\tau = \frac{f_1(t) + f_2(t)\sqrt{R(t)}}{F_1(t) + F_2(t)\sqrt{R(t)}},$$

où f_1, f_2, F_1, F_2 sont des fonctions rationnelles et $R(t)$ un polynome du degré $2\rho + 1$. La fonction τ, comme il est facile de le démontrer, possède les propriétés suivantes : Le nombre de ses zéros n_i est égal à celui de ses infinis m_i; ce nombre ne peut être inférieur à $\rho + 1$. En outre, on peut définir la fonction τ à l'aide des zéros et des infinis que l'on s'est donnés à l'avance, à condition toutefois que ρ des infinis (ou ρ des zéros) ne soient pas arbitraires, mais exprimés en fonction des autres zéros et infinis.

En prenant dans le théorème d'addition d'Abel pour les limites d'intégration (supérieurs et inférieurs) respectivement les zéros n_i et les infinis m_i de la fonction τ, on arrive à la conclusion que la somme correspondante des intégrales de la première espèce s'annule.

Au début l'auteur applique ce théorème aux fonctions elliptiques sous la forme canonique de Weierstrass.

On forme la fonction τ qui possède les zéros n_i et les infinis m_i suivants

$$n = \infty, \infty, \infty; \qquad m_i = s_1, s_2, s_3;$$

on prend s_3 pour infini non arbitraire, les quantités s_1 et s_2 sont arbitraires ainsi que les signes des radicaux $\sqrt{R(s_1)}$ et $\sqrt{R(s_2)}$ (on leur attribue le signe —). Ces quantités sont évidemment les racines de l'équation

$$(t + a)^2 - b^2(4t^3 - g_2 t - g_3) = -4b^2(t - s_1)(t - s_2)(t - s_3) = 0;$$

les coefficients indéterminés a et b sont fournis par les équations

$$a + b\sqrt{4s_1^3 - g_2 s_1 - g_3} = -s_1, \qquad a + b\sqrt{4s_2^3 - g_2 s_2 - g_3} = -s_2.$$

Le théorème d'Abel prendra par suite la forme

$$\int_{s_3}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = u + v,$$

où

$$\int_{s_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = u, \qquad \int_{s_2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = v.$$

En remarquant que les racines s_1, s_2 et s_3 sont liées par la relation

$$s_1 + s_2 + s_3 = \frac{1}{4b^2},$$

et moyennant la définition connue des fonctions Weierstrass, on aura

$$\wp(u + v) + \wp(u) + \wp(v) = \frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right]^2.$$

On déduit avec la même facilité le théorème d'addition pour les fonctions elliptiques sous la forme de Jacobi.

Enfin l'auteur généralise le théorème d'addition et l'étend aux fonctions ultra-elliptiques (voir *Bulletin*, t. XX_2, n° 4, et *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. IV).

Pokrovsky (*P.-M.*). — Sur les fonctions à deux arguments analogues aux transcendantes elliptiques de Weierstrass. (598-624).

Les principaux résultats de ce Mémoire, qui constitue un développement des idées de la Note précédente, ont déjà paru en français sous le titre : *Sur les fonctions ultra-elliptiques à deux arguments* (*Bulletin*, t. XX_2, n° 4). Quant aux nouvelles applications ainsi qu'à l'extension de sa méthode, l'auteur les donne dans son travail, publié en russe : *Sur les principes de la théorie des fonctions transcendantes qui sont régis par le théorème d'addition* (*Annales de l'Université de Kieff*, 1896, n° 5).

Schiller (*N.-N.*). — Sur l'énergie électrostatique dans le cas où le coefficient diélectrique dépend de la force du champ. (137-149).

La présente Note a pour objet d'éclaircir certaines questions abordées dans l'article du prince Golitzine : *Sur l'énergie électrostatique* (*Rec. math.*, t. XVII). M. Schiller donne l'expression de l'énergie potentielle des systèmes de masses, distribuées en volumes ou en surfaces et dont la fonction potentielle satisfait respectivement aux équations généralisées de Poisson ou de Laplace. L'auteur montre ensuite que l'hypothèse qui fait dépendre le coefficient diélectrique de la force du champ électrique, de même que la corrélation entre la perméabilité magnétique et la force du champ magnétique, introduisent une fonction potentielle multiforme, et la notion de l'énergie potentielle perd son sens. De même multiformité de la fonction qui exprime la force du champ magnétique, dépendent les phénomènes auquels Ewing a donné le nom de *magnetic hysteresis* et qui sont accompagnés de la dispersion de l'énergie dépensée pour l'aimantation.

Nékrassow (*P.-A.*). — Étude analytique d'un cas du mouvement d'un corps pesant autour d'un point fixe. (161-274).

L'objet de ce travail est l'étude du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, lorsque le centre de gravité du corps se meut d'après les lois du pendule sphérique. Ce cas a été indiqué pour la première fois par M. Hess (*Mathematische Annalen*, Bd. 37), mais, dans son Mémoire, plusieurs propriétés essentielles du mouvement sont restées inexpliquées. M. Nékrassow donne une analyse détaillée des différentes propriétés de ce mouvement dont se sont aussi occupés, en Russie, MM. Joukovsky et Mlodzieiowski.

Désignons par A, B, C les moments d'inertie par rapport aux axes principaux d'inertie menés par le point fixe O et pris pour axes des coordonnées x, y, z dans le corps; x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du centre de gravité; p, q,

r sont les projections de la vitesse angulaire de rotation suivant les axes; γ, γ', γ'' sont les cosinus des angles que ces axes forment avec la direction de la pesanteur.

En observant les conditions

$$y_0 = 0, \quad A(B - C)x_0^2 = C(A - B)z_0^2, \quad A > B > C,$$

les équations différentielles du mouvement admettront, outre les trois intégrales algébriques connues, la quatrième intégrale particulière de M. Hess

$$Ax_0 p + Cz_0 r = 0.$$

M. Nékrassow introduit à la place des cosinus γ, γ', γ'' les quantités η, ζ, ξ, qui sont les cosinus des angles que forme la direction OV de la pesanteur avec les droites orthogonales suivantes :

1° OH l'axe y d'inertie;

2° La droite OZ qui passe par le centre de gravité G;

3° OΞ menée normalement au plan HOZ. Il introduit, en outre, la variable imaginaire $\xi + i\eta$ qui est figurée par le point v sur le plan ΞOH et coïncide avec la projection sur ce plan du point V qui détermine suivant la direction OV de la pesanteur un segment égal à 1.

Ayant transformé les équations différentielles et leurs intégrales, l'auteur arrive à la conclusion que le mouvement étudié est complètement déterminé par celui des deux points remarquables G et v, et il entre sur cette question dans des détails :

1° Le mouvement du centre de gravité G s'exprime à l'aide de fonctions elliptiques du temps t et s'accomplit d'après les lois du pendule sphérique;

2° M. Nékrassow ramène l'étude du mouvement du point v, lequel détermine à son tour le déplacement du point V et de la droite OV dans leur mouvement relatif dans le solide, à celle d'une équation différentielle linéaire du second ordre dont les coefficients sont des fonctions doublement périodiques. Les intégrales de cette équation et, partant, les intégrales générales des équations différentielles du mouvement sont des fonctions multiformes. L'auteur s'étend sur la recherche et la discussion des intégrales de l'équation différentielle du second ordre ci-dessus; cette discussion le conduit à se poser la question suivante : Pour le solide donné les mouvements périodiques du point v, ayant pour période 2ω, sont-ils possibles ou impossibles?

M. Nékrassow présente le Tableau détaillé du mouvement dans trois cas :

1° Lorsque le solide est susceptible de réaliser deux mouvements asymptotiques de période 2ω;

2° Lorsqu'il n'y a pas de mouvements asymptotiques de période 2ω;

3° Lorsqu'un seul mouvement asymptotique de période 2ω est possible. Ayant proposé ensuite des caractères simplifiés de l'existence des mouvements asymptotiques périodiques, l'auteur termine sa discussion par l'examen des cas particuliers.

Bougaïeff (N.-V.). — La méthode des approximations successives. Son application à la résolution numérique des équations algébriques. (289-336).

La méthode des approximations successives sert à trouver la vraie valeur de l'inconnue d'après la valeur de sa première approximation. Représentons la vraie valeur α sous la forme $\alpha = \alpha_1 + \omega_1$, où α_1 est l'approximation du premier ordre et ω_1 l'erreur du premier ordre. Supposons que l'on ait trouvé pour α, par un procédé quelconque, une autre expression

$$\alpha = \varphi(\alpha_1) + \psi(\omega_1) = \alpha_2 + \omega_2.$$

La quantité $\alpha_2 = \varphi(\alpha_1)$ sera l'approximation du second ordre ou une fonction approchée, et $\omega_2 = \psi(\omega_1)$ l'erreur du second ordre ou une fonction de l'erreur. A l'aide de la fonction approchée et de la fonction de l'erreur on obtient, pour les valeurs approchées, la série d'égalités

$$\alpha_2 = \varphi(\alpha_1), \qquad \alpha_3 = \varphi(\alpha_2) = \varphi^{(2)}(\alpha_1), \qquad \ldots, \qquad \alpha_{\mu+1} = \varphi^{(\mu)}(\alpha_1),$$

et pour les erreurs la série d'égalités

$$\omega_2 = \psi(\omega_1), \qquad \omega_3 = \psi(\omega_2) = \psi^{(2)}(\omega_1), \qquad \ldots, \qquad \omega_{\mu+1} = \psi^{(\mu)}(\omega_1).$$

Après ces définitions M. Bougaïeff donne *la méthode algébrique des approximations successives.*

Soit l'équation

$$\alpha^\mu + p_1\alpha^{\mu-1} + p_2\alpha^{\mu-2} + \ldots + p_{\mu-1}\alpha + p_\mu = 0$$

et admettons que nous ayons trouvé α_1, la première valeur approchée de la racine α, avec l'erreur ω_1, plus petite que l'unité. Formons la série d'équations

$$(\alpha - \alpha_1)^2 = \omega_1^2, \qquad (\alpha - \alpha_1)^3 = \omega_1^3, \qquad \ldots, \qquad (\alpha - \alpha_1)^\mu = \omega_1^\mu;$$

développons-en les premières parties d'après le binome de Newton, et dans la dernière équation substituons à α^μ sa valeur tirée de l'équation proposée. Nous aurons de cette manière $\mu - 1$ équations linéaires par rapport à $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{\mu-1}$. Ayant résolu ces équations nous obtiendrons

$$\alpha = \frac{P}{Q} + \frac{R}{Q}.$$

Les déterminants P et Q dépendent des quantités $\alpha_1, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_1^\mu$; le déterminant R dépend des quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_1^\mu$, ainsi que des quantités $\omega_1^2, \omega_1^3, \ldots, \omega_1^\mu$. La fraction $\frac{P}{Q} = \varphi(\alpha_1)$ nous donnera la fonction approchée et $\frac{R}{Q} = \psi(\omega_1)$ nous fournira celle de l'erreur du second ordre.

Pour trouver la fonction approchée du troisième ordre on se sert des équations

$$(\alpha - \alpha_1)^3 = \omega_1^3, \qquad (\alpha - \alpha_1)^4 = \omega_1^4, \qquad \ldots, \qquad (\alpha - \alpha_1)^{\mu+1} = \omega_1^{\mu+1}.$$

Ayant développé les premières parties d'après la formule du binome et remplacé α^μ et $\alpha^{\mu+1}$ par leurs valeurs tirées de l'équation proposée, nous obtiendrons

$$\alpha = \varphi_1(\alpha_1) + \psi_1(\omega_1), \qquad \text{où} \qquad \psi_1(\omega_1) = B_3\omega_1^3 + B_4\omega_1^4 + \ldots.$$

On trouvera de la même manière les fonctions approchées d'ordres plus élevés.

M. Bougaïeff applique la méthode indiquée à l'extraction des racines; il donne des expressions intéressantes pour les fonctions approchées de divers ordres que l'on obtient dans l'extraction de la racine cubique des nombres.

Ensuite l'auteur propose sa *méthode fondamentale des calculs approchés*.

Supposons que pour la détermination de la valeur approchée de la racine de l'équation

$$f(x) = 0$$

on ait la première approximation α_1 et la première erreur ω_1, c'est-à-dire que $x = \alpha_1 + \omega_1$; on obtient par la méthode bien connue de Newton la formule approchée du second ordre

$$x = \alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} - \frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}\omega_1^2 - \frac{1}{3!}\frac{f'''(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}\omega_1^3 - \ldots.$$

La quantité α, étant racine de l'équation

$$f(x) = f(\alpha_1 + \omega_1) = 0,$$

sera également racine de l'équation

$$x f(x) = (\alpha_1 + \omega_1) f(\alpha_1 + \omega_1) = 0.$$

Ayant développé les fonctions ci-dessus suivant les puissances de ω_1, éliminons ω_1 entre les équations obtenues et déterminons ω_1^2. Ayant ensuite porté la valeur de ω_1^2 dans la formule de Newton, nous aurons

$$x = \alpha_3 + \omega_3, \qquad \text{où} \qquad \alpha_3 = \alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} - \frac{f^2(\alpha_1)f''(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)[f(\alpha_1)f''(\alpha_1) - 2f'^2(\alpha_1)]};$$

α_3 est fonction approchée du troisième ordre.

Pour obtenir la fonction approchée du quatrième ordre, il faut prendre en considération que $\alpha = \alpha_1 + \omega_1$ est racine des équations

$$f(x) = 0, \qquad x f(x) = 0, \qquad x^2 f(x) = 0.$$

On obtient de la même manière les fonctions approchées d'un ordre quelconque.

En terminant, M. Bougaïeff donne l'application de sa méthode à l'extraction de la racine cubique des polynomes et au développement des fonctions algébriques en séries suivant les puissances paires et impaires de la variable.

Bougaïeff (N.-V.). — La méthode des approximations successives. Son application au développement des fonctions en séries (suites) continues. (471-506).

Entendons par le terme *suite continue* le résultat de certaines opérations, répétées dans un ordre déterminé; M. Bougaïeff arrive à ces sortes de suites en appliquant la méthode des approximations successives au cas où α_1 et ω_1 sont des fonctions des variables. Connaissant la fonction approchée $\varphi(\alpha_1)$, on peut obtenir la suite qui exprime x

$$x = \varphi\varphi\varphi\ldots\varphi(\alpha_1) = \varphi^{\infty}(\alpha_1).$$

L'auteur donne une telle suite par le symbole

$$\alpha = |\varphi(\alpha_1)|$$

et donne à la fonction $\varphi(\alpha_1)$ le nom de *clé* de la suite. C'est la recherche des clés de différentes fonctions qui constitue l'objet du présent Mémoire.

Soit l'équation

$$f(\alpha, x) = 0,$$

où α est une fonction de x, et soit $\alpha = \alpha_1 + \omega_1$, où α_1 est une valeur approchée et ω_1 la première erreur (α_1 et ω_1 sont également fonctions de x). A l'aide de la méthode fondamentale des calculs approchés, on a

$$\alpha = \varphi(\alpha_1) + \psi(\omega_1),$$

où

$$\varphi(\alpha_1) = \alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}, \qquad \psi(\omega_1) = -\frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}\omega_1^2 \quad \ldots.$$

Le développement de la fonction α en une suite continue du second ordre se présente sous la forme

$$\alpha = \left| \alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} \right|.$$

La série des approximations successives s'exprimera sous la forme des fonctions $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{\mu+1}$ avec des erreurs de l'ordre $2, 4, \ldots, 2^\mu$.

Si la fonction approchée α_1 est le développement de α suivant les puissances croissantes de la variable avec une approximation de l'ordre μ inclusivement, il est facile de se convaincre que α_2 est le développement avec une approximation de l'ordre $2\mu + 1$; $\alpha_3, \ldots,$ avec une approximation de l'ordre $4\mu + 3$, et ainsi de suite.

Si α_1 est le développement de la fonction α, suivant les puissances négatives de x, avec une approximation de l'ordre $-\mu$, α_2 est le développement avec une approximation de l'ordre $-(2\mu + 1)$, et ainsi de suite.

A titre d'applications, l'auteur donne les développements en suites continues du logarithme, de la fonction exponentielle et des fonctions circulaires et trigonométriques.

M. Bougaïeff termine en proposant l'extension de sa méthode aux fonctions qui satisfont à des équations simultanées.

Bougaïeff (N.-V.). — La méthode des approximations successives. Son application à la représentation des théorèmes de Taylor et de Lagrange sous une forme transformée. (586-597).

Un résumé de ce Mémoire a été présenté par M. Darboux à l'Académie des Sciences de Paris (voir *Comptes rendus*, t. CXXI, séance du 30 décembre 1895, et t. CXXII, séance du 17 février 1896).

Sabinine (E.-Th.). — Sur une surface à courbure constante négative. (507-518).

Cette Note a pour objet l'étude directe de la surface engendrée par la rotation de la tractrice autour de son asymptote.

Andréev (*C.-A.*), *Nékrassow* (*P.-A.*) *et Joukovsky* (*N.-E.*). — Vie et travaux scientifiques de Vassili Grigoriévitch Imschénetsky. (347-467).

Cette vaste monographie contient l'analyse de la carrière et des travaux scientifiques de l'un des plus distingués parmi les savants russes.

V.-G. Imschénetsky (né le 4 janvier 1832, mort le 24 mai 1892), après avoir étudié les Mathématiques à l'Université de Kazan, paracheva son instruction à Paris (1862-1864), où il suivit les cours des célèbres professeurs Duhamel, Lamé, Liouville et M. J. Bertrand. En 1865, V.-G. Imschénetsky fut nommé professeur de Mathématiques pures à l'Université de Kazan; depuis l'année 1872, il professa pendant dix ans la Mécanique rationnelle à l'Université de Kharkov, en 1882, il fut élu Membre de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg.

A la première période de sa carrière scientifique se rapportent deux de ses travaux importants : *Sur l'intégration aux dérivées partielles du premier ordre* et *Étude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes* (¹). Le premier de ces travaux de Imschénetsky figure également, dans ses parties essentielles, dans l'Ouvrage de Mansion (²); son second travail a été joint, comme Appendice, à la traduction allemande de l'Ouvrage de Mansion (³).

C'est de l'année 1869 que datent les rapports intimes qui s'établirent entre V.-G. Imschénetsky et le professeur Hoüel. C'est Hoüel qui, dans ses belles analyses et traductions, tenait les savants de l'Europe occidentale au courant de l'état et des progrès des Mathématiques en Russie (il a dû connaître le Lobatchefsky). Lorsque M. G. Darboux eut fondé le *Bulletin des Sciences mathématiques,* Hoüel s'adressa plusieurs fois à Imschénetsky pour le prier d'attirer des savants russes à la collaboration de ce journal. Pour satisfaire le désir de Hoüel, Imschénetsky a profité du grand Congrès des naturalistes et des médecins russes à Kieff en 1871. Dès lors commencèrent entre les mathématiciens français et russes des rapports parfaitement bien établis par l'intermédiaire du *Bulletin*. Imschénetsky, qui avait beaucoup contribué à propager ce journal en Russie, devint dans la suite son collaborateur permanent.

V.-G. Imschénetsky laissa une longue série de travaux, en tout quarante-quatre Mémoires. Les principaux de ces travaux se rapportent au domaine des équations différentielles : outre les deux Ouvrages que nous venons de citer, il a publié seize Mémoires qui abordent des sujets intéressants et variés (⁴).

(¹) Ces deux Ouvrages ont été traduits en français par Hoüel (ancien professeur de Bordeaux) et imprimés dans l'*Archiv der Mathematik und Physik von Grunert* (t. L, 1869 et LIV, 1872).

(²) Mansion, *Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre*. Paris, 1875.

(³) Mansion, *Theorie der partiellen Differentialgleichungen,* uebersetzt von Maser. Berlin, 1892.

(⁴) Quatorze de ces Mémoires ont paru dans différents journaux russes, un dans le *Bulletin* et un autre dans les *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège*.

Les autres travaux de V.-G. Imschénetsky touchent aux différentes parties des Mathématiques, telles que les propriétés de quelques fonctions importantes, la théorie des intégrales définies et des quadratures, l'application de l'Analyse à la Géométrie, l'Algèbre supérieure, la Géométrie, le Calcul des probabilités. Parmi ces travaux, citons ses Mémoires *Sur les fonctions de Jacques Bernoulli et sur l'expression de la différence entre une somme et une intégrale de mêmes limites* (1), et *Sur la généralisation des fonctions de Jacques Bernoulli* (2).

On a encore de Imschénetsky trois études sur la Mécanique, dont nous citons le Mémoire : *Détermination en fonctions des coordonnées de la force qui fait mouvoir un point matériel sur une section conique* (3), qui renferme la résolution du problème de M. J. Bertrand.

Plusieurs articles du présent Volume du *Recueil mathématique* sont consacrés à la mémoire de V.-G. Imschénetsky.

Imschénetsky (*V.-G.*). — Application des expressions complexes imaginaires à la formation de certains systèmes complètement intégrables d'équations canoniques et d'équations aux dérivées partielles. (625-646).

Ce Mémoire, qui a été inséré dans le *Bulletin,* t. IX, 1876, est actuellement traduit du français en russe.

Imschénetsky (*V.-G.*). — Note sur les équations aux dérivées partielles. (55-60).

Cette Note, traduite en russe, a été publiée dans les *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége,* t. VII_2, 1878, et donne la généralisation des conclusions de l'article précédent.

Soit

$$z = f(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n);$$

ayant posé

$$x_i = q_i + q'_i\sqrt{-1}, \qquad y_i = p'_i + p_i\sqrt{-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

nous aurons

$$z = H + G\sqrt{-1}.$$

Les fonctions H et G, comme il est facile de s'en assurer, annulent identiquement la parenthèse de Poisson

$$(H, G) = 0;$$

d'où nous tirons les conclusions suivantes :

---

(1) La traduction française, faite par Hoüel, a paru dans le *Giornale di Matematica,* t. IX, 1871.

(2) *Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint Pétersbourg,* 1883.

(3) *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* t. IV, 1880.

1° Pour un système d'équations canoniques de l'ordre $4n$,

$$dt = \frac{dp_i}{\frac{\partial F}{\partial q_i}} = -\frac{dq_i}{\frac{\partial F}{\partial p_i}} = \frac{dp'_i}{\frac{\partial F}{\partial q'_i}} = -\frac{dq'_i}{\frac{\partial F}{\partial p'_i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où

$$F = F(H, G),$$

on connaît déjà deux intégrales $H =$ const. et $G =$ const., dont une peut être remplacée par l'intégrale $F(H, G) =$ const. Pour pouvoir appliquer directement le théorème de Poisson, il est nécessaire de trouver encore une intégrale de ce système.

2° On peut choisir d'une certaine manière $2n$ fonctions $G_1, H_1, \ldots, G_n, H_n$, de quatre variables chacune, pour que la parenthèse de Poisson se réduise à zéro; si nous faisons, dans le système d'équations canoniques, la substitution

$$F = F(G_1, H_1, \ldots, G_n, H_n),$$

il deviendra complètement intégrable. En effet, la moitié de ses intégrales est

$$H_i = \text{const.}, \qquad G_i = \text{const.} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

l'autre moitié des intégrales du système sera fournie par le théorème de Liouville (*Journal de Mathématiques*, t. XX, 1855).

3° Ayant effectué jusqu'au bout l'intégration du système canonique, nous trouverons en même temps les intégrales d'une ou de plusieurs équations aux dérivées partielles.

Nékrassow (P.-A.). — A propos d'une Note de V.-G. Imschénetsky sur les équations aux dérivées partielles. (468-470).

Ici l'auteur donne une généralisation particulière des conclusions précédentes de M. Imschénetsky.

Nékrassow (P.-A.). — Sur les équations différentielles canoniques simultanées liées aux quantités complexes dépendant des racines d'une équation algébrique irréductible. (689-710).

L'auteur examine d'abord les équations canoniques qui sont liées aux propriétés des quantités complexes dépendant de la racine carrée. Il est facile d'étendre à ce cas toutes les conclusions faites par V.-G. Imschénetsky dans sa *Note sur les équations aux dérivées partielles*.

Ensuite, M. Nékrassow étudie les équations canoniques qui dépendent de la racine ϖ d'une équation algébrique irréductible du degré ν.

Soit

$$z = f(\varpi, x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

où

$$x_i = \varphi_{0,i} + \varphi_{1,i}\varpi + \varphi_{2,i}\varpi^2 + \ldots + \varphi_{\nu-1,i}\varpi^{\nu-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Admettons que $\varphi_{l,i}$ soient des fonctions de $2m$ variables $p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_m$ qui ne renferment pas la racine ϖ, et posons que, après la substi

tution, z prenne la forme

$$z = H_1 + H_2\omega + \ldots + H_\nu \omega^{\nu-1}.$$

Choisissons les fonctions $\varphi_{j,i}$ de façon que les conditions

$$(H_i, H_j) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu; \ j = 1, 2, \ldots, i-1)$$

soient remplies identiquement.

Si entre les fonctions $H_1, H_2, \ldots, H_\nu$ il n'existe pas de relations avec les coefficients constants, on connaît alors ν intégrales du système canonique

$$dt = \frac{dp_i}{\frac{\partial F}{\partial q_i}} = -\frac{dq_i}{\frac{\partial F}{\partial p_i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

où

$$F = F(H_1, H_2, \ldots, H_\nu).$$

Si le nombre m est égal à ν, on connaît la moitié des intégrales du système canonique; l'autre moitié s'obtiendra à l'aide du théorème de Liouville. On a un cas intéressant, lorsque $k = 1$; les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1}$ sont elles-mêmes les intégrales du système canonique considéré.

En terminant, l'auteur étend ses recherches au cas d'un système canonique dépendant de l'ensemble des racines de plusieurs équations algébriques irréductibles.

Nékrassow (*P.-A.*). — Addition au Mémoire sur les équations différentielles canoniques liées aux quantités complexes. (713-722).

Ici l'auteur fournit des simplifications dans les résultats aussi bien que dans la forme pour quelques-unes des relations qui se rencontrent dans son Mémoire précédent.

Mechtchersky (*J.-V.*). — Note à propos d'un système d'équations canoniques de V.-G. Imschénetsky, intégrable par des quadratures, et sur les forces analytiques de M. Lecornu. (711-712).

Dans son Mémoire *Sur les forces analytiques* (*Journal de l'École Polytechnique*, 1885, cah. LV), M. Lecornu étudie le mouvement dans un plan d'un point matériel, sollicité par des forces dont les projections X et Y sur les axes des coordonnées satisfont à la condition

$$X - Y\sqrt{-1} = f(x + y\sqrt{-1}).$$

M. Mechtchersky fait remarquer que les équations différentielles du mouvement, dans ce cas, présentent un cas particulier du système canonique de V.-G. Imschénetsky.

Nékrassow (*P.-A.*). — Quelques-unes des équations de la Dynamique intégrables par la méthode des quantités complexes (728-735).

L'auteur montre que la méthode généralisée des quantités complexes peut être appliquée à une série de questions de Dynamique dans lesquelles les forces ont un potentiel et, partant, les équations du mouvement admettent l'intégrale des forces vives; il examine deux cas particuliers.

Nékrassow (*P.-A.*) — Sur la règle de V.-G. Imschénetsky pour trouver les intégrales rationnelles des équations différentielles linéaires. (337-346).

La question dont il s'agit avait déjà été résolue par Liouville. V.-G. Imschénetsky a introduit dans sa solution une plus grande coordination : il a donné un procédé basé sur l'emploi d'un facteur d'intégration particulier. C'est M. Nékrassow qui démontre, en toute rigueur, que ce procédé de V.-G. Imschénetsky fournit sous une forme concise la solution la plus élégante de la question.

Nékrassow (*P.-A.*). — Sur la méthode de V.-P. Ermakoff pour trouver les intégrales rationnelles des équations différentielles linéaires. (275-288).

Cette Note a pour objet la discussion de la méthode proposée par M. Ermakoff dans les *Annales de l'Université de Kieff*, 1894.

Appelroth (*G.-G.*). — Observations à propos de la Communication faite par le professeur A.-M. Liapounov à la séance de la Société mathématique de Kharkov, le 10 mai 1893. (723-727).

Dans le premier paragraphe de son Mémoire bien connu, Mme Kowalevski avait montré qu'il n'existe que trois problèmes (celui d'Euler, celui de Lagrange et celui de Kowalevski), lorsque les intégrales générales du mouvement seront des fonctions uniformes du temps n'ayant pas d'autres points singuliers que les pôles. Cette question, qui avait soulevé des discussions très vives parmi les savants russes, a été complètement résolue par les recherches de MM. Appelroth et Liapounov.

La présente Note contient une réplique que M. Appelroth adresse à M. Liapounov.

Extrait des procès-verbaux des séances de la Société mathématique de Moscou. (736-749).

P. M. P.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK (¹).

Tome XXIX; 1884.

Kessler (*F.*). — Sur l'achromatisme. (1-24).

Bohn (*C.*). — Sur la longueur, l'agrandissement, la clarté, le champ des lunettes de Képler, de Ramsden et de Campani. (25-44).

Worpitzky (*J.*). — Sur la décomposition en fractions des fonctions et l'application aux fonctions de Bernoulli. (45-54).

En partant de la formule

$$B(x, n) = n \underset{z=0}{D^{n-1}} \frac{e^{zx-1}}{e^z - 1},$$

l'auteur développe la fonction $B(x, n)$ en série de Fourier.

Schumann (*A.*). — Le théorème d'addition des fonctions elliptiques déduit de la théorie des coniques. (45-61).

Application du théorème de Poncelet sur les polygones inscrits et circonscrits.

Mehmke (*R.*). — Représentation simple des moments d'inertie. (61-64).

Substitution, au volume considéré, de points matériels ayant les mêmes moments d'inertie.

Kessler (*F.*). — Essais de dioptrique graphique. (65-73).

Bohn (*C.*). — Sur la longueur, l'agrandissement, la clarté, le champ des lunettes de Képler, de Ramsden et de Campani. (74-90).

Stoll. — Sur le quadrilatère sphérique inscrit dans un cercle, circonscrit à un autre cercle. (91-110).

Mahler. — Sur les surfaces triplement orthogonales. (111-117).

(¹) Voir *Bulletin*, X_2, p. 171.

Thomae (*J.*). — Calcul des modules des fonctions thêta de Rosenhain. (117-119).

Formules d'approximation où les termes négligés sont du vingtième ordre.

Holzmüller (*G.*). — Relations des hyperboles et des lemniscates d'ordre supérieur avec les éléments de la théorie des fonctions. (120-123).

Beyel. — Remarques sur les centres des sections planes d'une quadratique. (123-127).

Stolz (*O.*). — Sur une Communication de l'auteur insérée dans le vingtième Tome de la *Zeitschrift*, sous le titre : Preuve d'un théorème sur les séries de puissances. (127-128).

Il s'agit de l'extension du théorème d'Abel sur la convergence uniforme.

Böklen (*O.*). — Sur la courbure des surfaces. (129-142).

Sur les surfaces homofocales ayant, en un point donné, un contact du second ordre avec une surface donnée.

Heymann (*W.*). — Sur les équations différentielles qui s'intègrent par les fonctions hypergéométriques. (144-159).

Intégration de l'équation

$$(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)^2\frac{d^2 w}{dx^2}+(\alpha_0+\beta_0 x+\gamma_0 x^2)w=0.$$

L'auteur signale aussi des équations du premier ordre intégrables par les fonctions hypergéométriques, par exemple l'équation

$$(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)\frac{dy}{dx}-(\alpha_1+\beta_1 x)y^2+(\alpha_2+\beta_2 x)y+(\alpha_3+\beta_3 x)=0.$$

Schrœter (*H.*). — Quelques théorèmes sur les coniques. (160-169).

Beyel (*C.*). — Construction linéaire de la quadrique qui passe par neuf points. (170-176).

Zimmermann (*H.*). — Sur les coniques passant par trois points et tangentes à une droite. (176-183).

Thaer. — Le rapport anharmonique. (183-186).

Weiler (A.). — Génération de complexes du premier et du second degré au moyen de congruences linéaires. (187-191).

Extension d'un Mémoire inséré dans le Tome XXVII de la *Zeitschrift*.

Weiler (A.). — Remarques sur quelques complexes. (191-192).

Küttner (W.). — Introduction d'observations incomplètes dans le Calcul des probabilités. (193-211).

Grübler (M.). — Sur les centres de courbure des roulettes. (211-221).

Greiner (M.). — Surface d'une ellipse inscrite, circonscrite ou conjuguée à un triangle. (222-238).

Schirek (C.). — Sur le problème des normales à l'ellipse. (229-242).

Hossfeld (C.). — Sur la théorie des courbes gauches. (242-244).

Zoria (G.). — Démonstration géométrique de propriétés connues d'une forme cubique binaire. (245-250).

La forme est représentée par trois points sur une conique. Toutes les formes qui ont même hessien sont représentées par des sommets de triangles inscrits dans une autre conique bitangente à la conique proposée aux points qui représentent le hessien.

Beyel (C.). — Sur les triangles homologiques réciproques par rapport à une conique, et sur une réciprocité spéciale. (250-255).

Rodenberg (C.). — Construction simple d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués. (255-256).

Heymann (W.). — Pour l'intégration des équations différentielles. (257-271).

Réduction de l'équation de Jacobi

$$\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy + \mathrm{P}(x\,dy - y\,dx) = 0$$

à une équation de Riccati. Application du facteur intégrant aux équations du second ordre.

Résolution de certaines équations algébriques par l'intégration d'équations différentielles.

Rink. — Sur quelques intégrales abéliennes du premier ordre. (272-283).

Il s'agit des intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{[R(x)]^k}},$$

où l'on suppose

$$[R(x)]^k = (x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}\ldots(x-a_m)^{\lambda_m};$$

l'auteur détermine les onze formes possibles pour lesquelles on a $p=1$ et applique, dans ces onze cas, le théorème d'Abel à l'intégration algébrique de l'équation

$$\frac{dx_1}{\sqrt[n]{[R(x_1)]^k}} + \frac{dx_2}{\sqrt[n]{[R(x_2)]^k}} = 0.$$

Thomae (J.). — Le système des cercles d'un plan et sa représentation dans l'espace. (282-304).

Étude du mode de représentation que voici : soit K une sphère tangente au plan, et P le point de la sphère diamétralement opposé au point de contact : à chaque cercle (C) du plan on fait correspondre le pôle (γ) du plan du cercle (C′) de la sphère qui est la perspective du cercle (C), le point de vue étant en P; inversement, à chaque point de l'espace correspond un cercle du plan.

Hossfeld (C.). — Sur la relation de la configuration (12_6, 16_3) avec la solution d'un problème de Steiner : Sur les cercles qui coupent quatre cercles donnés sous un même angle. (305-306).

Schönemann (P.). — Sur la généralisation du théorème de Pythagore et le théorème des lunules d'Hippocrate. (306-310).

Grübler (M.). — Pour la construction des points d'inflexion. (310-313).

Grübler (M.). — Sur la composition des accélérations. (313-315).

Helm (G.). — Calcul des Tables de rentes et de mortalité, et des statistiques de maladie. (315-319).

Schmidt (A.) — Le tétraèdre dont les arêtes opposées sont égales. (321-342).

Matthiesen (*L.*). — Formules générales pour la détermination des points cardinaux d'un système de a surfaces sphériques concentriques, limitant $a+1$ milieux réfringents, exprimées au moyen de déterminants de fractions continues. (343-350).

Hossfeld (*C.*). — Sur le tétraèdre régulier inscrit à une surface algébrique, en particulier à une surface du second ordre. (351-367).

Graberg (*F.*). — Remarques sur les théorèmes projectifs de Schlömilch. (368-369).

Thaer (*A.*). — Distinctions de signe pour la classification des quadriques. (369-376).

Schlömilch. — Remarque sur le quadrant de l'ellipse. (376-378).

Étude des erreurs relatives aux valeurs approchées

$$(a+b)-\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{ab}, \qquad (a+b)-\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\frac{2ab}{a+b},$$

dont la première est par défaut, la seconde par excès.

Böklen (*O.*). — Sur la parabole cubique à directrice. (378-381).

Grübler (*M.*). — Addition au Mémoire sur les centres de courbure des roulettes. (382-383).

Schlömilch. — Sur la série de Lambert. (384).

On a

$$\int_0^\pi (1-q\cos x+q^2)\sin^2 am\frac{Kx}{\pi}\,dx = \frac{2\pi^2}{k^2K^2}\sum\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}.$$

Supplément.

Slawyk (*R.*). — Sur les suites de centres harmoniques du second degré. (1-37).

Sur un mode de correspondance uni-bivoque.

Von Krieg (*F.*). — Sur la relation univoque entre deux espaces obtenue au moyen de faisceaux de plans projectifs; applications. (38-72).

Il s'agit de divers cas particuliers de la transformation définie par M. Nœther (*Math. Ann.*, t. III, p. 552), au moyen de trois relations bilinéaires entre les coordonnées de deux points; l'auteur traite divers problèmes concernant la construction de courbes du troisième et du quatrième ordre, de coniques, de surfaces du troisième ordre, etc.

Veltmann (*W.*). — Transformation algébrique des fonctions doublement périodiques. (73-85).

Le problème est abordé directement sans passer par les deux transformations rationnelles.

Matthiesen (*L.*). — Nouvelles recherches sur la position mutuelle et la position relative à un rayon principal des lignes focales d'un faisceau de rayons infiniment mince. (66-100).

Tome XXX; 1885.

Beyel (*C.*). — Les courbes du quatrième ordre avec trois doubles nœuds d'inflexion. (1-26).

Étude des courbes du quatrième ordre qui satisfont à la définition suivante : Soit (F) un faisceau en involution et (C) une conique; soit A un rayon du faisceau F et A′ le rayon correspondant; le rayon A coupe (C) en deux points; les deux tangentes à (C) en ces deux points coupent A′ en deux points dont le lieu est la courbe considérée.

Heymann (*W.*). — Sur l'intégration des équations différentielles linéaires non homogènes. (27-15).

Examen de différents cas dans lesquels on peut obtenir une solution particulière, sans connaître l'intégrale de l'équation différentielle sans second membre.

Lauermann (*K.*). — Construction des normales à l'ellipse issues d'un point extérieur. (52-57).

Haluschka (*F.*). — Maxima et minima réciproques. (57-59).

Thaer (*A.*). — Équation du cône et du cylindre. (59-64).

Beyel (*C.*). — Les courbes du quatrième ordre avec trois doubles nœuds d'inflexion. (65-78).

Heymann (*W.*). — Sur l'intégration des équations différentielles linéaires sans seconds membres. (79-105).

Dans cette seconde Partie, l'auteur traite de la recherche de solutions particulières d'équations simultanées.

Reuschle (*C.*). — Pour la formation du résultant. (106-110).

Vogt (*H.*). — Démonstration géométrique du théorème sur la déviation minimum du prisme. (111-112).

Rodenberg (*C.*). — Sur les systèmes collinéaires dans l'espace. (112-116).

Hossfeld (*C.*). — Nouvelles remarques sur la relation entre le problème de Steiner et la configuration de l'hexaèdre. (116-119).

Häbler (*T.*). — Pour la détermination de l'intensité du magnétisme terrestre. (119-125).

Heymann (*W.*). — Note sur l'équation différentielle

$$(a_3 + b_3 x + c_3 x^2 + d_3 x^3)\frac{d^2 y}{dx^2} + (a_2 + b_2 x + c_2 x^2)\frac{dy}{dx} + (a_1 + b_1 x)\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0.$$

Cas où l'équation admet la solution particulière

$$y = (x - \varkappa)^\lambda,$$

où $\varkappa$ est une racine de l'équation

$$a_0 + b_0 \varkappa + c_0 \varkappa^2 + d_0 \varkappa^3 = 0.$$

Geisenheimer (*Z.*). — Relations entre les courbures de deux figures réciproques dans l'espace. (129-158).

L'auteur étudie d'abord ces relations pour deux courbes polaires réciproques par rapport à une surface du second degré; il en tire diverses conséquences pour deux surfaces.

Weiler (*A.*). — Sur quelques surfaces qui contiennent des faisceaux de coniques. (159-169).

Étude des surfaces engendrées par l'intersection d'une surface du second degré et d'un plan, les coefficients de l'équation de la surface contenant un même paramètre qui figure, dans l'une au premier degré, dans l'autre au $n^{\text{ième}}$: l'auteur étudie divers cas intéressants, en particulier dans le Mémoire dont le titre suit.

Weiler (A.). — Sur les surfaces du quatrième ordre avec une conique double ou cuspidale. (170-181).

Goldschmidt. — Réciprocités conjuguées. (182-191).

Schlömilch. — Une généralisation du théorème du binome. (191-192).

Déterminer les fonctions entières $f_1(\mu)$, $f_2(\mu)$, $f_3(\mu)$, ..., de manière que la somme

$$F(\mu) = 1 + f_1(\mu)x + f_2(\mu)x^2 + f_3(\mu)x^3 + \ldots$$

jouisse de la propriété

$$F(\mu)F(\nu) = F(\mu + \nu).$$

Somoff (P.). — Sur le mouvement d'un système plan qui reste semblable à lui-même. (193-209).

Étude analytique d'un problème qui a été traité surtout géométriquement (Gronard, Burmeister, Geisenheimer).

Grünfeld (E.). — Conditions pour que deux équations différentielles linéaires aient plusieurs solutions communes. (210-216).

Wittenbauer (F.). — Le plan comme élément mobile. (216-233).

Biermann (O.). — Sur n équations différentielles simultanées de la forme

$$\sum_{\mu=1}^{n-m} X_\mu \, dx_\mu = 0.$$

(234-244).

Extension à n équations du problème de Pfaff. Définition d'une intégrale d'un pareil système. Nombre des intégrales, etc.

Heyer (R.). — Le point double de deux systèmes symétriques dans l'espace. (245-248).

Somoff (P.). — Sur un théorème de Burmeister. (248-250).

Niemöller. — Sur un théorème de Géométrie déduit de la théorie du potentiel. (251-252).

Schlömilch. — Remarque sur le précédent théorème. (252-253).

Soient r et ρ les rayons des cercles circonscrit et inscrit à un triangle; on décompose ce triangle en n triangles par des droites menées par le sommet; soient r_1, ρ_1, r_2, ρ_2, ..., les quantités analogues à r, ρ : on a

$$\frac{r}{\rho} = \frac{r_1 r_2 \ldots r_n}{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n}.$$

Krimphoff (*W.*). — Sur les coordonnées de Schering. (253-256).

Besser (*R.*). — Distribution de l'électricité induite sur un cylindre elliptique illimité. (257-273).

Le problème est traité d'une façon analogue à celle que Heine a employée pour le cylindre circulaire. L'auteur détermine le potentiel pour les points intérieurs et extérieurs en supposant la densité donnée, puis en supposant la valeur du potentiel donnée sur le cylindre.

Witting (*A.*). — Sur la position des racines d'une fonction entière. (274-278).

Démonstration géométrique de ce théorème de M. F. Lucas : « Tout contour fermé environnant le groupe des points racines de l'équation proposée environne aussi le groupe des points racines de l'équation proposée ».

Heyer (*R.*). — Remarques sur le théorème de Pascal. (279-290).

Le théorème est démontré en partant de ce que, une conique étant définie par l'intersection de deux rayons des deux faisceaux

$$T_0 - \lambda T_1 = 0, \qquad T_1 = \lambda T_2 = 0.$$

la droite qui joint les points λ_1, λ_2 a pour équation

$$T_0 - (\lambda_1 + \lambda_2) T_1 + \lambda_1 \lambda_2 T_2 = 0;$$

l'auteur forme l'équation de la droite de Pascal; la méthode même qu'il a suivie est susceptible de s'interpréter quand on remplace les fonctions linéaires T_0, T_1, T_2 par des fonctions du second ou du troisième degré; d'où divers théorèmes relatifs à des hexagones curvilignes inscrits dans une conique.

Loria (*G.*). — Sur un théorème découvert par Steiner et quelques propriétés des surfaces du second ordre. (291-300).

L'auteur part du théorème de Lamé sur l'invariance des quantités

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

pour une transformation orthogonale, et en déduit diverses conséquences relatives aux propriétés des points d'intersection d'une surface du second degré et des arêtes d'un trièdre trirectangle mobile de sommet fixe. L'une de ces propriétés a été énoncée par Steiner (*Œuvres*, t. II, p. 357); elle relie les lon-

2de Partie.

gueurs des cordes interceptées aux distances des points d'intersection au sommet; une autre propriété relie ces dernières distances aux distances des points d'intersection au plan polaire du sommet, etc. M. Gino Loria établit ainsi les théorèmes analogues aux théorèmes d'Apollonius.

Schlömilch. — Sur certains faisceaux de cercles et de triangles. (301-302).

L'auteur étudie, en particulier, une généralisation de la formule

$$\frac{\rho_1\rho_2\ldots\rho_n}{r_1r_2\ldots r_n}=\frac{\rho}{r}$$

signalée plus haut.

Heymann (W.). — Deux théorèmes sur les intégrales d'équations différentielles simultanées. (302-305).

Soient les équations simultanées

$$p\frac{dy_i}{dx}+p_{i1}y_1+p_{i2}y_2+\ldots+p_{in}y_n=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n);$$

soient $y_{i,j}$ les éléments d'un système d'intégrales

$$y'_{i,j}=\frac{dy_{i,j}}{dx},$$

D et D' les déterminants formés respectivement avec les $y_{i,j}$ et les $y'_{i,j}$; on a

$$D=Ce^{-\int\frac{dx}{p}\sum_{i=1}^{i=n}p_{ii}},$$

$$D'=\frac{(-1)^n}{p^n}P.D;$$

P est le déterminant formé avec les p.

Reuschle. — Rectification. (304).

Besser (R.). — Sur la distribution de l'électricité induite sur un cylindre elliptique illimité. (305-324).

Geisenheimer (L.). — Formules d'approximation pour le calcul de volumes ou d'aires relatifs à de petites portions d'une surface. (325-335).

Si l'on considère par exemple une portion de surface s'étendant autour d'un point O et assez petite pour qu'on puisse négliger le cube des distances des points de la surface au plan tangent en O, on pourra évaluer approximativement le volume limité par le plan tangent, la portion de surface considérée et

le cylindre qui projette sur le plan tangent le contour de la portion de surface. En prenant pour axe des x et des y dans le plan tangent deux tangentes conjuguées, et pour axe des z une parallèle à la direction suivant laquelle on projette et que l'on suppose faire un angle γ avec le plan tangent, on aura pour le volume

$$V = \int\int \left(\frac{r}{2} x^2 + \frac{s}{2} y^2\right) \sin(xy) \sin\gamma \, dx \, dy = \frac{1}{2 \sin^2(xy)} \left(\frac{T_x}{\rho_y} + \frac{T_y}{\rho_x}\right),$$

en désignant par ρ_x, ρ_y les rayons de courbure des sections normales, par T_x, T_y les moments d'inertie de la projection par rapport aux axes des x et des y. L'auteur multiplie les exemples de cette nature, qui donnent souvent lieu à des formules élégantes et pratiquement utiles.

Bobylew. — Sur le mouvement relatif d'un point dans un milieu qui se déforme d'une façon continue. (336-344).

Composition de la vitesse ou de l'accélération absolue, au moyen des éléments du mouvement relatif et du mouvement d'entraînement.

Meyer (*F.*). — Dans quels cas une cubique gauche possède-t-elle une directrice? (345-349).

C'est-à-dire dans quels cas y a-t-il une infinité de systèmes de plans osculateurs formant un trièdre trirectangle? Le lieu du sommet de ce trièdre est la directrice. Cette propriété appartient aux cubiques gauches lorsque les trois asymptotes sont parallèles aux arêtes d'un trièdre trirectangle.

Graberg (*F.*). — Lieu des sommets d'un tétraèdre à arêtes opposées égales ayant une arête donnée. (349-351).

Schlömilch. — Note sur les inégalités. (351-352).

Partie historique [1].

Gelgich (*E.*). — Les instruments de Mathématiques du comte Giambattista Suardi. (1-6).

Hunrath (*K.*). — La résolution de l'équation du quatrième degré réduite de Ferrari et Cardan. (41-49).

Schœnborn (*W.*). — La méthode perdue de Diophante pour le calcul des racines carrées irrationnelles. (91-90).

Baumgart (*O.*). — Sur la loi de réciprocité quadratique. (169-277).

---

[1] Voir *Bulletin*, X_2, p. 1.

Tome XXXI; 1886.

Hossfeld (*C.*). — Sur les relations de réalité des tangentes doubles des courbes du quatrième ordre. (2-11).

L'auteur établit à nouveau divers résultats obtenus par M. Zeuthen [*Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre* (*Math. Ann.*, t. VII). La courbe du quatrième ordre est définie de la façon suivante : soient A, A′ deux points correspondants de deux plans reliés homographiquement; si la droite AA′ touche une surface du second ordre fixe, le point A décrit une courbe du quatrième ordre.

Reuschle (*C.*). — Résolution graphique et mécanique des équations numériques. (12-17).

La méthode de l'auteur permet la résolution des équations numériques des degrés 2, 3, 4, 5.

Weiler (*A.*). — Une théorie élémentaire des congruences de droites. (18-24).

Haentzchel (*E.*). — Sur la connexion entre les fonctions de Lamé, de Laplace et de Bessel. (25-33).

Les fonctions de Laplace et de Bessel sont obtenues comme limites des fonctions de Lamé.

Isenkrahe (*C.*). — Sur l'inversion de l'intégrale complète de première espèce pour un module réel. — Inversion pour de petites valeurs de k au moyen de la transformation de Landen et de séries entières. — Résolution du problème par la formule de réversion de Lagrange. — Résolution du problème par limitation. (34-43).

Sporer (*B.*). — Théorèmes de Géométrie. (43-49).

Ces théorèmes se rapportent aux cercles circonscrits aux quatre triangles formés par quatre droites, aux cinq paraboles inscrites dans les cinq quadrilatères formés par cinq droites, etc.

Bermann (*O.*). — Un problème de minimum. (49-53).

Haentzschel. — Remarques relatives au Mémoire de M. Besser *Sur la distribution de l'électricité sur un cylindre.* (54-55).

Un travail de M. Karl Baer : *Die Function des parabolischen Cylinders*, que n'a pas connu M. Besser, conduit, par une généralisation aisée, au résultat suivant :

L'équation $\Delta V = 0$ se ramène à des équations différentielles ordinaires pour un corps limité par des surfaces du second degré ou des surfaces qui s'en déduisent par inversion.

Cranz (*C.*). — Théorie synthétique de la courbure pour les surfaces du second degré. (55-61).

Klose (*M.*). — Sur deux pentagones égaux inscrits et circonscrits l'un à l'autre. (62-63).

Seelhoff. — Une faute de calcul de J. Bernoulli. (63).

Schlömilch. — Sur les distances d'un point à trois droites. (64).

Points d'un plan tels qu'avec leurs distances à trois droites données on puisse construire un triangle.

Wiener (*A.*). — Le calcul des racines réelles d'une équation quatrinome. (65-87).

Les méthodes signalées sont du même ordre que celles que l'on doit à Gauss pour la résolution des équations trinomes. L'une de ces méthodes consiste dans l'identification des termes de l'équation divisés par un facteur convenable avec les termes de l'égalité

$$\tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha + \tan\alpha\tan\beta - 1 = 0,$$

relative à trois angles dont la somme est égale à 90°.

Heger (*R.*). — Réunion de constructions pour les courbes d'ordre supérieur. (88-101).

Constructions habituellement linéaires, relatives à des points d'intersection manquants, ou à la génération de courbes.

Heymann (*W.*). — Sur la résolution de certaines équations algébriques par l'intégration d'équations différenticlles. (102-120).

Résolution transcendante de l'équation

$$y^n - ny - (n-1)x = 0$$

fondée sur ce que ses racines vérifient l'équation

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \alpha^{n-1} x^{2-n} \frac{d^{n-1}(x^{\alpha-1}y)}{d(x^{\alpha})^{n-1}},$$

en supposant $\alpha = \frac{n-1}{n}$, $n > 2$.

Zimmermann (*H.*). — Démonstration d'un théorème de Steiner. (121-125).

Lang. — Détermination de la hauteur d'un ton au moyen du chronoscope de Hipp. (125-127).

Heymann (*W.*). — Rectification. (127-128).

Heymann (*W.*). — Sur la résolution de certaines équations algébriques par l'intégration d'équations différentielles. (121-146).

Beyel (*C.*). — Sur une réciprocité plane et son application à la théorie des courbes. (147-157).

Cranz (*H.*). — Pour la théorie géométrique du crépuscule. (158-165).

Seelhoff (*P.*). — Décomposition de grands nombres en facteurs. (165-174).

Signalons les résultats suivants :
Les nombres de la forme $2^{2^n}+1$ sont composés quand on a

$$n = 5, 6, 12, 23, 36.$$

Le dernier résultat est dû à l'auteur.

Seelhoff (*P.*). — Le neuvième nombre complet. (174-178).

Le nombre $2^{61}-1$ est premier.

Isenkrahe (*C.*). — Sur l'inversion de l'intégrale complète de seconde espèce E (Legendre) pour des valeurs réelles du module. (178-191).

Heger (*R.*). — Sur les distances d'un point à trois droites. (191-192).

Wiener (*A.*). — Éclaircissement. (192).

Geisenheimer (*L.*). — Génération des éléments polaires pour les surfaces et les courbes au moyen de la généralisation projective du centre de gravité. (193-213).

Démonstration synthétique des théorèmes de Newton, Cotes, Maclaurin,

Chasles sur les relations entre un point et sa droite (ou son plan) polaire, déduite d'une même méthode, qui fournit d'ailleurs d'autres théorèmes généraux, que l'auteur applique aux courbes gauches du troisième ordre.

Schmidt (*C.*). — Pour la théorie de l'élimination. (214-222).

L'auteur reprend l'exposition de la théorie de Bézout d'après Serret, et la complète sur divers points.

Heymann (*W.*). — Sur la résolution de l'équation générale trinome $t^n + at^{n-s} + b = 0$. (223-240).

Résolution transcendante au moyen de séries d'intégrales doubles dans l'ordre d'idée des Communications précédentes de l'auteur.

Isenkrahe (*C.*). — Inversion de l'intégrale elliptique complète de seconde espèce J (Weierstrass). (241-246).

Köttner (*W.*). — Sur la statistique mathématique. (246-250).

Schlömilch. — Sur certains points remarquables du triangle. (251).

Propriétés relatives aux points d'intersection mutuels de trois cercles de même rayon ayant pour centres les sommets d'un triangle.

Frischauf (*J.*). — Essai pour la théorie du potentiel. (252-253).

Discontinuité de la dérivée d'un potentiel de surface.

Sujets de prix de la Société du prince Jablonowski pour les années 1886-1890. (254-255).

Veltmann (*W.*). — Résolution d'équations linéaires. (257-272).

Méthodes pratiques pour la résolution d'équations numériques s'appliquant en particulier au cas d'équations qui proviennent de la méthode des moindres carrés.

Vivanti (*J.*). — Pour la théorie des formes binaires quadratiques à déterminant positif. (273-282).

L'auteur s'occupe des formes quadratiques à déterminants positifs de la forme $(a, b, -c)$ où c est égal à $a+b$, a et b étant positifs : ces formes sont réduites au sens de Gauss; il existe des formes de cette nature quand, le déterminant D étant décomposé en facteurs premiers, le facteur premier 2 et les facteurs premiers de la forme $6n+5$ sont affectés d'exposants pairs. M. Vivanti en indique diverses propriétés.

Hofmann (*F.*). — Essais pour la théorie des transformations rationnelles quadratiques générales. (283-295).

Résolution par rapport à y_1, y_2, y_3 des équations

$$\rho x_1 = \varphi_1(y_1, y_2, y_3),$$
$$\rho x_2 = \varphi_2(y_1, y_2, y_3),$$
$$\rho x_3 = \varphi_3(y_1, y_2, y_3),$$

où $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ désignent trois coniques ayant trois points communs; applications diverses.

Heger (*R.*). — Construction d'une courbe du sixième ordre au moyen de sept points doubles et de six points simples. (296-306).

Seelhoff (*P.*). — Un nouveau criterium pour les nombres premiers. (306-310).

Hossfeld (*C.*). — Décomposition régulière de l'espace dans la Géométrie (non-euclidienne) elliptique. (310-316).

La question a été traitée pour le plan par MM. Klein et Poincaré, en vue de la théorie des fonctions. L'auteur la reprend pour l'espace en raison de son intérêt géométrique.

Schendel (*L.*). — Pour la théorie des fonctions symétriques. (316-320).

Seelhoff (*P.*). — Rectification. (321).

Meister (*K.*). — Sur les systèmes de coniques avec un triangle conjugué commun, ou de quadriques avec un tétraèdre conjugué commun. (321-347).

Les nombreuses propositions que développe l'auteur concernent en général celles des coniques du réseau ci-dessus défini qui jouissent d'une propriété commune (qui, par exemple, sont semblables, ou ont même aire, etc.).

August (*F.*). — Sur les chaînes de corps. (348-361).

Conditions d'équilibre pour un système de corps solides pesants tels que chacun puisse tourner autour d'un point du corps précédent. Le cas où les éléments de la chaîne sont identiques au point de vue mécanique est l'objet d'un examen particulier.

Hanck (*G.*). — Sur les relations entre le complexe linéaire de

droites et le système polaire d'un paraboloïde de révolution. (362-368).

Hofmann (*F.*). — Pour la théorie des invariants. (369-371).

Démonstration élémentaire de ce que la somme des coefficients numériques est nulle.

Reuschle (*C.*). — Introduction logique des coordonnées de droite dans le plan. (371-374).

Hofmann (*F.*). — Note sur les points d'inflexion d'une courbe algébrique et sur un théorème de Clebsch relatif à la théorie des courbes du troisième ordre. (375-378).

Seelhoff (*P.*). — Résolution de la congruence $x^2 \equiv r (\mathrm{mod}\, N)$. (378-380).

Cas où N est grand.

Seelhoff (*P.*). — Les nombres de la forme $k 2^n - 1$. (380).

Nombres premiers de cette forme ($k < 100$, $n \leqq 30$).

Bermann (*O.*). — Un problème de minimum. (381-382).

Thaer (*A.*). — Pour la distinction des surfaces du second ordre. (382-384).

Partie historique.

Demme (*C.*). — Le calcul des racines carrées d'après Archimède et Héron. (1-27).

Steinschneider (*M.*). — Euclide chez les Arabes. (81-110).

Mahler (*E.*). — Les Mathématiques et le Talmud. (121-131).

Demme (*C.*). — Remarques sur les règles d'Ahmes et de Boudhâyana pour la quadrature du cercle. (132-134).

Bergh (*P.*). — Sur les nombres définis par les relations

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \delta_{n-1}, \qquad \delta_n = 2\alpha_{n-1} + \delta_{n-1},$$
$$\alpha_1 = \delta_1 = 1,$$

chez les Grecs. (135).

Anschütz (*C.*). — Sur la découverte de la variation et de l'équation annuelle de la Lune. (161-171, 201-219).

Tome XXXII; 1887.

Weihrauch (*K.*) — Théorie des suites de restes du second ordre. (1-21).

Considérons une progression arithmétique de b termes, dont le premier terme a et la raison d sont des nombres entiers positifs; b est supposé plus grand que a et que d; si l'on multiplie le reste de chaque terme, relativement au diviseur b, par le rang de ce terme, et si l'on désigne par $(a, d)_b$ la somme des résultats ainsi obtenus, l'auteur étudie les propriétés de ces sommes et, en particulier, le tableau à double entrée qui contient ces sommes pour une valeur donnée de b, l'entrée horizontale correspondant aux valeurs de d depuis 1 jusqu'à $b-1$, et l'entrée verticale aux valeurs de a depuis 0 jusqu'à $b-1$.

Heymann (*W.*). — Sur l'intégration des équations différentielles linéaires non homogènes. (22-45).

Recherche d'une solution particulière de l'équation

$$(a_0+b_0x)\frac{d^2y}{dx^2}+(a_1+b_1x)\frac{dy}{dx}+(a_2+b_2x)y=X,$$

dans le cas général (au moyen d'une intégrale définie), et dans le cas où X est un polynome en x. Étude des équations différentielles linéaires dont l'intégration se ramène à l'intégration des équations du type précédent et du type

$$(a_2+b_2x+c_2x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+(a_1+b_1x)\frac{dy}{dx}+a_0y=X.$$

Schendel (*L.*). — Pour la théorie de l'élimination. (46-55).

Expression du résultant de ν formes du $m^{\text{ième}}$ ordre. — La formule d'interpolation de Kronecker. — Sur la racine commune de deux formes binaires. — La résolvante de Tschirnhausen.

Sporer (*B.*). — Quelques propriétés des coniques et des figures inverses. (56-59).

Schoute (*P.*). — Un problème de Géométrie. (59-62).

Zimmermann (*H.*). — Pour la statistique mathématique. (62-64).

Eberhardt (*V.*). — Les courbes gauches du quatrième ordre de première et de seconde espèce, et leur connexion avec le pro-

blème de fermeture de Steiner pour les courbes planes du troisième ordre. (65-82).

Après avoir rappelé, d'après M. Schoute et M. Küpper (*Crelle*, t. XCV; *Math. Ann.*, t. XXIV) la solution du *problème de fermeture* de Steiner relatif aux courbes gauches (*Crelle*, t. XXXII), l'auteur s'occupe de l'extension de ce problème aux courbes du quatrième ordre.

Un système de n sécantes s_i est dit *steinérien*, si, par ces n sécantes, on peut mener n plans a_i jouissant des propriétés suivantes : le plan a_1 mené par la première sécante est quelconque; soient p_1, p_2 les points où il coupe la courbe du quatrième ordre C^4; le plan a_{i+1} passe par s_{i+1}, et par le point p_{i+1}; enfin le dernier plan p_n passe par s_n. Pour une courbe C_1^4 de première espèce, un système de $n = 2m$ sécantes ne conduit pas, en général, à un polygone inscrit $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_1$; mais, s'il y en a un, chaque point de la courbe peut être pris pour le sommet p_1; pour une courbe C_2^4 de seconde espèce, les n sécantes conduisent, en général, à deux polygones inscrits; s'il y en a trois, chaque point de la courbe peut être pris pour le sommet p_1. L'auteur est ainsi amené à s'occuper successivement des courbes C_1^4, C_2^4. Pour les premières, un théorème dû à M. Reye joue le rôle essentiel dans la théorie : il consiste en ce que, si α_i, β_i, γ_i désignent les 3.4 points d'intersection d'une courbe C_1^4, et de trois plans a, b, c, les quatre plans $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ coupent C_1^4 en quatre points δ_i situés dans un même plan δ. Cette proposition permet de déduire un quatrième système steinérien de trois systèmes donnés. Pour les courbes C_2^4, l'auteur rencontre une notion analogue à celle des triangles conjugués pour les coniques : deux sécantes conjuguées étant caractérisées par cette propriété que chacune d'elles est coupée par la polaire de l'autre. Il aborde enfin l'extension aux courbes C_1^4 du problème de Steiner : un système de n points a_i sur une telle courbe est dit *steinérien* si le plan π_1 mené par a_1, et rencontrant la courbe aux points p, p_1, p_2, le plan $\pi_2 = (a_2, p_1, p_2)$, rencontrant la courbe au point p_3, le plan $\pi_3 = (a_3, p_2, p_3)$ rencontrant la courbe au point p_4, ..., le plan $\pi_{n-1} = (a_{n-1}, p_{n-2}, p_{n-1})$ passe par le point $p = p_n$, et le plan $\pi_n = (a_n, p_{n-1}, p_n)$ passe par le point p_1.

Schendel (*L.*). — Décomposition d'une forme du $n^{\text{ième}}$ ordre et du $n^{\text{ième}}$ degré en ses facteurs linéaires. (83-90).

Harnack (*A.*). — Pour la théorie de la conductibilité dans les corps solides. (91-118).

Intégration de l'équation différentielle de la température, d'après les conditions aux limites, et preuve de la convergence dans les cas suivants : un corps limité par deux plans parallèles; un corps illimité terminé par un seul plan; une sphère; une sphère dans un milieu diathermane.

Schendel (*L.*). — Les sous-déterminants de Kronecker. (119-120).

Dœhlmann (*C.*). — Quelques propriétés du système de coniques inscrites à un triangle. (120-127).

Geisenheimer. — Rectification. (127-128).

Eberhard (*V.*). — Les courbes gauches du quatrième ordre de première et de seconde espèce, et leur connexion avec le problème de fermeture de Steiner pour les courbes planes du troisième ordre. (129-144).

Vorsteher (*E.*). — Pour la réduction des intégrales elliptiques à la forme normale. (145-151).

Réduction à la forme normale de la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{A(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)}},$$

dans le cas où p, q, r, s sont réels.

Kœhler (*C.*). — Pour l'introduction des coordonnées de droite en Géométrie plane. (152-169).

Matthiesen (*L.*). — Détermination des points cardinaux dans un système dioptrique catoptrique de surfaces sphériques concentriques, au moyen des déterminants de fractions continues. (170-175).

Heymann (*W.*). — Sur les équations différentielles linéaires simultanées qui s'intègrent par des fonctions hypergéométriques. (176-182).

Intégration des systèmes

$$(a+bx+cx^2)\frac{dy_1}{dx}+(a_1+b_1x)y_1+(c_1+d_1x)y_2=0,$$
$$(a+bx+cx^2)\frac{dy_2}{dx}+(a_2+b_2x)y_1+(c_2+d_2x)y_2=0.$$

Reinhardt (*C.*). — Sur les tangentes communes à deux cercles. (183-185).

Schendel (*L.*). — Le déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre et de la $r^{\text{ième}}$ dimension. (185-187).

Stankewitsch (*B.*). — Pour la théorie dynamique des gaz. (187-191).

Démonstration d'un théorème de M. Boltzmann sur un déterminant fonctionnel.

Schlömilch. — Sur la base des logarithmes naturels. (191-192).

Le fait que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ grandit avec m et reste inférieur à un nombre fixe résulte des inégalités

$$(m+1)\alpha^m > \frac{\alpha^{m+1}-\beta^{m+1}}{\alpha-\beta} > (m+1)\beta^m,$$

où l'on suppose $\alpha > \beta > 0$.

Veltmann (W.). — Sur les fractions continues. (193-217).

Les réduites d'une fraction continue périodique, qui correspondent à des périodes entières, peuvent s'obtenir par la répétition d'une même substitution linéaire. L'auteur applique, aux fractions continues et à la représentation des grandeurs irrationnelles, la théorie de ces substitutions qu'il a donnée dans l'*Archiv von Grunert* (t. LVIII).

Baur (C.). — Quelques propriétés des coefficients binomiaux et leurs applications à la théorie des combinaisons (218-233).

Interprétation, dans la théorie des combinaisons, de l'égalité

$$x^n = 0^n + \binom{x}{1}\Delta' 0^n + \binom{x}{2}\Delta'' 0^n + \ldots + \binom{x}{n}\Delta^n 0^n,$$

où $\Delta' 0^n$, $\Delta'' 0^n$, ... désignent les différences première, seconde, ... formées avec la suite

$$0^n,\quad 1^n,\quad 2^n,\quad 3^n,\quad \ldots,$$

et de l'équation

$$\begin{aligned} x^{n+1} = {} & (n,0)\binom{x}{n}\left[\frac{x-n}{n-1} + n\frac{x+1}{n+1}\right] \\ & + (n,1)\binom{x+1}{n}\left[2\frac{x-(n-1)}{n+1} + (n-1)\frac{x+2}{n+1}\right] \\ & + (n,2)\binom{x+2}{n}\left[3\frac{x-(n-2)}{n+1} + (n-2)\frac{x+3}{n+1}\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (n,n-1)\binom{x+n-1}{n}\left[n\frac{x+1}{n-1} + \frac{x+n}{n+1}\right], \end{aligned}$$

où l'on suppose

$$(n,r) = (r+1)^n - \binom{n+1}{1}r^n + \ldots + (-1)^r\binom{n+1}{r}^n.$$

Küttner (W.). — Pour la statistique mathématique. (234-243).

Pfannstiel. — Sur un point de la Mécanique de Poisson. (244-246).

Saalschütz (L.). — Remarques sur la fonction Gamma pour des valeurs négatives de l'argument. (246-250).

Lorsque μ est négatif, la fonction

$$\Gamma_1(\mu) = \int_0^\infty x^{\mu-1}\left[e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{1.2} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k!}\right]dx,$$

où k est un entier positif déterminé par les conditions

$$-k > \mu > -k-1,$$

fournit la continuation de la fonction Γ. L'auteur donne aussi, dans le cas de $\mu < 0$, les équations qui doivent remplacer les suivantes

$$P(\mu) = \int_0^1 x^{\mu-1} e^{-x}\,dx,$$

$$Q(\mu) = \int_1^\infty x^{\mu-1} e^{-x}\,dx,$$

qui peuvent, pour μ positif, définir les fonctions P, Q de M. Prym (*Crelle*, t. 82).

Saalschütz (*L.*). — Une extension du théorème des factorielles. (250-254).

Pasch (*M.*). — Remarques sur les formes avec deux séries de variables.

Si $f(x,y) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est une forme du $r^{\text{ième}}$ degré par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et du $\rho^{\text{ième}}$ degré par rapport aux variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$, telle que $f(x+\lambda y; y)$ s'annule en même temps que $f(x,y)$ on a $r \leq \rho$ et f peut être regardée comme une forme du $(\rho - r)^{\text{ième}}$ degré en y et du $r^{\text{ième}}$ degré par rapport aux combinaisons $u_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$.

Weinmeister. — Limitation géométrique du nombre e. (256).

Czuber (*E.*). — Les courbes du troisième et du quatrième ordre qui passent par les points cycliques. (257-286).

Les propriétés générales et particulières des quartiques bicirculaires et des cubiques circulaires planes se déduisent simplement de ce que ces courbes peuvent être regardées comme les projections stéréographiques d'une quartique sphérique.

Vivanti (*J.*). — Pour la théorie des formes binaires de déterminant positif. (287).

Étude de l'équation indéterminée

$$Dx^2 - 3 = y^2,$$

faisant suite à un Mémoire inséré dans le précédent tome de la *Zeitschrift*.

Beyel (*C.*). — Sur la section et la perspective d'un quadrilatère gauche. (300-309).

L'auteur traite, en particulier, des plans qui coupent les côtés d'un quadrilatère gauche en quatre points situés sur un cercle.

Schapira (*H.*). — Remarques sur la fonction limite d'une itération algébrique. (310-314).

Généralisation du théorème de Gauss sur la moyenne arithmético-géométrique.

Wittenbauer. — Théorèmes sur le mouvement d'un système plan. (314).

Ces propositions concernent des constructions simples du centre d'inflexion dans un mouvement résultant.

Doehlemann (*K.*). — Sur la génération synthétique des transformations de Cremona du troisième et du quatrième ordre. (315-320).

Une transformation de Cremona du quatrième ordre s'obtient en faisant se correspondre les points de deux plans qui sont situés sur une même sécante d'une cubique gauche; cette définition même permet d'étudier les propriétés de la transformation.

Beyel (*C.*). — Sur des surfaces réglées dont les génératrices sont parallèles aux génératrices d'un cône orthogonal. (321-338).

Considérons deux plans A, B; soit x leur ligne d'intersection; menons par un point O de x une droite h qui ne soit dans aucun des plans A, B; considérons enfin une courbe C^n du $n^{\text{ième}}$ ordre située dans A.

Un plan quelconque E, mené par h, coupe C^n en n points et B suivant une droite b; les perpendiculaires abaissées des points d'intersection sur b engendrent une surface réglée de l'ordre $3n$ quand E tourne autour de h; c'est cette surface dont M. Beyel étudie les propriétés; il examine, en particulier, le cas où C^n se réduit à une droite.

Veltmann (*W.*). — Calcul de l'aire d'un polygone au moyen des coordonnées de ses sommets. (339-345).

Bochow. — Changement de variable dans une dérivée d'ordre n. (346-359).

Déduction directe d'une formule équivalente à celle de Schlömilch.

Kraus (*J.*). — Sur les restes de puissances. (360-363).

Hofmann (*F.*). — Pour l'interprétation géométrique des formes binaires, en particulier des formes du quatrième ordre, dans un domaine ternaire. (363-368).

Dans le mode d'interprétation de l'auteur, les quantités x_1^2, x_1x_2, x_2^2 sont regardées comme les coordonnées homogènes x, y, z d'un point de la conique $y^2 = xz$. Dès lors, partant d'une forme du quatrième degré prise sous la forme canonique $x_1^4 + 6mx_1^2x_2^2 + x_2^4$, l'auteur interprète les racines du hessien.

Schlömilch. — Sur le reste de la série qui représente arc sin x. (368-369).

Saltzmann (*W.*). — Détermination du lieu et de l'éclairement de l'image réfractée d'un point, quand la surface réfractante est un plan. (369-373).

Zimmermann (*H.*). — Démonstration de quelques théorèmes de Steiner. (373-377).

Saalschutz (*L.*). — Sur les expressions qui se présentent sous forme indéterminée. (378-381).

Hess (*W.*). — Sur un point de la Mécanique de Poisson. (382-384).

Partie historique.

Anschütz (*C.*). — Sur la découverte de la variation et de l'équation annuelle de la Lune. (1-15).

Suter (*H.*). — La question *De proportione diametri quadrati ad costam ejusdem* de Albertus de Saxonia. (41-56).

Demme (*C.*). — Le nombre de Platon. (81-99).

Simon (*H.*). — Fautes d'impression dans les Mémoires de Gauss sur la série hypergéométrique. (99-101).

Demme (*C.*). — Le nombre de Platon. (121-132).

Bierens de Haan (*D.*). — Quelques lettres inédites de René Descartes et de Constantin Huygens. (161-173).

Favaro (*A.*). — Sur une nouvelle édition des Œuvres complètes de Galilée. (173).

Witstein (*A.*). — Sur un endroit de l'Almageste. (201-208).

Tome XXXIII; 1888.

Schendel (*L.*). — Représentations diverses du résultant de deux formes binaires. (1-14).

Kilbinger. — Sur une transformation involutive du second degré. (14-21).

Étude de la correspondance entre un point d'un plan et l'intersection de ses deux polaires par rapport à deux coniques.

Haentzschel (*E.*). — Sur l'équation différentielle des fonctions du cylindre parabolique. (22-29).

Cette équation se ramène à la forme

$$v^6 \frac{d^2 z}{dv^2} + 2v^5 \frac{dz}{dv} - (h^2 \alpha^2 - \nu^2 v^2) z = 0;$$

l'auteur en fait l'étude pour les valeurs voisines de $v = 0$, où elle présente un point d'indétermination.

Heymann (*W.*). — Essais sur la transformation des intégrales hyperelliptiques. (30-35).

Si l'on considère l'équation

$$\varphi(v) - x = v^n + A_{n-1} v^{n-1} + \ldots + A_1 v + A_0 - x = 0,$$

où les A ne dépendent pas de x, et si l'on désigne par $\Delta(x)$ le discriminant du premier membre regardé comme un polynome en v, ce discriminant, quand on y remplace x par $\varphi(v)$ se présente sous la forme $\frac{1}{n^2}\psi(v)\,\varphi'^2(v)$, où $\varphi'(v)$ est la dérivée de $\varphi(v)$ et où $\psi(v)$ est une fonction entière du degré

$$(n-1)(n-2).$$

Si, par conséquent, partant de l'équation différentielle

$$dV = \frac{dx}{\sqrt{\Delta(x)}},$$

on fait la transformation $x = \varphi(v)$, elle prendra la forme

$$dV = \frac{n\,dv}{\sqrt{\psi(v)}}.$$

Ce résultat est appliqué à différents cas particuliers.

Un résultat du même genre, relatif au cas où, dans l'équation primitive entre v et x, x entre dans un coefficient autre que le dernier, conduit à des formules de transformation au moyen de fonctions rationnelles. Enfin, l'auteur étudie les différentielles de la forme

$$\frac{v^p\,dv}{\sqrt{\psi(v)}},$$

où $\psi(v)$ est un polynome réciproque de degré pair et les décompose en différentielles plus simples.

Simon (*H.*). — Sur quelques inégalités. (56-61).

Le rapport

$$\frac{a_1^{k+\delta}+a_2^{k+\delta}+\ldots+a_n^{k+\delta}}{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k},$$

où les a sont positifs ainsi que δ, croît avec k.

Heymann (*W.*). — Sur l'équation différentielle

$$\frac{dx}{x^2-1}=\frac{n\,dy}{y^2-1}.$$

(61-64).

Schendel (*L.*). — Représentations diverses du résultant de deux formes binaires. (65-77).

Stoll. — Sur quelques théorèmes de J. Steiner. (78-100).

Polygones inscrits et circonscrits à deux ellipses ayant même centre et même direction d'axes.

Bochow. — Connexion entre les intégrales générales et particulières de certaines équations différentielles. (101-110).

Hossfeld. — Sur un problème de Géométrie dans l'espace. Construction d'une cubique gauche passant par des points imaginaires donnés. (111-116).

Étant données trois involutions à points doubles imaginaires portées par trois droites dans l'espace, construire la droite d'intersection de deux plans passant par trois des points doubles et par les trois autres. Application à la construction d'une cubique gauche.

Buka (*F.*). — Remarques sur la détermination du centre de courbure des roulettes dans un mouvement plan, d'après M. Grübler. (117-118).

Cantor (*M.*). — Sur une proportion en Géométrie élémentaire. (119).

Si A, B, C sont les angles du triangle de base d'un tétraèdre dans lequel l'angle trièdre opposé est trirectangle, on a

$$a\sqrt{\operatorname{tang} A} = b\sqrt{\operatorname{tang} B} = c\sqrt{\operatorname{tang} C},$$

en désignant par a, b, c les arêtes partant du sommet.

Beyel (*C.*). — Quatre problèmes sur le contact du second et du troisième ordre des coniques. (120-125).

Sur des coniques passant par des points fixes et osculatrices à une conique donnée.

Weihrauch (*K.*). — Sur certains déterminants. (126-128).

Zohnstein (*T.*). — Pour la théorie de la moyenne arithmético-géométrique. (129-136).

Déduction directe de l'équation différentielle de la moyenne arithmético-géométrique, d'après une indication fragmentaire de Gauss (*Werke*, III, p. 372).

Vivanti (*J.*). — Sur les surfaces minima. (137-153).

Étude de la surface obtenue en posant, dans les formules bien connues de Weierstrass,

$$F(u) = \left(\frac{1}{u} - u\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{u} + u\right)^{\beta}\frac{1}{u^2},$$

β étant un nombre impair.

August (*F.*). — Sur les surfaces de révolution et la transformation loxodromique. (154-166).

Considérons deux surfaces rapportées à des courbes orthogonales et isothermes, en sorte que les éléments linéaires ds, ds_1 soient donnés par les formules

$$ds^2 = t(du^2 + dv^2), \qquad ds_1^2 = t_1(du_1^2 + dv_1^2).$$

Si, entre les paramètres u, v et u_1, v_1 on établit une correspondance homographique, les trajectoires, sous un angle constant, des courbes $u = \text{const.}$ correspondront aux trajectoires, sous un angle constant, des courbes $u_1 = \text{const.}$ de l'autre surface. Cette remarque, qui s'applique aisément aux surfaces de révolution, permet à l'auteur de traiter plusieurs problèmes intéressants.

Matthiesen (*L.*). — Recherches sur la constitution de pinceaux de rayons astigmatiques infiniment minces après leur réfraction sur une surface courbe. (167-183).

Vivanti (*J.*). — Un théorème sur l'élimination. (184-185).

Haentzschel (*E.*). — Sur les transcendantes de Fourier-Bessel. (185-186).

Rossfeld (*C.*). — Construction de la surface du second ordre par neuf points, dont huit sont imaginaires. (187).

Schmid (*T.*). — Sur la loi de la variation de la pesanteur sur l'ellipsoïde d'équilibre de Jacobi. (188-190).

Burmester (*L.*). — Rectification à la Note de M. Buka, etc. (190).

Schlömilch. — Une propriété des coefficients binomiaux. (190-191).

Schlömilch. — Remarques sur les quadrilatères inscrits à un cercle, circonscrits à un autre. (191).

Maximum et minimum de la surface d'un tel quadrilatère.

Wittenbauer (*F.*). — Sur les mouvements simultanés d'un système plan. (193-208).

Construction du pôle des inflexions et du centre de courbure d'une trajectoire dans le mouvement résultant.

Richter (*O.*). — Sur l'induction galvanique dans un conducteur solide; essai sur la théorie mathématique des courants électriques induits. (209-230).

L'auteur prend pour point de départ la loi d'induction de F. Neumann, telle qu'elle a été formulée dans une Leçon qui lui a été communiquée par M. C. Neumann.

Après avoir développé cette loi, il traite successivement du cas où le conducteur induit est en repos, en sorte que les actions résultent de changements dans le conducteur induisant, puis du cas où le conducteur induisant est en repos et où le conducteur induit se meut.

Koehler (*C.*). — Sur la forme des intégrales logarithmiques d'une équation différentielle linéaire non homogène. (231-242).

Dans l'équation

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + P_m y = q,$$

$P_1, P_2, \ldots, P_m, q$ sont supposés des fonctions algébriques de x. Supposant qu'elle admette une intégrale de la forme

$$y = f(x, \mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n),$$

où f est une fonction algébrique de $x, \mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n$, et où $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$ sont des logarithmes algébriquement indépendants dont les dérivées soient des fonctions algébriques de x, l'auteur montre que f est nécessairement une fonction entière de $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$, dont le degré ne dépasse pas n, et établit quelques propriétés de cette fonction.

Doehlemann (*K.*). — Pour la génération synthétique de la transformation de Cremona du quatrième ordre. (243-245).

Stoll. — Centre et rayon d'un cercle donné par son équation en coordonnées trilinéaires. (245-251).

Tumliez (*O.*). — Pour l'introduction dans la théorie de la polarisation diélectrique. (251-255).

Marck (*W.*). — Influence de l'immersion d'une barre sur sa longueur apparente. (255-256).

Weiler (*A.*). — L'axonométrie comme projection orthogonale. (257-269).

Richter (*O.*). — Sur l'induction galvanique dans un conducteur solide. Essai, etc. (270-291).

Hess (*W.*). — Sur le théorème de Jacobi relatif à la réduction d'une rotation de Lagrange à deux rotations de Poinsot. (292-305).

Démonstration nouvelle de la décomposition en deux mouvements de Poinsot du mouvement d'un corps pesant de révolution, suspendu par un point de son axe.

Matthiesen (*L.*). — Remarques sur la communication de M. Schmid, relative à la loi de la variation de la pesanteur, etc. (306-307).

Sporer (*B.*). — Triangles rectangles et équilatéraux inscrits à une conique. (306-311).

Saalschütz (*L.*). — L'intégrale elliptique de première espèce avec un module imaginaire. (311-313).

2de Partie

x, α, β étant réels, et x étant plus petit que un, on a

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)[1-(\alpha-\beta i)^2 x^2]}}$$
$$= \int_y^\infty \frac{(v-\alpha-i\beta)\,dv}{\sqrt{2(v-\alpha)(v^2-\alpha^2-\beta^2)[v^2-\alpha^2-\beta^2-2(v-\alpha)]}}$$

Heymann (*W.*). — Note sur l'intégrale elliptique de première espèce avec un module imaginaire. (313-314).

Braun (*W.*). — Sur les coefficients des fonctions sphériques d'une variable. (314-316).

$$P^n(x) = \frac{1}{2^n}\sum (-1)^r \binom{2n-2r}{n-r}\binom{n-r}{r} x^{n-2r}.$$

Lohnstein (*T.*). — Sur la moyenne harmonico-géométrique. (316-319).

Si, partant des nombres x, y, on fait

$$x_n = \frac{2x_{n-1}y_{n-1}}{x_{n-1}+y_{n-1}}, \qquad y_n = \sqrt{x_n y_n},$$

la limite de x_n ou de y_n pour n infini, multipliée par la moyenne arithmético-géométrique de x, y, donne comme produit xy.

Lohnstein (*T.*). — Rectification. (318).

Puluj. — Un problème d'interférence avec deux cordes vibrantes. (318-319).

Prix philosophique de Beneke. (319-320).

August (*F.*). — Mouvement d'un fil suivant une courbe. (321-336).

Un fil se meut généralement en décrivant une surface. M. August étudie les conditions pour que le mouvement s'effectue suivant une courbe, chaque élément du fil venant remplacer le suivant : il traite un certain nombre de cas particuliers intéressants.

Burmester (*L.*). — Génération cinématique de surfaces par le roulement d'un cylindre sur un cylindre. (337-348).

Un cylindre de révolution (P) roule à l'intérieur d'un cylindre de révolution fixe Π de rayon double. Une courbe tracée sur P engendre un conoïde dont les génératrices sont normales à l'axe de Π. M. Burmester examine quelques cas particuliers.

Kleiber (*J.*). — Construction d'une surface de complexe de Plücker au moyen de ses quatre rayons singuliers. (349-356).

Considérant un complexe du second ordre (C) et une droite (G); tout plan (P) passant par (G) contient une conique enveloppe des droites de (C) qui sont dans ce plan. Pour quatre positions de (P) la conique se réduit à deux points; la droite qui porte ces deux points est un rayon singulier de la surface lieu de la conique, surface qui est du quatrième ordre. C'est de la construction de cette surface que s'occupe l'auteur.

Loria (*G.*). — Pour la théorie de l'élimination. (357-358).

Vivanti (*G.*). — Sur une propriété des coefficients binomiaux. (358-360).

Bermann (*O.*). — Sur la moyenne distance du Soleil et d'une planète. (361-362).

Saalschütz (*L.*). — Nouvelles remarques sur la fonction gamma avec un argument négatif. (362-372).

Intégrale définie qui donne dans ce cas $\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Ulbricht (*R.*) — Équation de résistance d'une surface de niveau potentiel. (372-373).

Schroeter (*H.*). — Théorème sur la conique inscrite à un heptagone. (373-374).

Hofmann (*F.*) — Note sur deux théorèmes du Calcul des probabilités. (375-381).

Hofmann (*F.*). — Expression paramétrique de substitutions orthogonales identiquement réversibles, obtenues géométriquement. (381-384).

Partie historique.

Hunrath (*K.*). — Pour l'histoire du calcul approché des racines carrées. (1-11).

Gelcich (*E.*). — Esquisse d'une histoire des lois du choc. (41-58), (81-89).

Unger (*F.*). — Le plus vieux livre de Calcul allemand. (125-148).

Heiberg (*J.*). — Petits fragments pour les Mathématiques byzantines. (161-170).

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

Tome XXXIV; 1889.

Weiler. — Sur les cercles osculateurs des coniques. (1-6), (177-184), (282-289).

Détermination du cercle osculateur, en un point d'une conique, par les méthodes de la Géométrie synthétique.

Meister. — Sur les surfaces du second degré qui ont un tétraèdre donné comme tétraèdre conjugué commun. (6-24), (73-81).

Suite d'un travail inséré au tome XXXI.

La condition, imposée à une surface du second degré, d'admettre un tétraèdre donné comme tétraèdre conjugué, est équivalente à six conditions linéaires, qu'on regarde la surface comme lieu de points, ou qu'on la regarde comme enveloppe de plans. Les surfaces considérées forment donc un système linéaire triplement infini et dualistique. Chaque système linéaire triplement infini et dualistique de surfaces du second degré, dans lequel les systèmes, doublement et simplement infinis, ne sont pas dualistiques, est formé de surfaces ayant un tétraèdre conjugué commun. L'auteur étudie les cônes et les coniques du système, et indique ensuite l'application à ce système, faite par M. H. Sturm, de la théorie des caractéristiques. Suivent des recherches générales sur les réseaux et faisceaux de surfaces compris dans le système.

Rachmaninow. — Réduction des équations du mouvement relatif à la forme canonique. (25-35).

Étude du cas général où les liaisons du système dépendent du temps.

Kœhler. — Sur la forme des intégrales logarithmiques d'une équation différentielle linéaire non homogène. (36-54).

Suite d'un travail inséré au tome XXXIII.

Dans le travail auquel il est fait allusion, on détermine, d'une manière générale, la forme des intégrales logarithmiques d'une équation différentielle linéaire, non homogène, à coefficients algébriques, et l'on indique, dans le cas où l'intégrale générale est, par rapport aux logarithmes qui y figurent, un

polynome entier d'ordre égal à celui de l'équation différentielle, une forme caractéristique de l'intégrale.

Le cas où l'intégrale générale est une fonction linéaire de logarithmes a été étudié par M. Kœnigsberger; l'auteur étudie ici le cas où cette intégrale est une fonction du second degré des logarithmes qui y figurent.

Mildner. — Sur la détermination d'un produit infini. (55-59).

Calcul à l'aide de suites périodiques du produit infini

$$\left[1+\left(\frac{k}{x}\right)^n\right]\left[1+\left(\frac{k}{2\pi-x}\right)^n\right]\left[1+\left(\frac{k}{2\pi+x}\right)^n\right]\left[1+\left(\frac{k}{4\pi-x}\right)^n\right]\left[1+\left(\frac{k}{4\pi+x}\right)^n\right]\cdots$$

Schlömilch. — Moyenne hyperarithmétique et hyperharmonique avec des applications géométriques. (59-63).

L'auteur propose d'appeler *moyenne hyperarithmétique*, entre r_1 et r_2, l'expression $a_1 r_1 + a_2 r_2$ où a_1 et a_2 sont des constantes quelconques et *moyenne hyperharmonique* l'expression $\frac{b_1}{r_1}+\frac{b_2}{r_2}$ où b_1 et b_2 sont encore des constantes quelconques. Ces dénominations sont-elles vraiment indispensables pour énoncer simplement les résultats élémentaires auxquels il parvient?

Lerch. — Nouvelle démonstration d'une formule de Kirchhoff. (63-64).

Cette formule établie très simplement est la suivante :

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{y^\alpha}{1-xz^\alpha}=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1-xyz^{2\mu}}{(1-xz^\mu)(1-yz^\mu)}\,x^\mu y^\mu z^{\mu^2}.$$

Haas. — Sur les indicatrices des coniques. (65-72).

Étant donnés dans un plan une conique C et un point P quelconque, l'auteur appelle *indicatrice* du point la conique infiniment petite dont les diamètres conjugués coïncident avec les droites issues de P et conjuguées par rapport à C.

Cranz. — Sur la relation entre la dilatation d'un conducteur parcouru par un courant alternatif et l'intensité du courant. (92-110).

Stankewitsch. — Sur la théorie mécanique de la chaleur. (112-116).

Soient p, v, T la pression, le volume spécifique et la température absolue et $F(v, p, T) = 0$ l'équation caractéristique d'un corps. Désignant par ε l'énergie interne de l'unité de masse du corps, l'auteur pose

$$\varepsilon = \varphi(v, T)$$

et établit une relation entre les fonctions φ et F.

Hofman. — Détermination de la valeur de la preuve par 9, d'après la connaissance de la précision subjective du calculateur. (116-119).

Wangerin. — Sur l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin\varphi)\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ et sur quelques autres qui s'y rattachent. (119-126).

Établissement des formules

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin\varphi)\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{K} \log(\operatorname{sn} u)\,du = -\frac{1}{2}K\log k - \frac{\pi}{4}K'.$$

Wangerin. — Sur le cône circonscrit à une surface du second ordre. (126-128).

Détermination des axes de ce cône.

Küpper. — Sur les surfaces du troisième ordre (F^3) et du quatrième ordre à conique double (F^4) et en particulier sur les droites qu'elles renferment. (129-160).

Détermination de cinq transformations quadratiques, qui transforment en elle-même une surface F^3. Transformation en plans R des couples de points (r, ρ) de l'espace. Domaines conservés par cette transformation. Passage à F^4, ses 16 droites. Leurs rapports réciproques. Le cône de Kummer σ^2. F^4_i avec i points doubles D_i en dehors de la ligne double a^2: la droite binaire. La surface du troisième ordre F^3 et ses 27 droites. La construction du double-six $\left(\frac{a}{b}\right)$. F^3 avec i points doubles D_i en dehors de a^2.

Gleichen. — Sur la réfraction de la lumière par les prismes. (160-176).

Helmholtz a montré, dans son Optique, que des rayons, issus d'un point et formant un pinceau, passent encore par un point après avoir traversé un prisme d'épaisseur négligeable dans la position du minimum de déviation; l'auteur étudie les modifications à apporter à cette proposition quand l'épaisseur du prisme n'est plus négligeable.

Dalwigk. — Sur une démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre. (185-188).

L'auteur rectifie une démonstration inexacte donnée dans le t. XXVIII du même journal.

Schlömilch. — Une propriété projective de l'hexagone de Pascal-Brianchon. (188-189).

Schmidt. — Sur la résolubilité d'un système d'équations linéaires. (189-190).

Rieke. — Un théorème de théorie des nombres (190-191).

Soit p un nombre premier, $P = (p-1)!$ on a la congruence

$$\frac{P}{1} + \frac{P}{2} + \ldots + \frac{P}{p-1} \equiv 0 \quad (\bmod p^2).$$

Schendel. — Remarque sur la Communication du Dr W. Braun : *Sur les coefficients des fonctions sphériques d'une variable* (*Zeitschrift*, t. XXXIII). (191-192).

Saalschütz. — Note sur l'article : *Sur l'étude des expressions qui paraissent indéterminées* (*Zeitschrift*, t. XXXII). (192).

Frischauf. — Sur la fonction ponctuellement discontinue de Riemann. (193-198).

Comme premier exemple d'une fonction ponctuellement discontinue et cependant intégrable, on peut citer la fonction considérée par Riemann

$$f(x) = \frac{(x)}{1^2} + \frac{(2x)}{2^2} + \ldots + \frac{(nx)}{n^2} + \ldots,$$

où (x) désigne la différence entre x et l'entier le plus voisin, et où l'on pose $(x) = 0$ lorsque x est égal à un nombre entier augmenté de $\frac{1}{2}$.

L'auteur étudie la fonction plus générale

$$f(x) = \frac{(x)}{1^\mu} + \frac{(2x)}{2^\mu} + \ldots + \frac{(nx)}{n^\mu} + \ldots,$$

où μ est positif.

Saalschütz. — Les intégrales elliptiques de troisième espèce qui se ramènent à des intégrales elliptiques de première espèce. (199-217).

Legendre donne, dans son *Traité des fonctions elliptiques*, trois suites de valeurs de n pour lesquelles l'intégrale elliptique de troisième espèce $\Pi_0(\varphi, n)$ se laisse ramener à la première espèce. On peut, par la méthode même qu'il a appliquée, établir le théorème plus général suivant :

Si l'on pose

$$n = -k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \qquad \text{et} \qquad a = \frac{mK + m'iK'}{r},$$

où m et m' désignent des entiers positifs ou négatifs, r un entier positif arbitraire, l'intégrale $\Pi_0(\varphi, n)$ [ou $\Pi(u, a)$ lorsqu'on a posé $\varphi = \operatorname{am} u$] se réduit à une intégrale de première espèce $F(\varphi)$ augmentée d'un logarithme.

Beyel. — 57 théorèmes sur le quadrilatère orthogonal (218-237). (290-302).

L'auteur appelle ainsi un quadrilatère déterminé par les trois sommets d'un triangle et le point de concours des hauteurs.

Rieke. — Sur l'équation $x^p + y^p = z^p$; (238-248).

L'auteur croit démontrer le dernier théorème de Fermat.

Beyel. — Remarques sur les pôles et polaires dans les coniques. (248-254).

Hauck. — Sur l'interprétation en perspective parallèle du plan de l'épure dans les projections horizontales et verticales. (254-256).

Schumacher. — Géométrie des cercles d'une sphère. (257-271).

Intersection à angle droit. Contact. Intersection sous un angle quelconque.

Binder. — Sur le système des points tangentiels d'une courbe plane unicursale du quatrième ordre. (272-281).

Toute tangente à une courbe du quatrième ordre la coupe en deux points distincts du point de contact; ce sont ces points que l'auteur appelle *couple de points tangentiels*, et dont il étudie les propriétés. Il termine par une construction linéaire des points d'inflexion d'une courbe plane unicursale du quatrième ordre avec deux points de rebroussement.

Müller. — Sur les points doubles de la courbe du couple. (303-305), (372-375).

Soit ABOO′ un quadrilatère articulé dont OO′ est un côté fixe, le côté AB s'appelle le *couple* et Burmester nomme *courbe du couple* le lieu décrit par un point d'un plan invariablement lié à AB. Cette courbe passe trois fois par les points cycliques et possède, en général, trois points doubles à distance finie; l'auteur étudie la réalité de ces points doubles.

Grübler. — Le rayon de courbure de la roulette. (305-310).

Schotten. — Le théorème de Simpson sur le triangle et son extension. (311-313).

L'extension consiste à mener, d'un point du cercle circonscrit au triangle, trois droites coupant les côtés sous le même angle : les pieds de ces obliques sont encore en ligne droite.

Heffter. — Sur le problème des brachistochrones. (313-316).

L'auteur établit la proposition suivante :

Par deux points situés d'un même côté d'une droite, on peut toujours faire passer un arc de cycloïde dont le cercle générateur roule sur la droite.

Láska. — Théorèmes sur les séries. (316-319).

Si les A vont constamment en décroissant, la suite

$$\beta = \sum_0^\infty \frac{\alpha^r}{r!} A_r$$

est convergente, ainsi que toutes ses dérivées. Avec cette hypothèse, on a la relation générale

$$\beta = \sum_0^\infty (n) \frac{\alpha^n}{n!} \sum_0^\infty (\lambda)(-1)^\lambda \frac{\alpha^\lambda}{\lambda!} \frac{d^{n+\lambda}\beta}{d\alpha^{n+\lambda}},$$

qui comprend, comme cas particulier, la série de Bürmann.

Emmerich. — Sur la preuve par 9. (320).

Veltmann. — Sur la théorie des invariants. (321-330).

Dans le tome XXII du journal, l'auteur avait essayé de donner une démonstration rigoureuse d'un théorème d'Aronhold relatif aux conditions sous lesquelles deux formes entières et homogènes peuvent se déduire l'une de l'autre par une transformation linéaire, la démonstration d'Aronhold ayant été reconnue inexacte par Clebsch. Il confirme l'exactitude du théorème et complète sa démonstration en excluant certains cas particuliers où elle n'était pas valable.

Jahnke. — Détermination du potentiel d'un ellipsoïde homogène. (331-337).

Application d'une formule de Roch (*Journal de Crelle*, t. 49).

Richter. — Sur le limaçon de Pascal. (338-354).

Schirdewahn. — Expression des intégrales hyperelliptiques de deuxième et de troisième espèce et du premier ordre, par des intégrales de première espèce. (355-364).

La méthode employée est au fond une généralisation de celle employée par Jacobi (*Œuvres complètes*, t. I, p. 526) pour les intégrales elliptiques; elle a été appliquée déjà par M. Staude dans un cas particulier (*Acta mathematica*, t. VIII, p. 81).

Schmidt. — Sur une application du calcul symbolique à un problème de la théorie des coniques. (365-371).

Beyel. — Une extension de la notion de rapport anharmonique. (375-382).

Vivanti. — Sur la théorie des fonctions multiformes. (382-384).

M. Fuchs avait partagé en deux classes les intégrales non uniformes d'une équation différentielle suivant que les valeurs qu'elles peuvent prendre en un point donné forment une infinité discrète ou recouvrent complètement une ou plusieurs parties du plan. Dans ce dernier cas, il avait affirmé que l'intégrale ne peut être regardée comme une fonction analytique de la variable. Cette conclusion a déjà été combattue par Casorati (*Acta mathematica*, t. VIII). D'autre part, il résulte d'un théorème de Cantor que les valeurs que peut prendre une fonction multiforme en un point du plan forment toujours un ensemble dénombrable. L'auteur pense néanmoins qu'il est possible d'utiliser la remarque de M. Fuchs pour classer les fonctions non uniformes.

Soit $y = f(z)$ une fonction monogène et I_z l'ensemble des valeurs prises par y en un point arbitraire z; deux cas peuvent se présenter, qui donnent par conséquent deux familles de fonctions :

a. I_z n'est *condensé* (überall dicht), au sens de Cantor, dans aucun domaine.
b. I_z est condensé en un ou plusieurs domaines.

La fonction $y = f(z)$ et la fonction inverse $z = \varphi(y)$ appartiennent à la même famille.

Historisch-literarische Abtheilung.

Gelcich. — Les premières déterminations de la durée de la rotation solaire par l'observation des taches. (1-41).

Staigmüller. — Lucas Paciuolo. (81-121).

Nagl. — Sur un écrit algorithmique du XIIe siècle et sur l'extension du calcul et des chiffres indo-arabes dans les pays chrétiens de l'Occident. (129-161).

Christensen. — Sur les équations du quatrième degré dans le Livre X des éléments d'Euclide. (201).

Supplément au tome XXXIV.

Heiberg. — Nouvelles études sur Archimède. (1).

Nagl. — Le Traité arithmétique de Radulph de Laon. (85).

Nagl. — Le Quadripartitum de Ioannes de Muris et le calcul pratique au quatorzième siècle. (135).

Wappler. — Contribution à l'Histoire des Mathématiques. (147).

Tome XXXV; 1890.

Mehmke. — Sur le mouvement d'un système plan rigide dans son plan. (1-25), (65-81).

Malgré de nombreux travaux sur la Cinématique d'un système plan rigide il semble qu'on ait seulement étudié le cas le plus général et le plus habituel où, le centre instantané étant à distance finie, les deux roulettes y ont un contact du premier ordre. L'auteur se propose d'étudier tous les cas singuliers qui peuvent se présenter. Il fait dans ce but un usage systématique de la représentation géométrique des quantités complexes.

Binder. — Sur la réalité des tangentes doubles des courbes planes du quatrième ordre de genre zéro. (25-35).

L'auteur établit, à l'aide des transformations quadratiques qui changent ces courbes en coniques, la proposition suivante : Les quatre tangentes doubles d'une courbe plane du quatrième ordre à trois points doubles, ou les deux tangentes doubles d'une courbe plane du quatrième ordre avec deux points doubles dont l'un est un *nœud de contact* (point où deux branches se touchent) peuvent à la fois être réelles et posséder de véritables points de contact.

Slawyk. — Le théorème de Feuerbach, sur le triangle. (36-51).

Démonstration par les méthodes de la Géométrie synthétique en faisant usage des quatre tangentes communes.

Dietrichkeit. — Sur un invariant de l'équation différentielle linéaire du second ordre. (52-56).

Hurwitz. — Sur quelques généralisations de la formule de différentiation de Leibnitz. (56-58).

Schrœter. — Une construction pour un problème de Chasles. (59-61).

Ce problème est le suivant : « On donne cinq points a, b, c, d, e dans un plan (dont trois ne sont jamais en ligne droite) et cinq points a', b', c', d', e' sur une droite; trouver le point o pour lequel il y a projectivité entre le faisceau $o(abcde)$ et la suite ponctuelle $(a'b'c'd'e')$ ».

Jan de Vries. — Sur les configurations formées par les centres et les axes de similitude de n cercles du plan. (61-64).

Rosenkranz. — Sur certaines relations quadratiques homogènes entre les intégrales d'une équation différentielle linéaire et homogène du sixième ordre. (82-96), (129-147).

Les produits des éléments d'un système fondamental de solutions d'une équation différentielle linéaire et homogène E_1 à coefficients uniformes, sont des solutions, formant un système fondamental, d'une équation de même nature E_2. Il est clair qu'il existe, entre les solutions distinctes de l'équation E_2, un certain nombre de relations quadratiques de la forme

$$u_\alpha u_\beta - v_\gamma v_\delta = 0,$$
$$u_\lambda^2 - v_\mu v_\nu = 0.$$

Peut-on inversement conclure, de l'existence de ces relations entre les solutions distinctes d'une équation E_2, celle d'une équation E_1 à coefficients uniformes qui soit liée à E_2 comme il vient d'être dit?

M. Fuchs l'a montré pour les équations du troisième ordre; M. Goursat étudiant le quatrième ordre a établi que le système fondamental des solutions peut être formé des cubes des solutions d'une équation du second ordre ou des produits des solutions de deux équations du second ordre.

L'auteur arrive à des conclusions analogues pour le cinquième et le sixième ordre. Dans ce dernier cas, les solutions distinctes peuvent être :

1° Les cinquièmes puissances des solutions d'une équation du second ordre;

2° Les carrés des solutions d'une équation du troisième ordre;

3° Les produits des solutions d'une équation du second ordre et d'une équation du troisième ordre.

La méthode employée s'applique à l'étude des équations différentielles linéaires E dont les solutions sont les produits des puissances des solutions d'un nombre quelconque d'équations différentielles linéaires à coefficients uniformes. Il faut ajouter que si dans les combinaisons formées les solutions de p équations *du même ordre* figurent *à la même puissance* (ce qui ne peut se présenter lorsque E est d'ordre 6), les coefficients de ces p équations ne seront plus nécessairement uniformes en même temps que ceux de E, mais pourront avoir p valeurs.

August. — Sur le mouvement des chaînes libres glissant sur des courbes qui tournent. (97-120).

L'auteur a déjà étudié (*Zeitschrift*, Bd. XXXII), sous quelles conditions une chaîne flexible et inextensible peut glisser sur une courbe, chacun de ses points décrivant la même trajectoire. Il considère maintenant un mouvement dans lequel la chaîne est à chaque instant l'arc d'une courbe invariable sur laquelle elle glisse pendant que cette courbe tourne autour d'un axe avec une vitesse constante. Les courbes tournantes qu'il est amené à considérer sont ou des droites, normales ou non à l'axe de rotation, ou des hélices qui peuvent dégénérer en cercles ou enfin des courbes planes ou gauches qui se laissent définir à l'aide des fonctions elliptiques.

Ulbricht. — Méthode de détermination du pouvoir conducteur spécifique du sol. (121-122).

Adler. — Théorèmes généraux sur l'induction. (123-124).

Puluj. — Le téléthermomètre. (124).

Richter. — Deux théorèmes sur les coniques. (125-126).

Jahnke. — Sur les intégrales algébriques des équations différentielles algébriques. (148-154).

Recherche des conditions sous lesquelles l'équation du premier ordre

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0,$$

où F est un polynome irréductible, admet une intégrale rationnelle.

Kosch. — Contribution à la théorie des systèmes de forces plans. (155-173).

Considérons les composantes des forces d'un système, parallèles à une direction donnée. Ces forces admettent une résultante R qui passe par le centre c des forces parallèles; l'auteur étudie géométriquement les propriétés des forces R et de la droite lieu des points c lorsque la direction change.

Mehmke. — Nouveau procédé pour la détermination des racines réelles de deux équations algébriques numériques à deux inconnues. (170-185).

Résolution graphique des équations à l'aide des sections de deux couples de surfaces faciles à construire à l'aide des méthodes de la Géométrie descriptive.

Saalschütz. — Une formule sommatoire. (186-188).

Bohl. — Sur une généralisation de la troisième loi de Képler. (188-191).

Wallenberg. — Contribution à l'étude des équations différentielles algébriques du premier ordre, dont les intégrales possèdent des points critiques fixes, en particulier de celles qui contiennent la dérivée jusqu'au troisième degré. (194-218), (257-272), (322-353).

La première Partie est consacrée à l'étude des équations binomes à points critiques fixes et à celles qui s'y ramènent par une transformation homographique de la fonction

$$y = \frac{\alpha(z)u + \beta(z)}{\gamma(z)u + \delta(z)}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Les autres ont pour objet les équations où la dérivée figure au troisième

ordre au plus, en particulier aussi celles qui sont de genre *zéro* ou *un* et cependant intégrables algébriquement. L'auteur étudie d'abord les équations trinomes dont il écrit les formes types et dont il forme les intégrales algébriques. Il passe ensuite aux équations différentielles générales du troisième degré, détermine un maximum du genre de leur intégrale algébrique et montre comment les conditions de M. Fuchs se transforment en conditions imposées aux coefficients.

Il donne enfin des recherches sur les équations à points critiques fixes de degré quelconque et quelques exemples.

Dans toutes ces théories on suppose le polynome $F(z, y, y')$ irréductible et l'équation discriminante sans racines multiples.

Steinmetz. — Sur les transformations involutives non univoques de l'espace, définies par un système linéaire de surfaces d'ordre n (219-236), (272-292), (354-375).

Considérons le système linéaire triplement infini de surfaces d'ordre n,

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \lambda_4 F_4,$$

où les surfaces F_1, F_2, F_3, F_4 sont générales, sans points multiples et sans courbes communes. Par chaque point passe un système doublement infini de surfaces qui ont n^3 points communs : ces points sont dits *conjugués*. A chaque point x de l'espace correspondent les $(n^3 - 1)$ points y conjugués, c'est là la transformation étudiée par l'auteur.

A une droite arbitraire correspond une courbe d'ordre $(n^3 - 1)$; à un plan une surface d'ordre $(n^3 - 1)$ également, etc.

Les points x qui coïncident avec un de leurs conjugués appartiennent à une surface d'ordre $4(n - 1)$ et de classe $4(n - 1)(4n - 5)$, la surface fondamentale (Kernfläche) de la transformation.

Soit un point p pris dans un plan Π; à toute droite a tracée par p dans Π correspond une courbe C_a qui coupe Π en $4(n - 1)$ points de a et en $(n - 1)(n^2 + n - 3)$ autres points b. Ces derniers donnent avec p

$$(n - 1)(n^2 + n - 3)$$

droites pb. Inversement, à chaque droite b correspondent $(n - 1)(n^2 + n - 3)$ droites a; il y a donc $2(n - 1)(n^2 + n - 3)$ droites a qui coïncident avec les droites b. Ces droites de coïncidence forment un complexe que l'auteur étudie.

Sur chaque droite du complexe se trouvent deux points conjugués, que l'auteur nomme *points singuliers* du complexe.

Les droites du complexe dont les points singuliers coïncident forment une congruence d'ordre $2(n - 1)(2n^2 - n + 1)$, de classe $6(n - 1)^2$ et de *rang* $4(n - 1)(n^2 + n - 1)$. (Le rang est le nombre des droites de la congruence qui rencontrent deux droites quelconques.)

L'auteur étudie ensuite la dégénérescence de la transformation dans l'hypothèse où les surfaces du système ont des points communs, simples ou multiples, puis des lignes communes.

Il démontre que, dans la première hypothèse, la transformation ne peut devenir univoque que pour $n = 2$. Les surfaces du second degré ayant six points communs définissent une transformation univoque *involutive* de l'espace.

L'existence de *plans principaux* ou de *surfaces principales* d'ordre m donne encore de nouveaux cas de dégénérescence. L'auteur termine enfin en donnant quelques exemples de transformations univoques et non univoques de l'espace.

Sporer. — Sur le nombre des solutions de certains problèmes et sur les propriétés générales des courbes algébriques. (237-246), (294-306).

Sur le nombre des coniques qui sont déterminées par des points, des tangentes et des normales. Sur le nombre des coniques déterminées par des points, des tangentes et des coniques tangentes. Sur les coniques qui touchent cinq courbes quelconques. Sur les coniques qui coupent des courbes données sous des angles donnés. Sur la loi de formation à appliquer dans les questions précédentes et dans les questions voisines. Applications du théorème principal. Sur le nombre des normales à une courbe qui passent par un point. Sur le nombre des courbes de trois faisceaux qui se touchent en un point; sur les courbes osculatrices de deux faisceaux et la hessienne. Sur le nombre des tangentes doubles et des tangentes d'inflexion d'une courbe C^n. Enveloppes des polaires.

Grübler. — Le mouvement instantané de trois droites rigides ayant un point commun, dans un plan. (247-254).

L'auteur établit la proposition suivante : Si trois points arbitraires A_1, A_2, A_3 d'un plan se meuvent avec des vitesses quelconques, le lieu géométrique de tous les points A dont la liaison à A_1, A_2, A_3 par des tiges rigides ne contrarie pas le mouvement est formé de la droite de l'infini et d'une courbe du second ordre. On a facilement six points et trois tangentes de cette courbe.

Il existe un lien étroit entre la proposition précédente et d'autres plus générales relatives à la théorie des *charpentes*. On nomme ainsi un système de s tiges liant entre eux k points de telle sorte qu'en chaque point aboutissent au moins deux tiges. Les points sont les *nœuds* de la charpente, leur ordre de multiplicité est le nombre des tiges qui y passent. La charpente est rigide ou non suivant que les distances de tous les nœuds sont ou non invariables. Il faut, pour la rigidité, qu'il existe au moins $(2k-3)$ tiges; lorsque $s=2k-3$ la charpente est *simple*, elle est *composée* si $s>2k-3$.

Heymann. — Le problème des bissectrices. (254-256).

La question qui consiste à construire un triangle connaissant les longueurs des trois bissectrices n'est, d'après l'auteur, pas encore résolue. Considérant le cercle circonscrit à un triangle et les longueurs des bissectrices comprises à l'intérieur de ce cercle, il se propose de déterminer le triangle connaissant seulement ces trois longueurs. Cette question est ramenée à une équation du troisième degré et à une trisection d'angle.

Helm. — Sur l'application analytique du *principe de l'énergie* en Mécanique. (307-320).

L'auteur appelle *principe de l'énergie* la proposition suivante, relative à des différentielles : Pour tout changement *possible* l'énergie demeure invariable.

Il montre qu'en faisant intervenir, dans le cas de liaisons dépendant ou non du temps, des travaux dus à des forces fictives convenables, ce principe suffit à établir les équations de la Dynamique.

Jahnke. — Sur l'intégration de l'équation différentielle binome du troisième degré. (376-380).

Démonstration des résultats de Briot et Bouquet relatifs aux équations de la forme

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 = f(u),$$

où $f(u)$ est un polynome entier, dont l'intégrale générale est une fonction uniforme doublement périodique.

La méthode adoptée a été déjà employée par M. Weierstrass pour l'équation binome du second degré.

Meyer. — Sur un théorème de Géométrie projective. (381-382).

Si l'on projette un quadrilatère complet d'un point de l'espace sur un plan et si l'on joint en croix deux sommets opposés de l'un des quadrilatères aux sommets correspondants de l'autre, les deux droites ainsi obtenues se coupent toujours sur une même droite.

Hossfeld. — Remarque sur une formule de théorie des nombres. (382-384).

Cette formule est celle de Meissel pour le calcul du nombre des entiers de la suite 1, 2, ..., m qui ne sont divisibles par aucun des n premiers nombres premiers.

Historisch-literarische Abtheilung.

Làska. — Sur Marcus Marci de Kronland. (1-3).

Heiberg. — Contribution à l'histoire des Mathématiques au moyen âge. (40-58), (81-100).

I. Liber Archimedis de comparatione figurarum circularium ad rectilineas.
II. Les éléments d'Euclide au moyen âge.

Braunmühl. — Notice sur les premiers compas à coniques.

Supplément au Tome XXXV.

Richter. — Sur les systèmes de coniques qui touchent quatre fois une courbe du quatrième ordre bicirculaire. (1-111).

Remarques préliminaires.

Ire Section : *Les courbes du quatrième ordre bicirculaires générales.* — Le système des coniques Σ. Généralités sur les foyers des courbes du quatrième ordre bicirculaires. Coniques décomposables et détermination d'un système Σ quand la courbe du quatrième ordre est donnée. Lieu des points correspondants des coniques du système Σ : les courbes Π. Lieu des tangentes correspondantes des coniques Σ; systèmes conjugués Σ et Σ'. Autres recherches sur les courbes Π. Les courbes polaires.

IIe Section : *Exemples de courbes bicirculaires du quatrième ordre.* — Formation des équations de définition quand la courbe est symétrique. Les courbes de Cassini. Les podaires d'ellipse et d'hyperbole relatives au centre. Les courbes de Descartes. Le couple de cercles.

IIIe Section : *Les courbes circulaires générales du troisième ordre.*

IVe Section : *Exemples de courbes circulaires du troisième ordre.* — Formation des équations de définition quand la courbe est symétrique. La cissoïde généralisée. Cercle et droite. Remarque finale sur les tangentes doubles des courbes du quatrième ordre de genre un.

SITZUNGSBERICHTE der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

1er semestre 1892.

Weierstrass (*K.*). — Note concernant la fin de la publication des *Œuvres complètes de Jacobi.* (p. 39).

L'édition des *Œuvres complètes de Jacobi* publiées par l'Académie des Sciences de Berlin, sous la direction de M. Weierstrass, comprend sept Volumes. On y trouve, groupés d'après la nature des sujets traités, tous les Mémoires publiés par Jacobi, ainsi que tous ceux qu'il avait suffisamment mis à point pour que l'on pût les publier. Son *Canon arithmeticus,* publié en 1839, aux frais de l'Académie et dont on peut encore se procurer de nombreux exemplaires, fait seul exception.

Clebsch, puis M. Lottner ont donné, dans un Tome supplémentaire, d'après des Notes de Borchardt, deux éditions du dernier Cours de Dynamique professé par Jacobi à Königsberg. M. Weierstrass demande à l'Académie de décider, quand elle le jugera convenable, s'il n'y aurait pas lieu de publier également d'autres Cours de Jacobi. Il considère comme achevée l'œuvre qu'il avait entreprise.

Fuchs (*L.*). — Sur les équations différentielles linéaires auxquelles correspondent des groupes de substitutions ne dépendant pas de paramètres qui figurent dans les coefficients de ces équations différentielles. (157-176).

1. Envisageons l'équation différentielle linéaire

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + r_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + r_m y = 0,$$

où $r_1, r_2, \ldots, r_m$ sont des fonctions univoques du point analytique (x, s) de la surface de Riemann définie par l'équation algébrique $F(x, s) = 0$. Désignons par w toute expression de la forme

$$w = A_0 y + A_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + A_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}},$$

dans laquelle $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ sont des fonctions univoques du point analytique (x, s). Nous dirons de toutes les équations différentielles linéaires homogènes qui sont vérifiées par une intégrale w, qu'elles forment avec l'équation (1) une même *classe* d'équations différentielles linéaires. C'est là une généralisation de la notion de classe due à Riemann; elle se réduit à cette dernière notion dans le cas particulier où les fonctions univoques $r_1, r_2, \ldots, r_m, A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ de (x, s) sont des fonctions rationnelles de x.

Les intégrales de l'équation différentielle (1), envisagées comme des fonctions du point (x, s) de la surface de Riemann définie par l'équation algébrique $F(x, s) = 0$, s'expriment toutes par des fonctions linéaires et homogènes de m de ces intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$ formant un *système fondamental*; les coefficients de ces fonctions linéaires et homogènes ne dépendent pas de x. Désignons par $w_1, w_2, \ldots, w_m$ les expressions obtenues en remplaçant, dans w, y et ses dérivées par rapport à x, respectivement par les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$ et leurs dérivées par rapport à x. Le groupe formé par les substitutions de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ qui correspondent aux divers chemins fermés que peut décrire le point (x, s) sur la surface de Riemann $F(x, s) = 0$, est identique au groupe formé par les substitutions de $w_1, w_2, \ldots, w_m$ qui correspondent à ces mêmes chemins fermés; nous désignerons ce groupe par la lettre $\mathcal{G}$.

Inversement, si $w_1, w_2, \ldots, w_m$ sont des fonctions du point (x, s) de la surface de Riemann $F(x, s) = 0$, qui, lorsque le point (x, s) décrit sur cette surface tous les chemins fermés possibles, se transforment précisément en celles des fonctions linéaires et homogènes de $w_1, w_2, \ldots, w_m$ dont les coefficients, indépendants de x, sont déterminés par ceux du groupe de substitutions $\mathcal{G}$, l'équation différentielle à laquelle satisfont $w_1, w_2, \ldots, w_m$ fait partie de la même classe que l'équation différentielle (1).

2. Supposons que les coefficients $r_1, r_2, \ldots, r_m$ de l'équation différentielle linéaire (1) dépendent d'un paramètre t, et qu'il existe un système fondamental d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de cette équation différentielle tel que les éléments du groupe de substitutions $\mathcal{G}$ que nous venons de définir ne dépendent pas du paramètre t. *Nous dirons alors que le groupe de substitutions $\mathcal{G}$ du système fondamental d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de l'équation différentielle* (1) *est indépendant de t.*

Les équations différentielles linéaires (1), dont le groupe de substitutions du système fondamental d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$ est indépendant du paramètre t, sont caractérisées par ce que chacune des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$ du point (x, s) de la surface de Riemann $F(x, s) = 0$, vérifie, quel que soit ce

point, une équation de la forme

$$(2)\qquad \frac{\partial y_k}{\partial t} = A_0 y_k + A_1 \frac{\partial y_k}{\partial x} + \ldots + A_{m-1} \frac{\partial^{m-1} y}{\partial x^{m-1}}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m),$$

où A_0, A_1, ..., A_{m-1} sont des fonctions univoques du point (r, s) de la surface de Riemann. Et la réciproque de ce théorème est aussi vraie.

Lorsque, en particulier, les coefficients r_1, r_2, ..., r_m de l'équation différentielle linéaire (1) sont des fonctions *rationnelles* du point (x, s) de la surface de Riemann $F(x, s) = 0$, et que les intégrales de cette équation différentielle (1) n'ont pas de point d'indétermination, les coefficients A_0, A_1, ..., A_{m-1} de l'équation (2) sont nécessairement des fonctions *rationnelles* du point (x, s) de la même surface de Riemann.

3. Quand l'équation différentielle (1) est irréductible, les coefficients A_0, A_1, ..., A_{m-1} de l'équation (2) vérifient nécessairement des équations de la forme

$$(3)\qquad R_1 = 0, \qquad R_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad R_m = 0,$$

où R_1, R_2, ..., R_m sont des fonctions univoques du point (x, s) que l'on obtient de la façon suivante : on déduit d'abord de l'équation différentielle (1), en prenant les dérivées de ses deux membres par rapport au paramètre t, la relation différentielle

$$\frac{\partial y^{m-1}}{\partial t\,\partial x^m} + r_1 \frac{\partial y^m}{\partial t\,\partial x^{m-1}} + \ldots + r_m \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial r_1}{\partial t} \frac{\partial^{m-1} y}{\partial x^{m-1}} + \frac{\partial r_2}{\partial t} \frac{\partial^{m-2} y}{\partial x^{m-2}} + \ldots + \frac{\partial r_m}{\partial t} y = 0;$$

dans cette relation différentielle, on peut exprimer chacune des dérivées en fonction linéaire et homogène de y, $\frac{\partial y}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial^{m-1} y}{\partial x^{m-1}}$; il suffit, pour cela, de prendre les dérivées par rapport à x, un nombre convenable de fois, dans l'équation (2) et de réduire au moyen de l'équation différentielle (1). La relation différentielle précédente peut donc être mise sous la forme

$$R_1 \frac{\partial^{m-1} y}{\partial x^{m-1}} + \ldots + R_m y = 0;$$

mais l'équation différentielle (1) est supposée irréductible; chacun des coefficients R_1, R_2, ..., R_m de la dernière relation est donc nécessairement égal à zéro.

4. M. Fuchs démontre ensuite que les racines des équations fondamentales déterminantes (consulter Tannery, *Annales de l'École Normale*, 1876) d'une équation différentielle linéaire (1), dont les coefficients sont fonctions rationnelles du point (x, s), et qui admet un système d'intégrales fondamentales dont le groupe de substitutions est indépendant du paramètre t, sont aussi indépendantes de ce paramètre t, lorsque les intégrales n'ont pas de point d'indétermination. Et il montre aussi que l'on peut choisir le système fondamental d'intégrales u_1, u_2, ..., u_m correspondant à un point singulier de l'équation différentielle (1) de façon que les équations (2) soient encore vérifiées.

Il résulte de ce théorème que, si l'on fait

$$y = ve^{-\frac{1}{m}\int r_1\,dx},$$

et si l'on forme, au moyen de l'équation différentielle (1), l'équation différentielle que vérifie la fonction v de x ainsi définie, le groupe de substitutions d'un système d'intégrales fondamental de cette nouvelle équation différentielle est encore indépendant de t. On peut donc toujours supposer, si l'on veut, que le coefficient r_1 de l'équation différentielle (1) est égal à zéro.

5. Envisageons maintenant l'équation différentielle linéaire

$$(4)\qquad \frac{\partial^m z}{\partial x^m} + r_1 \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x^{m-1}} + \ldots + r_m z = 0,$$

dans laquelle les coefficients $r_1, r_2, \ldots, r_m$ sont des fonctions univoques des variables indépendantes $x, x_1, \ldots, x_{\rho-1}$ et de fonctions algébriques $y, y_1, \ldots, y_{\sigma-1}$ de ces variables indépendantes.

Si, pour des chemins fermés parcourus par la variable x, tels que les fonctions algébriques $y, y_1, \ldots, y_{\sigma-1}$ reprennent leurs valeurs initiales quand x est revenu à son point de départ, le groupe $\mathcal{G}$ des substitutions des intégrales fondamentales

$$z_1, z_2, \ldots, z_m$$

de l'équation différentielle (4) est indépendant des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{\rho-1}$, les intégrales fondamentales $z_1, z_2, \ldots, z_m$ vérifient, d'après les théorèmes des numéros précédents, des équations de la forme

$$(5)\qquad \frac{\partial z}{\partial x_\lambda} = A_{\lambda 0} z + A_{\lambda 1} \frac{\partial z}{\partial x} + \ldots + A_{\lambda(m-1)} \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x^{m-1}}$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, \rho - 1),$$

où chacun des coefficients A est une fonction univoque de $x, x_1, \ldots, x_{\rho-1}$, $y, y_1, \ldots, y_{\sigma-1}$ et où les coefficients A, qui ont même premier indice λ, vérifient des équations du type (3).

M. Fuchs démontre que ce système fondamental d'intégrales $z_1, z_2, \ldots, z_m$ jouit aussi de la propriété que le groupe $\mathcal{G}$ de ses substitutions est indépendant des quantités $x, x_1, \ldots, x_{\rho-1}$, *quelle que soit celle de ces quantités que l'on envisage comme variable, les autres étant supposées constantes.*

Les équations différentielles que vérifient les modules de périodicité des intégrales abéliennes envisagées comme fonctions des modules de classe sont des équations du type (4) envisagé dans ce numéro.

6. Ceci posé, envisageons un système d'équations aux dérivées partielles linéaires, homogènes, où $x, x_1, \ldots, x_{\rho-1}$ désignent les variables indépendantes, où les coefficients sont des fonctions univoques des variables $x, x_1, \ldots, x_{\rho-1}$ et de fonctions algébriques $y, y_1, \ldots, y_{\sigma-1}$ de ces variables. Supposons que ces équations aux dérivées partielles soient vérifiées par une fonction z dont les diverses branches (une *branche* est formée par les valeurs successives de z obtenues en faisant décrire aux variables $x, x_1, \ldots, x_{\rho-1}$ des contours fermés tels que $y, y_1, \ldots, y_{\sigma-1}$ reprennent leurs valeurs initiales quand $x, x_1, \ldots, x_{\rho-1}$

sont revenus à leurs points de départ) s'expriment au moyen de m d'entre elles $z_1, z_2, \ldots, z_m$, par des fonctions linéaires et homogènes à coefficients indépendants de $x, x_1, \ldots, x_{\rho-1}$.

En désignant par x_λ une quelconque des ρ variables indépendantes $x, x_1, \ldots, x_{\rho-1}$, on démontre que z vérifie nécessairement une équation différentielle ordinaire, linéaire et homogène dont l'ordre est au *maximum* égal à m (il peut être plus petit que m dans des exemples déterminés),

$$(6)\qquad \frac{\partial^m z}{\partial x_\lambda^m} + r_1^{(\lambda)} \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x_\lambda^{m-1}} + \ldots + r_m^{(\lambda)} z = 0,$$

où $r_1^{(\lambda)}, r_2^{(\lambda)}, \ldots, r_m^{(\lambda)}$ désignent des fonctions univoques de $x, x_1, \ldots, x_{\rho-1}$, $y, y_1, \ldots, y_{\sigma-1}$. Et si x_λ décrit un contour fermé tel que $y, y_1, \ldots, y_{\sigma-1}$ reprennent leurs valeurs initiales quand x_λ est revenu à son point de départ, le groupe correspondant de substitutions des intégrales fondamentales $z_1, z_2, \ldots, z_m$ de l'équation différentielle (6), est indépendant de $x, x_1, \ldots, x_{\rho-1}$, de sorte que chacune des ρ équations différentielles linéaires (6) est une équation du type envisagé au n° 2.

7. Nous désignerons par (S) un système d'équations aux dérivées partielles jouissant des propriétés énoncées au numéro précédent, et qui, en outre, est identiquement vérifié quand on y remplace les dérivées partielles de z par rapport aux variables indépendantes $x, x_1, \ldots, x_{\rho-1}$ par des fonctions linéaires et homogènes de m d'entre elles, à coefficients fonctions univoques de $x, x_1, \ldots, x_{\rho-1}, y, y_1, \ldots, y_{\sigma-1}$, et telles qu'il n'existe entre ces m dérivées partielles aucune relation linéaire et homogène dont les coefficients soient des fonctions univoques de $x, x_1, \ldots, x_{\rho-1}, y, y_1, \ldots, y_{\sigma-1}$.

Chaque intégrale z d'un système (S) vérifie, quelle que soit celle des ρ variables indépendantes $x, x_1, \ldots, x_{\rho-1}$, que l'on entende par x_λ, une équation différentielle linéaire ordinaire d'ordre $n \leqq m + 1$,

$$(7)\qquad \frac{\partial^n z}{\partial x_\lambda^n} + r_1^{(\lambda)} \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x_\lambda^{n-1}} + \ldots + r_n^{(\lambda)} z = 0,$$

dont les coefficients $r_1^{(\lambda)}, r_2^{(\lambda)}, \ldots, r_n^{(\lambda)}$ sont des fonctions univoques de $x, x_1, \ldots, x_{\rho-1}, y, y_1, \ldots, y_{\sigma-1}$. Et si l'on désigne par x_μ une quelconque des variables indépendantes autre que x_λ, on a aussi une relation de la forme

$$(8)\qquad \frac{\partial z}{\partial x_\mu} = A_0^{(\mu)} + A_1^{(\mu)} \frac{\partial z}{\partial x_\lambda} + \ldots + A_{n-1}^{(\mu)} \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x_\lambda^{n-1}},$$

où $A_0^{(\mu)}, A_1^{(\mu)}, A_{n-1}^{(\mu)}$ désignent des fonctions univoques de $x, x_1, \ldots, x_{\rho-1}, y, y_1, \ldots, y_{\sigma-1}$ qui vérifient nécessairement un système de n équations différentielles linéaires du type (3), dont les coefficients sont des fonctions univoques de $x, x_1, \ldots, x_{\rho-1}, y, y_1, \ldots, y_{\sigma-1}$ formées au moyen des équations (7) et (8) de la même façon que les équations (3) ont été formées au n° 3 au moyen des équations (1) et (2).

Du théorème établi au n° 5, il résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que le système d'équations aux dérivées partielles (S) admette une solution z est que le groupe de substitutions d'un système fondamental de l'équa-

tion (7), formée pour une seule des ρ variables indépendantes $x, x_1, \ldots, x_{\rho-1}$ à notre choix, soit indépendant des autres $\rho - 1$ variables indépendantes, quand la variable choisie parcourt un chemin fermé quelconque tel que $y, y_1, \ldots, y_{\rho-1}$ reprennent leurs valeurs primitives.

L'étude de l'équation (7) permet aussi de reconnaître si les solutions du système d'équations aux dérivées partielles (S) admettent, ou non, des points d'indétermination.

8. Le système d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a_0 z + a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + a_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = b_0 z + b_1 \frac{\partial z}{\partial x} + b_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = c_0 z + c_1 \frac{\partial z}{\partial x} + c_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \tag{11}$$

où $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$ désignent des fonctions univoques des variables indépendantes x, y et d'une fonction algébrique ξ de ces variables, est un système d'équations aux dérivées partielles du type (S). Les coefficients c_0, c_1, c_2 s'expriment aisément au moyen des coefficients a_0, a_1, a_2 de leurs dérivées par rapport à y, des coefficients b_0, b_1, b_2 et de leurs dérivées par rapport à x.

Les équations différentielles linéaires (7) du cas général se réduisent ici aux deux équations

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \left[\frac{1}{a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 + b_2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ &\qquad - \left[\frac{\partial a_1}{\partial x} + a_0 - \frac{a_1}{a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x} - a_1 b_2 + a_2 b_1\right]\frac{\partial z}{\partial x} \\ &\qquad\qquad - \left[\frac{\partial a_0}{\partial x} + a_2 b_0 - \frac{a_0}{a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x} - a_0 b_2\right] z = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} - \left[\frac{\partial \log c_1}{\partial y} + b_1 + c_2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ &\qquad - \left[\frac{\partial c_2}{\partial y} + c_0 - c_2 \frac{\partial \log c_1}{\partial y} + c_1 b_2 - c_2 b_1\right]\frac{\partial z}{\partial y} \\ &\qquad\qquad - \left[\frac{\partial c_0}{\partial y} + c_1 b_0 - c_0 \frac{\partial \log c_1}{\partial y} - c_0 b_1\right] z = 0; \end{aligned} \right.$$

les équations (8) du cas général se réduisent aux deux équations

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{a_0}{a_2} z - \frac{a_1}{a_2}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{a_2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c_0}{c_1} z - \frac{c_2}{c_1}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{c_1}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \tag{15}$$

qui sont identiques aux équations (9) et (11).

Et les théorèmes généraux de M. Fuchs, appliqués à ces équations (S), permettent d'énoncer la proposition suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour que les équations aux dérivées partielles (9), (10), (11) *admettent des intégrales communes z est que les coefficients des substitutions correspondant à un système d'intégrales fondamentales convenablement choisi de l'équation différentielle linéaire* (12), *quand la variable x décrit un chemin fermé pour lequel ξ reprend sa valeur initiale, soient indépendants de la variable y.*

Les coefficients des substitutions correspondant au même système d'intégrales fondamentales envisagées comme intégrales de l'équation différentielle linéaire (13), lorsque la variable y décrit un chemin fermé pour lequel ξ reprend sa valeur initiale, sont alors indépendants de la variable x.

Pour que les équations aux dérivées partielles (9), (10), (11) admettent des intégrales communes, il faut donc que les neuf coefficients $a_0, \ldots, c_2$ de ces équations vérifient, d'une part, les équations différentielles que l'on obtient en remplaçant, dans les équations (3), les coefficients r_1, r_2, r_3 par les trois coefficients de l'équation (12), et A_0, A_1, A_2 par les trois coefficients de l'équation (14), et, d'autre part, que ces neuf coefficients vérifient aussi les trois équations différentielles que l'on obtient en remplaçant, dans ces mêmes équations (3), les coefficients r_1, r_2, r_3 par les trois coefficients de l'équation (13) et A_0, A_1, A_2 par les trois coefficients de l'équation (15).

9. Dans le cas où les neuf coefficients $a_0, \ldots, c_2$ sont des fonctions rationnelles de x, y, le système (S) formé par les équations aux dérivées partielles (1), (2), (3) a été étudié par M. Appell (*Comptes rendus*, 1880, et *Journal de Liouville*, 1882) et par M. Picard (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1881). M. Picard a montré d'autre part (*Acta mathematica*, t. V) que les fonctions univoques x, y de deux variables u, v qui admettent des substitutions de la forme

$$\left(u, v, \frac{Au + A_1 v + A_2}{Cu + C_1 v + C_2}, \frac{Bu + B_1 v + B_2}{Cu + C_1 v + C_2}\right),$$

et qui sont telles qu'il n'y ait qu'un nombre fini de valeurs incongrues de u et de v pour lesquelles x et y prennent des valeurs déterminées, peuvent être obtenues au moyen de l'inversion des équations

$$\frac{z_2}{z_1} = u, \qquad \frac{z_3}{z_1} = v,$$

où z_1, z_2, z_3 désignent trois intégrales communes aux équations (9), (10), (11), dans lesquelles $a_0, \ldots, c_2$ sont des fonctions *rationnelles* de x, y, ξ.

On voit déjà sur ces exemples combien l'étude générale des équations du type (S), entreprise par M. Fuchs, mérite de fixer l'attention.

10. A cette étude se rattachent aussi les théorèmes démontrés par M. Horn (*Acta mathematica*, t. XII, et *Habilitationsschrift*, Fribourg en Brisgau, 1890), et concernant les conditions sous lesquelles les intégrales z_1, z_2, z_3 des équations (9), (10), (11), où $a_0, \ldots, c_2$ sont des fonctions *rationnelles* de x, y, n'ont pas de point d'indétermination, ou, pour parler avec M. Horn, se comportent partout régulièrement.

M. Fuchs montre que cette recherche se ramène à celle des conditions sous lesquelles l'équation différentielle linéaire (12) ou, si l'on veut, l'équation différentielle (13), n'a pas de point d'indétermination.

11. M. Picard a montré (*Journal de Liouville*, 1885) que les fonctions univoques x et y de deux variables u, v qui admettent des substitutions de la forme

$$\left(u, v, \frac{au+b}{cu+d}, \frac{a'v+b'}{c'v+d'}\right),$$

et qui sont telles qu'il n'y ait qu'un nombre fini de valeurs incongrues de u et de v pour lesquelles x et y prennent des valeurs déterminées, peuvent être obtenues par l'inversion de quotients d'intégrales d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$(16)\qquad \frac{d^2z}{dx^2} = a_0\frac{d^2z}{dx\,dy} + a_1\frac{dz}{dx} + a_2\frac{dz}{dy} + a_3 z,$$

$$(17)\qquad \frac{d^2z}{dy^2} = b_0\frac{d^2z}{dx\,dy} + b_1\frac{dz}{dx} + b_2\frac{dz}{dy} + b_3 z,$$

où les coefficients $a_0, \ldots, b_3$ sont des fonctions rationnelles de x, y et d'une fonction algébrique ξ de x, y.

Les équations aux dérivées partielles (16), (17), dans lesquelles on peut supposer que les coefficients $a_0, \ldots, b_3$ sont des fonctions univoques quelconques de x, y et de la fonction algébrique ξ de x, y, appartiennent aussi au type (S). Les équations (7) et (8) du cas général, formées pour $x_\lambda = x$, $x_\mu = y$, sont ici

$$(18)\qquad \frac{d^4z}{dx^4} + p_1\frac{d^3z}{dx^3} + p_2\frac{d^2z}{dx^2} + p_3\frac{dz}{dx} + p_4 z = 0,$$

$$(19)\qquad \frac{dz}{dy} = A_0 z + A_1\frac{dz}{dx} + A_2\frac{d^2z}{dx^2} + A_3\frac{d^3z}{dx^3},$$

où $p_1, p_2, p_3, p_4, A_0, A_1, A_2, A_3$ s'expriment rationnellement au moyen de a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3 et de leurs dérivées.

M. Fuchs signale, en terminant, le cas singulier où l'on a $a_0 b_0 = 1$.

Gerhardt (*C.*). — Recherches de Desargues et de Pascal sur les sections coniques. (183-204).

1. Ce Mémoire se divise en deux Parties. Dans la première, M. Gerhardt expose la méthode employée par Desargues pour étudier les propriétés des sections coniques. Cette méthode, fondée sur la perspective, diffère, comme on sait, essentiellement de celle employée par ses devanciers. C'est à Desargues que l'on doit le point de vue qui consiste à envisager les droites parallèles comme ayant un point commun à l'infini, la ligne droite comme un cercle de rayon infini, etc. Il introduit pour la première fois dans la Science la notion d'involution et découvre le théorème qui porte son nom, théorème qui est devenu l'une des propositions fondamentales de la Géométrie projective.

Les publications de Desargues se rapportant aux sections coniques sont au nombre de deux seulement. La première est intitulée : *Méthode universelle de mettre en perspective les objets donnés réellement ou en devis, avec leurs proportions, mesures, éloignemens, sans employer aucun point qui soit hors du champ de l'Ouvrage* (Girard Desargues, Lyonnais), Paris, 1636. La seconde est intitulée : *Brouillon-project d'une atteinte aux événemens*

des rencontres d'un cône avec un plan et aux événemens de contrariétez d'entre les actions des puissances ou forces, Paris, 1639.

Le privilège concernant la première de ces deux publications date de 1630; il est donc probable que l'on a affaire ici à une deuxième édition. On ne possède plus aucun exemplaire de cette première publication; on ne la connaît que parce que Bosse l'a reproduite dans son *Traité de pratiques géométrales et perspectives*, Paris; 1647.

Le *Brouillon-project* contient en réalité deux Mémoires. Le premier est généralement désigné sous le nom de *Traité des sections coniques :* c'est celui dont de la Hire a pris copie en 1679 et que Chasles a retrouvé en 1845. C'est, dit Desargues « une simple esquisse ou ébauche et encore seulement d'un project d'un Ouvrage... duquel les savants n'en doivent considérer que le fond de la pensée ». Cette déclaration de Desargues suffit-elle pour expliquer l'obscurité de son exposition qui est telle, que ses contemporains qualifièrent cet écrit de *Leçons de ténèbres?* Poudra a rendu un grand service en donnant, dans l'édition des *Œuvres de Desargues*, l'explication des principales locutions dont s'est servi l'auteur. M. Gerhardt donne l'analyse détaillée de ce Mémoire.

Desargues n'a fait tirer que cinquante exemplaires de son *Traité des sections coniques.* Quant à ses autres publications elles n'ont été, suivant la coutume du temps, qu'écrites sur des feuilles volantes et distribuées à quelques amis.

2. Dans la seconde Partie de son Mémoire, M. Gerhardt expose les travaux de Pascal sur les sections coniques. Il lui semble probable que Desargues a initié Pascal à ses méthodes nouvelles et lui a communiqué les théorèmes qu'il possédait déjà sur les sections coniques; Pascal en découvrit d'autres et écrivit, en 1640 (il n'avait que seize ans), son *Essay pour les coniques.*

Un exemplaire imprimé de cet *Essay* se trouve parmi les papiers de Leibniz; comme M. J. Bertrand, dans son Ouvrage sur Pascal, publié en 1891, dit que cet *Essay* est introuvable à Paris, il est bien possible que l'exemplaire de Leibniz soit le seul qui n'ait point été perdu. M. Gerhardt fait remarquer que, sur le revers de son exemplaire, Leibniz a transcrit la fin du *Brouillon-project* de Desargues.

Outre cet *Essay,* Pascal écrivit un autre Mémoire sur les sections coniques. Ce Mémoire, que l'on confond quelquefois à tort avec le précédent, est l'*Opus completum;* il n'en termina pas la rédaction. D'autres travaux l'absorbèrent d'abord entièrement; la crise religieuse qu'il traversa ensuite l'amena à se désintéresser des Mathématiques, et il mourut en 1662 sans avoir repris ses travaux sur les coniques. Son manuscrit devint la propriété de son beau-frère Perrier; il semble avoir été oublié jusqu'en 1673, où Oldenburg appela à plusieurs reprises l'attention de Leibniz sur son existence et sur l'importance qu'il y aurait à publier les Œuvres de Desargues et de Pascal. Leibniz demanda à la famille Perrier de lui confier le manuscrit de Pascal; on fit droit à sa demande. Leibniz et Tchirnhaus prirent connaissance du manuscrit, puis Leibniz le renvoya à la famille Perrier, en y joignant une lettre dans laquelle il engage les Perrier à le publier, et donne des indications sur la façon dont il conviendrait dans ce cas de grouper les pièces qui le composent.

Depuis lors, le manuscrit a disparu. Vingt ans plus tard, Leibniz écrit à des Billettes, à Paris : « D'où vient que Messieurs Perrier ne publient point

les méditations géométriques de M. Pascal qu'ils me montrèrent autrefois? » Et des Billettes répond : « Il ne reste plus de Messieurs Perrier que celui qui est prestre et doyen de je ne sçay quel chapitre de Clermont en Auvergne, lieu de sa naissance, avec une sœur digne d'eux tous et de leur oncle. Il faut qu'ils les ayent perdues ou ne les ayent jugées propres à mettre au jour. »

La lettre de Leibniz à la famille Perrier devient donc un document important pour l'histoire des découvertes de Pascal. M. Gerhardt énumère les pièces qui, d'après cette lettre, formaient l'*Opus completum*. Il reproduit ensuite ceux des papiers de Leibniz qui concernent le manuscrit de Pascal.

C'est d'abord une copie, qui n'est pas de la main de Leibniz, mais qui semble avoir été revue par lui, de la première des six sections dans lesquelles Leibniz désirait, dans sa lettre à la famille Perrier, voir divisé l'*Opus completum*. Elle est intitulée : *Generatio conisectionum*. M. Gerhardt la publie *in extenso*.

C'est ensuite une feuille se rapportant à la seconde de ces six sections. Elle contient une figure qui, ainsi que le texte explicatif, est de la main de Tschirnhaus; Leibniz désigne cette figure sous le nom d'*Hexagramme mystique de Pascal*. On peut déjà y lire le théorème célèbre de Pascal « grande proposition dont, comme disait Desargues, les quatre premiers livres d'Apollonius sont ou bien un cas, ou bien une conséquence immédiate ».

C'est enfin une figure se rapportant à la sixième section, figure à laquelle sont jointes des annotations de Leibniz indiquant que l'on a affaire au problème connu de Pappus *ad tres aut plures lineas*, que Pascal ramène à son hexagramme.

3. Parmi les papiers de Leibniz se trouve encore la copie d'une partie d'un Mémoire inédit de Pascal : elle est intitulée : *Extrait d'un fragment de l'Introduction à la Géométrie de M. Pascal*. M. Gerhardt reproduit cette copie.

Il semble, d'après ces fragments, que Pascal ait essayé, sur les indications de Desargues, d'exposer les éléments de la Géométrie d'une façon complètement différente de celle d'Euclide.

Tœpler (*A.*). — Sur les oscillations électriques de durée très petite. (269-276).

Bezold (*W. von*). — Sur la thermodynamique de l'atmosphère. (279-309).

Helmholtz (*H. von*). — Le principe de la moindre action en Électrodynamique. (459-475).

Helmholtz a, comme on sait, désigné sous le nom de *potentiel cinétique* d'un système de points matériels, la différence $S - T$ entre l'énergie potentielle S et l'énergie cinétique ou force vive T du système. Il entend par *systèmes incomplets* des systèmes de points matériels dont l'étude du mouvement se ramène à celle de la détermination en fonction de t, par intégration de k équations de Lagrange, d'un nombre *moindre* de paramètres indépendants $q_1, q_2, \ldots, q_k$ que celui n, dont dépend la configuration du système, les autres paramètres

indépendants $q_{k+1}, \ldots, q_n$ s'exprimant en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_k$, et des dérivées $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ de $q_1, q_2, \ldots, q_k$ par rapport à t.

On trouvera des exemples de ces *systèmes incomplets* de points matériels dans le premier Mémoire d'Helmholtz sur les mouvements monocycliques (*Journal de Crelle*, t. 97, p. 120-122) et dans son Mémoire sur le principe de la moindre action (*Journal de Crelle*, t. 100, p. 146-148). On y remarque que l'expression du potentiel cinétique en fonction des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_k$ et de leurs dérivées $q'_1, q'_2, \ldots q'_k$ est toute différente de l'expression de ce potentiel cinétique dans le cas des *systèmes complets* de points matériels ($k = n$); elle revêt des formes souvent très compliquées où les termes se rapportant à chacune des deux énergies potentielle et cinétique ne peuvent plus être séparés les uns des autres. D'autre part, ces mêmes systèmes incomplets, lorsqu'ils sont même soumis au principe de la conservation de l'énergie, ne sont pas pour cela nécessairement soumis au principe de la moindre action (Helmholtz entend par là une forme analogue à celle donnée par Hamilton à ce principe, sous l'hypothèse que les forces extérieures ne dépendent que de t et non des paramètres, forme qu'il a étudiée dans le t. 100 du *Journal de Crelle*); quand ils le sont, Helmholtz a montré que les forces diverses sont reliées par des lois réciproques très remarquables.

Il y a là quelque analogie avec des faits qui se présentent dans l'étude des forces électriques et magnétiques. Nous savons que ces forces sont soumises au principe de la conservation de l'énergie, mais nous ne pouvons distinguer avec certitude dans cette énergie la partie qui est énergie potentielle et celle qui est énergie cinétique. Et, d'autre part, nous ne savons pas si les forces électriques et magnétiques, quoique soumises au principe de l'énergie, le sont aussi au principe de la moindre action.

Dans un domaine très restreint de l'Électrodynamique, dans les cas où l'action électrodynamique de courants fermés a lieu suivant les lois du potentiel de F.-E. Neumann, généralisées par Helmholtz, on sait cependant que le principe de la moindre action a lieu. Dès lors, il est naturel de se demander si l'on ne peut, en se plaçant à un point de vue plus général, déduire du principe de la moindre action les équations de l'Hydrodynamique établies par Maxwell et complétées par Hertz. C'est cette recherche qui fait l'objet du Mémoire de Helmholtz.

Helmholtz y démontre que l'on peut déduire du principe de la moindre action, mis sous une forme convenable analogue à celle d'Hamilton, des expressions des forces pondéromotrices entièrement conformes à la théorie de Maxwell.

L'énergie se décompose en deux parties, l'énergie électrique Φ_e et l'énergie magnétique Φ_m; la différence $\Phi_e - \Phi_m$ de ces deux énergies se trouve être précisément le potentiel cinétique, de sorte que le potentiel électrique Φ_e joue exactement le rôle que joue l'énergie potentielle en Mécanique rationnelle, et que le potentiel magnétique Φ_m joue exactement le rôle que joue l'énergie cinétique (la force vive) en Mécanique rationnelle.

Bois-Reymond (E. du). — Maupertuis. (393-412).

2e semestre. 1892.

Vogel. — Discours de réception. (601-604).

Tous les savants qui se sont occupés d'Astrophysique n'ont pas toujours su résister à la tentation de faire des hypothèses sur la constitution du système du monde, plutôt que de chercher simplement à obtenir d'abord des résultats exacts; M. Vogel les a toujours combattus avec énergie; c'est peut-être, dit-il, ce qui, plus que tous ses autres travaux, l'a désigné aux suffrages de l'Académie.

Les nouvelles méthodes de photographie spectrale, basées sur le principe de Doppler-Fizeau, ont permis à M. Vogel de dresser un Catalogue des mouvements propres des 51 étoiles les plus brillantes, visibles à Potsdam. Parmi ces étoiles, il y en a *quatre* qui forment un système d'étoiles doubles tellement voisines, qu'il semble presque impossible que leurs atmosphères ne soient pas en contact. Cette proportion de 4 à 50 semble indiquer que ces systèmes d'étoiles jouent dans l'univers un rôle plus considérable qu'on ne se l'était imaginé jusqu'ici.

M. Vogel espère que, dans une dizaine d'années, il aura pu étendre son Catalogue aux 500 étoiles les plus brillantes visibles à Potsdam. Il espère aussi qu'à cette époque les recherches entreprises à l'Institut astrophysique et concernant l'intensité de la lumière envoyée par les étoiles fixes des sept premiers ordres de grandeur seront terminées. A cette époque, l'entreprise internationale de la Photographie de la Carte du ciel, à laquelle l'observatoire dont il est le directeur prend part, sera elle aussi, sans doute terminée.

Auwers. — Réponse de l'un des Secrétaires perpétuels de la Section des Sciences mathématiques et physiques. (604-607).

Fondation Helmholtz. (610-611).

Les médailles d'or qui sont décernées tous les deux ans aux savants de tous les pays, que l'Académie juge avoir fait faire le plus de progrès aux Sciences représentées à l'Académie, sont décernées à MM. du Bois-Reymond, Weierstrass, Bunsen, William Thomson

Discours adressé au nom de l'Académie à Son Excellence M. de Helmholtz, à l'occasion du cinquantième anniversaire de son doctorat. (905-909).

Ce discours contient une biographie et la liste des travaux du célèbre physicien.

Helmholtz (H. von). — Théorie électromagnétique de la dispersion des couleurs. (1093-1109).

Supposons l'éther traversé par des oscillations électriques. Maxwell a démontré que des molécules pesantes, se trouvant dans l'éther ainsi en mouve-

ment, peuvent être, elles aussi, mises en mouvement par des forces pondéromotrices dont l'existence résulte nécessairement de celle des oscillations électriques.

Helmholtz observe d'abord que ces molécules pesantes, qu'il envisage comme des couples d'*ions*, sont nécessairement chargées d'électricité. Il faut donc qu'en formant les équations du mouvement, on tienne compte séparément des moments électriques résultant de cette électricité des couples d'ions, et des moments électriques de l'éther. C'est ce que fait Helmholtz en partant du principe de la moindre action mis sous la forme sous laquelle il a envisagé ce principe dans plusieurs de ses Mémoires (*voir* Comptes rendus des *Sitzungsberichte*, 1er semestre 1892), et il en déduit l'explication du phénomène de la dispersion des couleurs.

Fuchs (*L.*). — Sur les relations qui lient les intégrales d'une équation différentielle linéaire, prises le long d'un chemin allant d'un point singulier à un autre point singulier, aux coefficients des substitutions fondamentales du groupe de cette équation différentielle. (1113-1128).

1. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ les points singuliers où les intégrales d'une équation différentielle linéaire se ramifient de façon que leurs quotients ne conservent pas tous la même valeur, et $b_1, b_2, \ldots, b_\sigma$ les points singuliers où ces intégrales se ramifient de façon que leurs quotients conservent tous la même valeur. Posons

$$F(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\rho)(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_\sigma),$$

et envisageons l'équation différentielle d'ordre n,

$$\text{(B)} \qquad \sum_{\nu=0}^{\nu=n} y^{(\nu)} F(x) F_k(x) = 0,$$

où $k=(n-\nu)(\rho+\sigma-1)$ et où $F_k(x)$ désigne un polynome entier en x, de degré k.

Supposons d'abord que les racines des équations déterminantes fondamentales de l'équation différentielle (B), relatives aux points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$, aient leurs parties réelles négatives et plus grandes que l'unité négative. Les racines des équations déterminantes fondamentales de l'équation différentielle adjointe de (B)

$$\text{(C)} \quad \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^{\nu-1} \frac{d^\nu}{dx^\nu}[z F(x)^\nu F_k(x)] = 0, \qquad [\text{où } k=(n-\nu)(\rho+\sigma-1)]$$

relatives aux mêmes points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$, ont alors aussi leurs parties réelles négatives et plus grandes que l'unité négative.

Supposons aussi que les différences de deux quelconques de ces racines ne soient pas des nombres entiers.

Soient $\eta_{11}, \eta_{12}, \ldots, \eta_{1n}$ le système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle (B) relatif à $x=\infty$;

$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ le système fondamental correspondant d'intégrales de l'équation adjointe (C) rangées dans un ordre tel que η_k, ζ_k représentent des intégrales adjointes.

Si $\eta_{1\mu}, \eta_{2\mu}, \ldots, \eta_{n\mu}$ est le système fondamental correspondant de l'équation différentielle (B) relatif au point singulier $a_{\mu+1}$, nous poserons pour chacun des indices ν, en choisissant convenablement les facteurs arbitraires des η_ν, $\eta_{k\mu}$,

$$\eta_{\nu} = \sum_{h=n}^{h=1} b_{\nu h}\,\eta_{h\mu},$$

et nous formerons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

des n^2 quantités $b_{\nu h}$ ainsi définies; soient alors

$$B_{kl} = \frac{\partial \Delta}{\partial b_{kl}}, \qquad A_{\nu}^{(k,l)} = \frac{b_{k\nu} B_{l\nu}}{\Delta}.$$

Si $\zeta_{1\mu}, \zeta_{2\mu}, \ldots, \zeta_{n\mu}$ est le système fondamental d'intégrales de l'équation adjointe (C) relatif au même point singulier $a_{\mu+1}$, rangées dans un ordre tel que $\eta_{k\mu}$, $\zeta_{k\mu}$ représentent des intégrales adjointes, nous poserons aussi pour chacun des indices ν, en choisissant comme plus haut les facteurs arbitraires des ζ_ν, $\zeta_{h\mu}$,

$$\zeta_{\nu} = \sum_{h=1}^{h=n} c_{\nu h}\,\zeta_{h\mu},$$

ce qui définit n^2 quantités $c_{\nu h}$.

Si $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont les racines de l'équation déterminante fondamentale de l'équation différentielle (B) relative au point singulier $a_{\mu+1}$, nous poserons

$$\lambda_\nu = e^{2i\pi r_\nu}.$$

Posons aussi, pour chacune des valeurs $k = 0, 1, 2, \ldots, n$,

$$A_k = F(x)^k F_h(x), \qquad \text{où} \qquad h = (n-k)(\rho + \sigma - 1),$$

et désignons par $\mathfrak{A}_k$ la fonction de la variable α que l'on obtient en changeant, dans ζ_l, x en α; puis formons l'expression

$$U = -P_0 + \frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \ldots \pm \frac{\partial^n P_n}{\partial x^n},$$

où

$$P_k = \frac{A_k - \mathfrak{A}_k}{x - \alpha} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n);$$

enfin, représentons par z_l la fonction de α que l'on obtient en changeant, dans ζ_l, x en α.

On a entre ces diverses quantités les relations importantes

$$(\mathrm{T})\qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} \mathrm{U}\,\eta_k\, z_l . d\alpha = 0,$$

$$(\mathrm{S})\qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} \mathrm{U}\,\eta_k\, z_l . d\alpha = (-1)^n \pi \sum_{\nu=1}^{\nu=n} b_{k\nu}\, c_{l\nu} \frac{e^{-i\pi r_\nu}}{\sin \pi r_\nu},$$

$$(\mathrm{S}')\qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} \mathrm{U}\,\eta_k\, z_l . d\alpha = (-1)^n 2\pi i \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{\mathrm{A}_\nu^{(k,l)}}{\lambda_\nu - 1}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ l = 1, 2, \ldots, n),$$

où, dans la première, chacune des deux quantités a_ν et $a_{\nu+1}$ est différente de chacune des deux quantités a_μ et $a_{\mu+1}$.

Les quantités $\mathrm{A}_\nu^{(k,l)}$ sont des fonctions rationnelles déterminées des paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et des n^2 coefficients $g_{i,k}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, n$) de la substitution fondamentale (S_μ), relative au point singulier $a_{\mu+1}$, du système fondamental $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ d'intégrales envisagées.

Les relations (S′) représentent donc n^2 relations entre les n^2 coefficients g_{ik} de la substitution (S_μ).

2. Envisageons l'équation différentielle linéaire

$$\mathrm{A}_0 y + \mathrm{A}_1 y' + \ldots + \mathrm{A}_n y^{(n)} = 0,$$

dont les coefficients $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ sont des polynomes en x, et dont les intégrales ont partout des valeurs déterminées. Supposons que les points singuliers désignés par $b_1, b_2, \ldots, b_\sigma$ soient tels que chacune des différences des racines des équations déterminantes fondamentales, relatives à ces points singuliers, soit un nombre entier, sans qu'il y ait des termes logarithmiques dans les développements correspondant à leurs environs. Désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ les points singuliers où toutes les intégrales se ramifient, et pour lesquels les différences des racines d'une des équations déterminantes fondamentales ne sont pas des nombres entiers.

On sait que toute expression de la forme

$$u = \mathrm{P}_0 y + \mathrm{P}_1 y' + \ldots + \mathrm{P}_{n-1} y^{(n-1)},$$

où $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}$ désignent des fonctions rationnelles de x, vérifie une équation différentielle linéaire

$$(2)\qquad \mathrm{C}_0 u + \mathrm{C}_1 u' + \ldots + \mathrm{C}_n u^{(n)} = 0,$$

du même ordre que l'équation proposée, faisant partie de la même *classe* que l'équation proposée, pour laquelle $a_1, a_2, \ldots, a_\rho, b_1, b_2, \ldots, b_\sigma$ sont aussi des points singuliers et dont les intégrales donnent lieu, en général, aux mêmes substitutions fondamentales que les intégrales de l'équation proposée, de sorte que, si g_{ik} ($i, k = 1, 2, \ldots, n$) sont les coefficients de la substitution fondamentale (S_μ), relative au point singulier $a_{\mu+1}$, du système d'intégrales fondamentales de l'équation différentielle (1), ces mêmes nombres g_{ik} peuvent aussi, en général, être envisagés comme les coefficients de la substitution fondamentale, relative au même point $a_{\mu+1}$, du système d'intégrales fonda-

mentales de l'équation différentielle (2). Il n'y a exception que dans le cas où, pour l'équation (1), parmi les racines de l'équation déterminante fondamentale relative à un ou plusieurs des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$, il s'en trouve une dont la partie réelle est un nombre entier; commençons par exclure ce cas.

M. Fuchs démontre que l'on peut déterminer les fonctions rationnelles P_1, $P_2, \ldots, P_{n-1}$ de façon que l'équation différentielle (2) n'admette pas d'autres points singuliers que $a_1, a_2, \ldots, a_\rho, b_1, b_2, \ldots, b_\sigma$ et que les parties réelles des racines de l'équation déterminante fondamentale relative à $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ soient négatives et plus grandes que l'unité négative. Dès lors, on peut appliquer, à l'équation différentielle linéaire (2), les trois relations (T), (S), (S') établies au n° 1, et l'on obtient par cela même des relations entre les mêmes quantités concernant l'équation différentielle linéaire (1).

Dans le cas d'abord exclu, il faut, en désignant par $r_{\nu 1}, r_{\nu 2}, \ldots, r_{\nu n}$ les racines de l'équation déterminante fondamentale relative au point singulier a_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, \rho$), envisager, au lieu de l'équation différentielle linéaire (2), l'équation différentielle linéaire en w que l'on obtient en remplaçant dans (2), u par

$$u = (x - a_1)^{\varepsilon_1}(x - a_2)^{\varepsilon_2} \ldots (x - a_\rho)^{\varepsilon_\rho} w,$$

où ε_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, \rho$) doit être pris égal à zéro, pour chacun des points singuliers a tels que, si l'on envisage les racines de l'équation déterminante fondamentale relative à ces points a, il n'y en ait aucune dont la partie réelle soit un nombre entier, tandis que ε_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, \rho$) doit être pris égal à un nombre réel positif, plus petit que 1, tel que les nombres

$$r_{\mu 1} - \varepsilon_\mu, \quad r_{\mu 2} - \varepsilon_\mu, \quad \ldots, \quad r_{\mu n} - \varepsilon_\mu,$$

aient des valeurs comprises entre 0 et -1, lorsque, parmi les racines de l'équation déterminante fondamentale relative au point singulier a_μ, il y en a dont la partie réelle est un nombre entier. A la substitution fondamentale

$$S_\mu = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

des intégrales fondamentales de l'équation différentielle linéaire (1), relative au point singulier $a_{\mu+1}$, correspond alors la substitution fondamentale

$$S'_\mu = \begin{pmatrix} jg_{11} & \cdots & jg_{1n} \\ \cdots\cdot & \cdots & \cdots\cdot \\ jg_{n1} & \cdots & jg_{nn} \end{pmatrix},$$

où $j = e^{-2i\pi\varepsilon_{\mu+1}}$, des intégrales fondamentales de l'équation différentielle linéaire en w, relative à ce même point singulier $a_{\mu+1}$. Mais les relations (S), (S'), (T) du n° 1 s'appliquent à l'équation différentielle linéaire en w; comme j est connu, on déduit immédiatement de ces relations, les relations cherchées, dans le cas particulier d'abord exclu, entre les coefficients g_{ik} de la substitution fondamentale (S_μ) des intégrales de l'équation différentielle linéaire (1).

3. Les équations (S') fournissent des relations entre les coefficients des sub-

stitutions fondamentales des intégrales $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ d'une part, et des intégrales définies de la forme

$$I_{k\nu}^{(\mu)} = \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} x^\nu \eta_k \, dx,$$

$$H_{k\nu}^{(\mu)} = \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} x^\nu \zeta_k \, dx,$$

d'autre part; dans ces intégrales, ν désigne un nombre entier positif ou nul, k est égal à l'un des entiers $1, 2, \ldots, n$; μ est égal à l'un des entiers $1, 2, \ldots, \rho$; enfin, dans $I_{k\nu}^{(\rho)}$ et $H_{k\nu}^{(\rho)}$ la limite supérieure d'intégration doit être remplacée par a_1.

En s'appuyant sur les relations (S') et sur les résultats obtenus au n° 1, M. Fuchs démontre que, pour chaque couple d'entiers k, μ, les diverses intégrales $I_{k\nu}^{(\mu)}$ s'expriment en fonctions linéaires et homogènes des intégrales

$$I_{k,0}^{(\mu)}, \quad I_{k,1}^{(\mu)}, \quad \ldots, \quad I_{k,n[\rho+\sigma-1]-1}^{(\mu)},$$

et que les diverses intégrales $H_{k\nu}^{(\mu)}$ s'expriment en fonctions linéaires et homogènes des intégrales

$$H_{k,0}^{(\mu)}, \quad H_{k,1}^{(\mu)}, \quad \ldots, \quad H_{k,n[\rho+\sigma-1]-1}^{(\mu)}.$$

Il en résulte que les coefficients des substitutions fondamentales des intégrales $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ sont liés aux intégrales $I_{k\nu}^{(\mu)}$, $H_{k\nu}^{(\mu)}$ où $\mu = 1, 2, \ldots, \rho$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n[\rho+\sigma-1]-1$; $k = 1, 2, \ldots, n$, et aux paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de l'équation différentielle envisagée, par des relations algébriques; ces relations algébriques sont données par les équations (S').

Les intégrales $I_{k\nu}^{(1)}, I_{k\nu}^{(2)}, \ldots, I_{k\nu}^{(\rho)}$ d'une part, et les intégrales $H_{k\nu}^{(1)}, H_{k\nu}^{(2)}, \ldots, H_{k\nu}^{(\rho)}$ d'autre part, sont d'ailleurs liées par une relation linéaire pour $k = 1, 2, \ldots, n$ et pour chacune des valeurs de ν; on a donc entre toutes ces intégrales, correspondant à $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n[\rho+\sigma-1]-1$, un nombre de relations égal à $2n^2(\rho+\sigma-1)$. Ces intégrales sont, en outre, liées par les relations (T) qui représentent $2n^2\rho(\rho-3)$ relations.

4. Plaçons-nous dans le cas particulier où l'équation différentielle linéaire envisagée est du premier ordre, et où elle est identique à son adjointe.

Dans ce cas, il n'y a pas de points $b_1, b_2, \ldots, b_\sigma$; l'équation différentielle (B) est

$$F(x)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}F'(x)y = 0,$$

et les équations (S') se réduisent aux suivantes

$$\text{(S')} \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} \frac{U}{\sqrt{F(x)}\sqrt{F(\alpha)}} \, d\alpha = i\pi,$$

tandis que les équations (T) se réduisent aux suivantes

$$\text{(T)} \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} \frac{U}{\sqrt{F(x)}\sqrt{F(\alpha)}} \, d\alpha = 0.$$

où

$$U = -\frac{1}{2}\,\frac{F'(x) - F'(\alpha)}{x - \alpha} - \frac{d}{dx}\left[\frac{F(x) - F(\alpha)}{x - \alpha}\right].$$

Ces relations (S') et (T) sont identiques à celles que Weierstrass a établies en 1849, dans le célèbre programme du gymnase de Braunsberg, entre les modules de périodicité des intégrales hyperelliptiques.

5. Plaçons-nous aussi dans le cas particulier où l'équation différentielle linéaire envisagée, est l'équation du second ordre

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0.$$

En posant

$$1 - \gamma = \rho_0, \qquad \gamma - \alpha - \beta = \rho_1, \qquad \alpha - \beta = \rho_2,$$

$$A_0 = \frac{1}{4}(1 - \rho_0^2)(x-1)^2 + \frac{1}{4}(1 - \rho_1^2)x^2 + \frac{1}{4}[1 - \rho_0^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2]x(x-1),$$

$$F(x) = x(x-1),$$

et en faisant la substitution

$$y = u x^{\frac{1-\rho_0}{2}}(1-x)^{\frac{1-\rho_1}{2}},$$

l'équation proposée se transforme en

$$F(x)^2\frac{d^2u}{dx^2} + 2F(x)F'(x)\frac{du}{dx} + A_0 u = 0;$$

son adjointe lui est identique, et l'on a

$$H_{1\nu}^{(\mu)} = I_{2\nu}^{(\mu)},$$

$$H_{2\nu}^{(\mu)} = I_{1\nu}^{(\mu)}.$$

Les diverses intégrales $I_{k\nu}^{(\mu)}$ et $H_{k\nu}^{(\mu)}$ où $k = 1, 2$, s'expriment par des fonctions linéaires et homogènes de $I_{k0}^{(\mu)}$ et $I_{k1}^{(\mu)}$.

Si l'on désigne par

$$S_0 = \begin{pmatrix} g_{11}^{(0)} & g_{12}^{(0)} \\ g_{21}^{(0)} & g_{22}^{(0)} \end{pmatrix},$$

la substitution fondamentale, pour $x = 0$, du système fondamental d'intégrales η_1, η_2 et par

$$S_1 = \begin{pmatrix} g_{11}^{(1)} & g_{12}^{(1)} \\ g_{21}^{(1)} & g_{22}^{(1)} \end{pmatrix},$$

la substitution fondamentale, pour $x = 1$, du système fondamental d'intégrales η_1, η_2; si l'on pose pour abréger, pour $k = 1, 2$ et pour $l = 1, 2$,

$$P_{kl}^{(0)} = \int_{\infty}^{0} dx \int_{0}^{1} U \eta_k y_l \, d\alpha,$$

$$P_{kl}^{(1)} = \int_{0}^{1} dx \int_{1}^{\infty} U \eta_k y_l \, d\alpha.$$

où y_1 et y_2 désignent les fonctions de α que l'on obtient en changeant x en α dans η_1 et η_2, et où

$$U = \frac{1}{4}[17 - \rho_0^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2] - \frac{1}{4}(1 - \rho_2^2)(x + \alpha),$$

on a les relations

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\,P_{11}^{(0)} \sin^2\left(\frac{\pi\rho_0}{2}\right) &= - i\pi[g_{22}^{(0)} - 1], \\ 2\,P_{12}^{(0)} \sin^2\left(\frac{\pi\rho_0}{2}\right) &= - i\pi g_{12}^{(0)}, \\ 2\,P_{21}^{(0)} \sin^2\left(\frac{\pi\rho_0}{2}\right) &= - i\pi g_{21}^{(0)}, \\ 2\,P_{22}^{(0)} \sin^2\left(\frac{\pi\rho_0}{2}\right) &= - i\pi[g_{11}^{(0)} - 1]; \end{aligned} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\,P_{11}^{(1)} \sin^2\left(\frac{\pi\rho_1}{2}\right) &= - i\pi[g_{22}^{(1)} - 1], \\ 2\,P_{12}^{(1)} \sin^2\left(\frac{\pi\rho_1}{2}\right) &= - i\pi g_{12}^{(1)}, \\ 2\,P_{21}^{(1)} \sin^2\left(\frac{\pi\rho_1}{2}\right) &= - i\pi g_{21}^{(1)}, \\ 2\,P_{22}^{(1)} \sin^2\left(\frac{\pi\rho_1}{2}\right) &= - i\pi[g_{11}^{(1)} - 1]. \end{aligned} \right.$$

Les quantités P qui figurent dans ces relations sont des fonctions homogènes quadratiques des intégrales

$$\int_{\infty}^{0} \eta_1\,dx, \quad \int_{\infty}^{0} x\eta_1\,dx, \quad \int_{\infty}^{0} \eta_2\,dx, \quad \int_{\infty}^{0} x\eta_2\,dx,$$
$$\int_{0}^{1} \eta_1\,dx, \quad \int_{0}^{1} x\eta_1\,dx, \quad \int_{0}^{1} \eta_2\,dx, \quad \int_{0}^{1} x\eta_2\,dx.$$

Si l'on substitue, dans les relations (3) et (4) que nous venons d'écrire, aux intégrales fondamentales η_1 et η_2 leurs expressions bien connues au moyen d'intégrales définies, on déduit de ces relations (3) et (4) les expressions des coefficients $g^{(0)}$ et $g^{(1)}$ des substitutions S_0 et S_1, au moyen des fonctions Γ d'Euler.

Von Bezold. — Variation de la quantité de chaleur dans l'air et à la surface de la Terre. (1139-1178). J. M.

ARCHIVO DE MATEMATICAS PURAS Y APLICADAS. Periodico mensual publicado por D. E.-L. Ortiz, L.-C. Gasco. M. Belmas, Madrid et Valence ([1]).

Tome I. n°s 1 a 6; 1896.

Ortiz. — Tables logarithmiques d'addition et de soustraction.

Gasco. — Règles pratiques pour le développement des déterminants du quatrième degré.

Rueda. — Étude d'un lieu géométrique curieux composé de trois coniques.

Abel. — Traduction en espagnol du Mémoire sur les équations algébriques.

Gasco. — Diagrammes mnémoniques de Trigonométrie.

Mansion. — Résumé d'une théorie des fonctions hyperboliques.

Barton. — Distances focales des miroirs et des lentilles.

Burch. — Tracé de l'hyperbole.

Thomson (D.). — Vibrations et ondes sonores.

Cole (R.-S.). — Méthodes graphiques relatives aux lentilles.

Ventura Reyes (Prosper). — Démonstration nouvelle des formules trigonométriques d'addition.

([1]) En commençant l'analyse de ce nouveau journal, auquel nous souhaitons la bienvenue, nous pouvons mesurer le chemin parcouru par l'étude et la culture des Sciences depuis le commencement de ce siècle. Élève du lycée de Montpellier, nous avons souvent entendu parler et de Gergonne et de ses *Annales*, qui ont constitué pendant si longtemps le seul journal *du monde entier* exclusivement consacré aux Mathématiques. Que les temps sont changés aujourd'hui! En France seulement, nous trouvons sans grand effort, en dehors des Recueils académiques, une dizaine de publications mathématiques. Il en est de même en Allemagne, en Angleterre, en Italie. L'Espagne à son tour entre dans le mouvement; nous ne pouvons que nous en féliciter. L'analyse qui va suivre fera d'ailleurs connaître le caractère de la nouvelle publication.

Clerk Maxwell. Analyse harmonique.

Balitrand. — Points d'inflexion de la transformée d'une section plane d'un cône quand le cône est développé sur un plan.

Sylvester (J.-J.). — Du plagiographe et du pantographe.

Tait (P.-G.). — Mouvement harmonique.

Questions proposées et solutions.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

Tome XXIII; 1895 [1].

Mannheim. — Sur les lignes de courbure des surfaces du second ordre. (1-4).

Si des surfaces du second ordre sont telles que leurs lignes de courbure se correspondent avec parallélisme de leurs plans tangents : 1° les lignes de courbure se correspondent avec parallélisme de leurs tangentes; 2° les plans des sections circulaires de ces surfaces sont parallèles.

La réciproque de cette dernière proposition est vraie.

Gino-Loria. — Sur les courbes gauches algébriques autocorrélatives. (4-6).

D'après Cayley, on considère dans les courbes gauches algébriques, douées de singularités ordinaires, dix nombres caractéristiques : l'ordre m de la courbe; le nombre a des points de rebroussement; le nombre c de ses points doubles apparents; l'ordre d de la courbe double de la développable osculatrice; quatre autres nombres μ, α, γ, δ correspondant à ceux-là; enfin deux nombres auto-corrélatifs, qui sont le rang R de la courbe et le nombre T des génératrices stationnaires de la développable correspondante.

Entre ces dix caractéristiques existent six relations découvertes par Cayley, et dont M. Loria conclut la proposition suivante, analogue à un résultat obtenu antérieurement par M. Bioche, pour les courbes planes :

Dans toute courbe algébrique, douée de singularités ordinaires, l'égalité de deux caractéristiques corrélatives entraîne l'égalité des trois autres couples analogues.

---

[1] Voir *Bulletin*, XX_2, p. 188.

2nd Partie.

Pellet. — Mémoire sur la théorie infinitésimale des équations et les fonctions implicites. (7-16).

Ce Mémoire a pour objet la séparation des racines d'une équation $F(x) = 0$. Les n premières racines de $F(x)$ sont dites *séparées dans le plan* lorsque l'équation obtenue en y remplaçant chaque coefficient par son module, à l'exception de x^n qui est remplacé par une quantité négative de même module, équation qui offre deux variations de signe, a une racine positive simple r. Alors l'équation $F(x) = 0$ a n racines de modules inférieurs à r, et l'on peut former d'une part l'équation de degré n qui admet ces n racines, d'autre part celle qui admet toutes les autres racines qui sont de module supérieur à r.

Goursat. — Sur une formule de la théorie des fonctions elliptiques. (18-26).

M. Goursat retrouve par une voie entièrement analytique une formule remarquable de Weierstrass, citée par Halphen dans son *Traité des fonctions elliptiques* (t. II, p. 259) et qui donne immédiatement l'intégrale générale de l'équation d'Euler.

Balitrand. — Sur le développement des coordonnées d'un point dans le mouvement relatif et sur la courbure des lignes orthogonales. (26-32).

Koch (von). — Sur un théorème de Stieltjes et sur les fonctions définies par des fractions continues. (33-40).

L'auteur démontre ce théorème, qui embrasse comme cas particulier un théorème de Stieltjes :

Si h_1, h_2, ... sont des fonctions analytiques d'un nombre quelconque de variables $x_1, x_1, \ldots, x_k$, holomorphes dans un domaine donné T, si la série $\sum_\nu |h_\nu|$ converge uniformément dans ce domaine, et si

$$\frac{P_n(x_1, \ldots, x_k)}{Q_n(x_1, \ldots, x_k)}$$

désigne la $n^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue

$$\cfrac{1}{h_1 + \cfrac{1}{h_2 + \cfrac{1}{h_3 + \ldots}}}$$

on a pour tout le domaine T :

$$\begin{aligned}
\lim P_{2n}\ (x_1, \ldots, x_k) &= P\ (x_1, \ldots, x_k),\\
\lim Q_{2n}\ (x_1, \ldots, x_k) &= Q\ (x_1, \ldots, x_k),\\
\lim P_{2n+1}(x_1, \ldots, x_k) &= P_1(x_1, \ldots, x_k),\\
\lim Q_{2n+1}(x_1, \ldots, x_k) &= Q_1(x_1, \ldots, x_k) :
\end{aligned}$$

P, Q, P_1, Q_1 désignant des fonctions holomorphes dans T qui satisfont à la relation

$$Q(x_1, \ldots, x_k)\, P_1(x_1, \ldots, x_k) - Q_1(x_1, \ldots, x_k)\, P(x_1, \ldots, x_k) = 1.$$

M. von Koch établit encore la proposition suivante :

Soit T_1 une région continue quelconque située tout entière à l'intérieur du domaine continu T, où les fonctions analytiques $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sont holomorphes, et telle que la somme S de la série

$$S = \sum_{\nu=2}^{+\infty} |\varphi_\nu|$$

satisfasse, dans cette région T_1, à la condition $S < \rho$, ρ désignant un nombre positif suffisamment petit. Dans toute cette région T_1, la fonction $\Theta(x_1, \ldots, x_k)$, définie par la fraction continue

$$\cfrac{\varphi_1}{1 + \cfrac{\varphi_2}{1 + \cfrac{\varphi_3}{1 + \ldots}}}$$

restera nécessairement holomorphe.

Maillet. — Extension du théorème de Fermat sur les nombres polygones. (40-49).

On connaît le théorème de Fermat sur les nombres polygones d'ordre m, qui sont de la forme

$$\frac{m}{2}(x^2 - x) + x,$$

où x est un nombre entier.

Legendre a démontré sur ces mêmes nombres quelques théorèmes perfectionnant celui de Fermat.

M. Maillet fait remarquer que plus généralement des propositions semblables ont lieu pour les nombres de la forme

$$\frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{2}x + \gamma,$$

où $\alpha > 0$, α, β, γ entiers, et où α et β n'ont d'autre diviseur commun que 1 ou 2 et sont à la fois pairs ou impairs.

Raffy. — Sur certaines équations qu'on intègre en les différentiant. (50-61).

Étant donnée une équation du premier ordre

$$y = \varphi(x, p), \tag{1}$$

son intégration revient, comme on sait, à celle de l'équation dérivée

$$p = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\,\frac{dp}{dx}. \tag{2}$$

Si l'équation (2) est linéaire, son intégrale générale est de la forme

$$x = CP'(p) + \varpi'(p);$$

d'où l'on tire

$$y = x\left(p - \frac{P}{P'}\right) + \frac{P\varpi' - \varpi P'}{P'}.$$

Il semble d'après cela, comme l'affirme Euler, que l'équation de départ doive définir y comme fonction linéaire de x à coefficients arbitraires en p (équation de Lagrange).

Cette conclusion est inexacte. Par exemple, l'équation

$$y = px - x^2\psi(p),$$

différentiée, conduit à une équation linéaire, bien que y ne soit pas une fonction linéaire de x. Il y a donc lieu de reprendre la question par un procédé propre à la résoudre complètement.

Voici comment M. Raffy énonce le problème :

Déterminer le second membre de l'équation $y = \varphi(x, p)$ de manière que l'équation dérivée

$$p = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

assigne à $\frac{dp}{dx}$ une forme analytique donnée à l'avance $F(x, p)$.

La solution la plus générale de ce problème comporte une fonction arbitraire, outre celles qu'on peut avoir introduites par avance dans l'intégrale qu'on se donne.

L'auteur fait de ces principes diverses applications et signale notamment une classe d'équations dont on obtient l'intégrale générale en y remplaçant la dérivée par une constante arbitraire.

Laisant. — Remarques sur une équation différentielle linéaire. (62-63).

En remarquant que le produit $i(i-1)(i-2)(i-3)$ est égal à 10, M. Laisant est conduit à l'intégrale générale de l'équation

$$x^4\frac{d^4y}{dx^4} - 10y = 0,$$

qui peut se mettre sous la forme

$$y = A \sin\log ax - Bx^3 \sin\log bx,$$

A, a, B, b étant les quatre constantes arbitraires.

Raffy. — Sur certaines équations différentielles linéaires. (63-64).

Pour intégrer l'équation linéaire d'ordre n, qui admet comme solutions particulières $x, x^2, \ldots, x^n$, il suffit d'y remplacer les dérivées par des constantes arbitraires.

On voit par cet exemple qu'il existe dans tous les ordres des équations différentielles dont on obtient l'intégrale générale en y remplaçant les dérivées par des constantes arbitraires.

D'Ocagne. — Sur la composition des lois de probabilité des erreurs de situation d'un point dans un plan. (65-70).

Le problème résolu par M. d'Ocagne est le suivant :

n causes d'erreurs agissant isolément sur la position d'un point sur un plan donnent naissance aux lois de probabilité exprimées (pour $i = 1, 2, \ldots, n$) par

$$p = \frac{\sqrt{\delta}}{\pi} e^{-(\alpha_i x_i^2 + 2\beta_i x_i y_i + \gamma_i y_i^2)} dx_i \, dy_i \qquad (\delta_i = \alpha_i \gamma_i - \beta_i^2);$$

déterminer la loi de probabilité des erreurs lorsque ces n causes agissent simultanément, mais indépendamment les unes des autres, c'est-à-dire lorsque leurs effets s'ajoutent.

Demoulin. — Note sur la détermination des couples de surfaces applicables telles que la distance de deux points correspondants soit constante. (71-75).

Le problème de la détermination des couples de surfaces applicables, telles que la distance de deux points correspondants soit constante, a été résolu par Ribaucour dans le cas où les droites de jonction des points correspondants peuvent prendre toutes les directions de l'espace.

M. Demoulin fait voir que ce problème est susceptible d'une solution géométrique des plus simples. Il complète ensuite cette solution en considérant, après MM. Caronnet et Antomari, le cas où les droites de jonction des points correspondants ont une infinité simple de directions, et en montrant que l'application de la méthode cinématique de M. Darboux conduit à un résultat qui peut revêtir une forme entièrement géométrique :

Sur une développable arbitrairement choisie on fait rouler un plan P, où est tracée une droite D ; si l'on mène dans le plan P, parallèlement à la caractéristique Δ de ce plan et symétriquement par rapport à cette droite, deux droites Δ_1 et Δ_2 découpant sur D un segment constant, ces droites engendreront les surfaces (M_1) et (M_2) applicables les plus générales, telles que la distance de deux points correspondants soit constante, les droites de jonction des points correspondants n'ayant qu'une infinité simple de directions.

Floquet. — Sur les fonctions algébriques à trois déterminations. (76-87).

Soit

$$A u^3 + B u^2 + C u + D = 0$$

l'équation algébrique du troisième degré en u, où A, B, C, D désignent des polynomes quelconques entiers en z, et qui définit u comme fonction algébrique de z.

M. Floquet se propose d'obtenir, en la précisant autant que possible, la forme analytique des racines dans le domaine d'un point singulier.

Goursat. — Sur des équations différentielles analogues à l'équation de Clairaut. (88-95).

On connaît depuis longtemps une classe d'équations différentielles du premier ordre, dont on obtient l'intégrale générale en remplaçant dans cette équation y' par une constante arbitraire : ce sont les équations de Clairaut.

M. Raffy a récemment appelé l'attention sur d'autres équations différentielles jouissant de la même propriété.

M. Goursat montre comment on peut former de telles équations dépendant d'autant de fonctions arbitraires qu'on le veut.

Laisant. — Note relative aux asymptotes et aux cercles de courbure. (95-97).

Soit une courbe plane Γ ayant une asymptote Δ.

Si l'on transforme la figure par inversion par rapport à un point O du plan, la courbe Γ se transforme en une courbe Γ_1 passant par O, et la transformée de l'asymptote Δ n'est autre que le cercle de courbure Δ_1 de la courbe Γ_1 au point O.

Appell. — Sur la théorie du frottement de roulement. (98-100).

M. Bertrand a récemment critiqué la théorie classique du frottement de roulement. Il considère comme négligeable le couple que les auteurs appellent frottement de roulement. M. Appell expose à son tour les raisons qui lui font préférer la théorie généralement adoptée à celle de M. Bertrand.

Pour rendre sensible le fait que le couple du frottement de roulement n'est pas négligeable, M. Appell imagine un cylindre très lourd posé sur un sol horizontal; tout le monde sait qu'il faut un certain effort pour le faire rouler; si le couple du frottement de roulement était négligeable, la moindre impulsion ferait rouler le cylindre, puisque la réaction tangentielle n'oppose aucune résistance au roulement.

Une fois le cylindre lancé, supposons qu'on l'abandonne à lui-même : il roulerait d'un mouvement uniforme si le frottement de roulement n'existait pas; c'est donc l'action de ce couple qui finit par arrêter le mouvement.

Guccia. — Sur une expression du genre des courbes gauches algébriques douées de singularités quelconques. (101-102).

Si $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ sont les équations irréductibles de deux surfaces algébriques d'ordres n_1 et n_2, dont les premiers membres renferment linéairement $\lambda'_1, \lambda''_1, \ldots, \lambda'_2, \lambda''_2, \ldots$, la fonction $\Omega(n_1, n_2)$, qui exprime le genre de la courbe mobile (K), variable avec les deux groupes de paramètres (λ_1), (λ_2) et intersection résiduelle des deux surfaces F_1 et F_2, est de la forme

$$\Omega(n_1, n_2) = n_1(D + \pi_2 + 1) + n_2(D + \pi_1 - 1) - n_1 n_2(n_1 + n_2 - 1) + 1 + L,$$

où D est de l'ordre de la courbe mobile (K); π_i $(i = 1, 2)$ est le genre des sections planes de la surface F_i; L une constante qui est nulle si les deux systèmes linéaires F_1 et F_2 n'ont en commun aucune de leurs singularités bases.

Lecornu. — Sur une équation fonctionnelle. (102-106).

Soient $X = f(x)$ une fonction uniforme de x et $Y = f(y)$.

L'auteur considère la substitution (x, y) définie par l'équation à coefficients constants

$$\varphi(x, y) = axy + b(x + y) + c = 0$$

et cherche si la fonction f peut être déterminée de manière à vérifier l'équation de même forme

$$\Phi(X, Y) = AXY + B(X + Y) + C = 0.$$

Il trouve que la solution générale est

$$AX + B = \sqrt{B^2 - AC}\,\frac{\psi(x)}{\psi(y)},$$

où ψ est une fonction uniforme quelconque.

Un cas particulier de ce problème est de trouver les fonctions $f(x)$ telles que $f(x) = \dfrac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$.

Adam (P.). — Sur la déformation des surfaces. (106-111).

Touche. — Équation d'une trajectoire fluide. (111-113).

D'Ocagne. — Étude géométrique sur l'hélicoïde réglé le plus général. (114-121).

L'auteur considère l'hélicoïde réglé le plus général, engendré par une droite qui reste tangente à un noyau cylindrique de section quelconque, en rencontrant sous un angle constant une hélice tracée sur ce cylindre.

Il déduit géométriquement tous les éléments de courbure de cette surface de ceux de la section droite de son noyau cylindrique, de manière à ramener à de simples tracés linéaires toutes les constructions relatives à la courbure des lignes de la surface.

André (D.). — Mémoire sur les séquences des permutations circulaires. (122-184).

Ce Mémoire considérable est un travail d'ensemble sur les séquences des permutations circulaires. M. D. André y traite en une seule fois, pour les séquences de ces permutations, la plupart des questions qu'il a traitées dans des Mémoires antérieurs pour les séquences des permutations rectilignes, c'est-à-dire des permutations ordinaires.

Maupin. — Note sur une question de probabilités traitée par d'Alembert dans l'*Encyclopédie*. (185-190).

Rectification d'une erreur commise par d'Alembert.

Maupin. — Note relative à un passage d'Albert Girard. (191-192).

Relation d'un passage d'Albert Girard relatif à la série de Fibonacci, d'où il résulte que cet auteur a eu le premier une idée fort nette de la théorie des fractions continues.

D'Arone. — Sur les fonctions à espaces lacunaires. (193-194).

M. Freedholm a montré que la transcendante

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^{n^2} \qquad |a| < 1$$

représente une fonction uniforme et continue, ainsi que toutes ses dérivées dans un cercle de rayon un, contour inclus.

De cette transcendante, M. d'Arone déduit par représentation conforme d'autres fonctions qui n'existent qu'à l'intérieur ou à l'extérieur de polygones curvilignes formés d'arcs de cercle.

Adam (P.). — Sur la déformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure. (195-196).

L'auteur établit par des considérations simples l'équation aux dérivées partielles, bien connue depuis O. Bonnet,

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = \sin 2\theta,$$

dont dépend la détermination des surfaces applicables les unes sur les autres avec conservation des lignes de courbure.

Bioche. — Rapport sur un projet de Congrès mathématiques internationaux. (197-198).

Demoulin. — Sur un théorème de Ribaucour et sur une propriété caractéristique des surfaces spirales. (198-203).

M. Demoulin rappelle le principe d'une méthode qu'il a proposée antérieurement pour la détermination des surfaces qui correspondent à une surface donnée par orthogonalité des éléments. Il montre comment cette méthode se prête à une démonstration tout élémentaire de cet important théorème de Ribaucour :

Soient deux surfaces (M) et (M_1) qui se correspondent par orthogonalité des éléments; si par les points (M_1) on mène des droites D parallèles aux normales de (M), elles forment une congruence (D) qui jouit des propriétés suivantes : 1° elle admet la surface (M_1) comme surface moyenne; 2° les plans focaux de D sont perpendiculaires aux tangentes asymptotiques de (M) en M.

M. Demoulin démontre, en terminant, un théorème qui caractérise les surfaces spirales :

Soit (M) une surface rapportée à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. Projetons le point quelconque M de (M) sur le plan xOy en P, et appelons P′ un point situé dans le plan xOy et tel que le triangle POP′ soit rectangle en O et de similitude constante. Cela posé, si la droite MP′ est tangente en M à la surface (M), celle-ci sera une surface spirale.

Adam (P.). — Théorème sur la déformation des surfaces de translation. (204-209).

Pour qu'une surface (S), engendrée par la translation plane d'une courbe plane invariable de forme et de grandeur, puisse se déformer en conservant ce mode de génération, avec correspondance des deux systèmes de courbes génératrices (u) et (v) sur (S) et sur sa transformée (S_1), il faut et il suffit que ces deux systèmes de courbes soient dans des plans rectangulaires.

Kobb. — Sur le problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe. (210-215).

Le problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe dans le cas de forces autres que la pesanteur a été très peu étudié. Quand l'ellipsoïde central n'est pas de révolution, on ne peut pas en général intégrer les équations du mouvement, mais on connaît trois intégrales, savoir : celle des forces vives, celle des aires et celle des cosinus directeurs. M. de Brun a trouvé une forme spéciale de la fonction des forces U qui permet alors d'obtenir encore une intégrale. Cette forme particulière est

$$\frac{1}{2}k\zeta^2 + \varphi(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),$$

ξ, η, ζ étant les coordonnées d'un point quelconque par rapport à trois axes rectangulaires fixes passant par le point fixe.

M. Kobb montre, ce que n'a point remarqué M. de Brun, qu'on peut alors achever l'intégration.

La méthode de M. Kobb s'applique même au cas, beaucoup plus important, où la force agissante est la pesanteur. M. R. Liouville a donné les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une quatrième intégrable algébrique. La méthode de M. Kobb permet donc d'obtenir la solution du problème de la rotation d'un corps grave suspendu à un point fixe, dans le cas où cette solution est susceptible d'une forme finie.

Schlegel. — Sur un système de coordonnées tétraédriques. (216-219).

M. d'Ocagne a étudié un système de coordonnées tétraédriques ponctuelles ou planes, remarquable par le fait qu'on en déduit quatre systèmes connus, deux à deux réciproques, en rejetant à l'infini le *point fondamental* O ou le *plan fondamental* du tétraèdre OABC. Il s'agit des coordonnées cartésiennes et pluckériennes d'une part, des coordonnées ponctuelles et tangentielles d'autre part.

M. Schlegel déduit le même système d'une méthode employée par Grassmann pour représenter un point ou un plan à l'aide d'un tétraèdre.

Adam (*P.*). — Mémoire sur la déformation des surfaces. (219-240).

Lemoine (*Em.*). — Note sur une construction approchée du développement de la circonférence et remarques diverses. (242-253).

Lémeray. — Un théorème sur les fonctions itératives. (255-262).

Si une fonction $\varphi(z)$, holomorphe au voisinage du point x, admet ce point pour limite; si de plus les $p-1$ premières dérivées de la fonction $\varphi(z)-z$ sont nulles au point x, on aura

$$\lim n[\varphi^n(z)-x]^{p-1} = -\frac{p!}{P(p-1)},$$

P désignant la valeur de la première dérivée au point x.

Delannoy. — Sur une question de probabilités traitée par d'Alembert. (262-265).

Mangeot. — Sur le centre de gravité d'une espèce de solide à deux dimensions infiniment petites. (266-268).

Gérard. — Sur le postulat relatif à l'équivalence des polygones, considéré comme corollaire du théorème de Varignon. (268-269).

SITZUNGSBERICHTE der Koniglich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1).

1er semestre 1893.

Richarz (*F.*) et *Krigar-Menzel* (*O.*). — Détermination, au moyen de la balance à doubles plateaux, de la variation de la pesanteur avec l'altitude du lieu. (163-183).

Le principe de la méthode employée par MM. Richarz et Krigar-Menzel est le même que celui dont von Jolly a le premier fait usage (*Abhandlungen der Münchener Akademie*, 1878) pour déterminer la constante de l'attraction dans le système solaire et, par suite, la densité moyenne de la Terre.

---

(1) Voir *Bulletin*, XXI_2, 138.

A chacun des deux plateaux d'une balance est suspendu, au moyen d'une tige de 2 mètres de long environ, un second plateau. Soient g_0 l'accélération due à la pesanteur en un point des plateaux supérieurs, g_u l'accélération due à la pesanteur en un point des plateaux inférieurs. Dans une première pesée, mettons une masse connue m dans le plateau du haut à droite; soit m_u la masse marquée qu'il faut mettre dans le plateau du bas à gauche pour établir l'équilibre; on aura

$$mg_0 = m_u g_u.$$

Dans une seconde pesée, mettons la même masse m dans le plateau du bas à droite; soit alors m_0 la masse marquée qu'il faut mettre dans le plateau du haut à gauche pour établir l'équilibre; on aura

$$mg_u = m_0 g_0.$$

De ces deux égalités on déduit, en posant $g_u - g_0 = \gamma$, et en négligeant les termes en $\left(\frac{\gamma}{g_0}\right)^2$ qui sont extrêmement petits,

$$m_0 - m_u = \frac{2m\gamma}{g_0};$$

comme m_0, m_u, m, g_0 sont connus, on peut donc calculer la valeur de γ.

Les deux causes principales d'erreur sont : 1° les variations de température d'un plateau à l'autre ainsi que les variations de température entre l'air et les masses que l'on pèse; 2° les courants d'air le long des tiges métalliques reliant les plateaux. Les dimensions données à leur balance par MM. Richarz et Krigar-Menzel leur permettent de réduire considérablement ces causes d'erreur en enfermant la balance dans une caisse fermée dans laquelle le passage des masses d'un plateau à l'autre se fait au moyen d'un mécanisme automatique.

Vingt-quatre séries d'expériences dans lesquelles on changeait horizontalement de place les masses servant aux pesées et deux séries d'expériences dans lesquelles on les changeait verticalement de place ont donné le résultat moyen que voici où l'unité de longueur est le mètre et l'unité de temps la seconde,

$$\gamma = g_u - g_0 = 0{,}000006523.$$

En supposant la Terre formée de couches concentriques et homogènes, le calcul donne aisément

$$g_u - g_0 = \frac{2hg_0}{R},$$

R étant le rayon de la Terre et h la distance verticale des deux plateaux; comme dans les expériences de MM. Richarz et Krigar-Menzel

$$h = 2^{\mathrm{m}},26, \qquad g_0 = 9^{\mathrm{m}},813, \qquad R = 6366200^{\mathrm{m}},$$

on aurait donc environ

$$g_u - g_0 = 0{,}00000697.$$

Le nombre plus petit trouvé par MM. Richarz et Krigar-Menzel peut tenir à ce qu'ils ont dû faire leurs expériences, pour des raisons dont on apercevra l'importance quand on décrira la seconde partie de leurs recherches, dans une

casemate et que la masse du bastion a pu diminuer sensiblement la pesanteur. Il peut aussi tenir à ce qu'il y a peut-être, sous la forteresse de Spandau où les expériences ont eu lieu, des masses de densité relativement très faibles.

On verra plus loin le parti que l'on peut tirer de la valeur obtenue expérimentalement pour γ, pour déterminer, au moyen d'une seconde suite d'expériences, la densité moyenne de la Terre.

Frobenius (*G.*). — Sur les groupes résolubles. (337-345).

M. Frobenius désigne sous le nom de *groupes résolubles* les groupes des équations résolubles par radicaux.

1. Galois a montré que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe H d'ordre h soit résoluble est que ce groupe contienne une suite H_1, H_2, ..., H_n de sous-groupes d'ordres h_1, h_2, ..., h_n dont le dernier ne soit formé que par l'élément principal, dont chacun soit un sous-groupe invariant du précédent, et tels que les quotients $\frac{h_n}{h_{n-1}}$, $\frac{h_{n-1}}{h_{n-2}}$, ..., $\frac{h}{h_1}$ soient des nombres premiers.

Le théorème de Sylow : « Tout groupe dont l'ordre est une puissance d'un nombre premier est un groupe résoluble » permet de transformer le critérium de Galois et de l'énoncer ainsi :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe H d'ordre h soit résoluble est que ce groupe contienne une suite ininterrompue de sous-groupes invariants H_1, H_2, ..., H_m d'ordre h_1, h_2, ..., h_m, dont le dernier ne soit formé que de l'élément principal, dont chacun contienne le suivant, et qui soient tels que les quotients $\frac{h_n}{h_{n-1}}$, $\frac{h_{n-1}}{h_{n-2}}$, ..., $\frac{h}{h_1}$ soient des puissances de nombres premiers. En disant que la suite H_1, H_2, ..., H_n des sous-groupes est *ininterrompue* on entend que pour aucun indice λ il n'y ait de groupe distinct de H_λ et $H_{\lambda+1}$ qui, étant contenu dans H_λ, contienne $H_{\lambda+1}$ et soit un sous-groupe invariant de H.

Ce critérium de Galois ainsi transformé permet de démontrer d'une façon particulièrement simple les théorèmes d'Abel sur la primitivité des groupes, en s'appuyant sur le théorème de M. Camille Jordan : « Tout sous-groupe invariant d'un groupe primitif est transitif ».

2. Au théorème de Sylow que nous venons de citer, on peut joindre comme pendant le théorème : « Tout groupe dont l'ordre est le produit de nombres premiers distincts est un groupe résoluble ».

M. Frobenius démontre d'abord par induction le lemme suivant :

Si les facteurs premiers d'un nombre entier a sont tous distincts et si chacun des facteurs premiers d'un nombre entier b est plus grand que le plus grand des facteurs premiers de a, un groupe d'ordre ab contient précisément b éléments dont l'ordre soit un diviseur de b

Il en résulte que si p_1, p_2, ..., p_n désignent n nombres premiers distincts rangés par ordre de grandeur croissante, tout groupe H d'ordre $p_1 p_2 \cdots p_n$ contient un et un seul sous-groupe H_λ d'ordre $p_{\lambda+1} p_{\lambda+2} \cdots p_n$: ce sous-groupe est, par suite, un sous-groupe invariant de H et est contenu dans le sous-groupe $H_{\lambda-1}$ d'ordre $p_\lambda p_{\lambda+1} \cdots p_n$. Le groupe H est le composé des

groupes

$$\frac{H}{H_1}, \quad \frac{H_1}{H_2}, \quad \ldots, \quad \frac{H_{n-2}}{H_{n-1}}, \quad H_{n-1},$$

qui sont respectivement d'ordre

$$p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n.$$

D'après le critérium de Galois, le théorème annoncé est donc établi.

On déduit de ce théorème le corollaire bien remarquable : L'ordre du produit AB... de deux ou plusieurs éléments du groupe H n'est divisible par aucun nombre premier plus petit que le plus petit des nombres premiers contenus dans les ordres de A, B, ...

3. On peut aussi, par des considérations semblables aux précédentes, démontrer le théorème :

« Tout groupe dont l'ordre est le produit de nombres premiers distincts et » d'une puissance d'un nombre premier plus grand que ces nombres premiers » distincts, est résoluble. »

M. Frobenius démontre que, si $p_1, p_2, \ldots, p_n, p$ désignent $n+1$ nombres premiers rangés par ordre de grandeur croissante, tout groupe H d'ordre $p_1 p_2 \ldots p_n p^\alpha$ où α est un entier quelconque positif contient un et un seul sous-groupe H_λ d'ordre $p_{\lambda+1} p_{\lambda+2} \ldots p_n p^\alpha$. Ce sous-groupe est donc un sous-groupe invariant du groupe H et est contenu dans le sous-groupe $H_{\lambda-1}$ d'ordre $p_\lambda p_{\lambda+1} \ldots p_n p^\alpha$. Le groupe H est le composé des groupes

$$\frac{H}{H_1}, \quad \frac{H_1}{H_2}, \quad \ldots, \quad \frac{H_{n-1}}{H_n}, \quad H_n,$$

dont les ordres sont respectivement égaux à

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n, \quad p^\alpha ;$$

le groupe H_n est le composé de α groupes, chacun d'ordre p.

D'après le critérium de Galois, le théorème annoncé est donc établi.

4. M. Frobenius démontre aussi qu'il n'existe aucun groupe simple H d'ordre $h = p^4 q^\beta$, où β est un entier positif quelconque, et où p et q désignent des nombres premiers dont le second est plus grand que le premier.

Il en résulte pour $p = 2$, $q = 3$, $\beta = 3$, qu'il n'existe pas de groupe simple d'ordre 432.

Dans l'*American Journal of Math.*, tome XIV, M. Cole a étendu à tous les groupes dont l'ordre est compris entre les nombres 200 et 500 les recherches que M. Hölder avait faites dans le tome XL des *Math. Annalen* sur les groupes dont l'ordre est inférieur au nombre 200. La question de savoir s'il existe ou non des groupes simples d'ordre 432 n'avait point été résolue par M. Cole.

5. Tous les groupes dont l'ordre est le produit de deux nombres premiers distincts ou non sont nécessairement des groupes résolubles; quand les deux nombres premiers sont égaux, on peut envisager cette proposition comme un cas particulier du théorème de Sylow : quand ils sont inégaux, on peut l'envi-

sager comme un cas particulier de celui de M. Frobenius. Chacun de ces groupes est nécessairement un *groupe abélien* sauf dans le cas où, l'un des deux nombres premiers étant pris pour module, l'autre est congru à 1.

M. Hölder avait montré que tout groupe dont l'ordre est le produit de *trois* nombres premiers, distincts ou non, est résoluble. M. Frobenius a trouvé que tout groupe dont l'ordre est le produit de *quatre* nombres premiers, distincts ou non, est également résoluble, *sauf toutefois le groupe de l'icosaèdre*, d'ordre $60 = 2^2.3.5$. Pour établir que ce groupe est l'unique groupe dont l'ordre est le produit de quatre nombres premiers, et qui ne soit pas résoluble, M. Frobenius démontre que l'on ne peut être dans ce cas d'exception que si, p, q, r, s désignant les quatre facteurs premiers de l'ordre du groupe, rangés par ordre de grandeur croissante, les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1° $\quad p = q;$

2° $\quad p^2 \equiv 1 \pmod{r},$

3° $\quad pr \equiv 1 \pmod{s};$

or, la seconde condition ne peut être vérifiée que si l'on a $p = 2$, $r = 3$; et la troisième, qui se réduit alors à $6 \equiv 1 \pmod{s}$, n'est vérifiée que pour $s = 5$. Le seul cas d'exception est donc celui où l'ordre du groupe est égal à $2^2.3.5$.

L'impossibilité de résoudre, en général, par radicaux les équations du cinquième degré apparaît ainsi sous un jour tout nouveau; elle correspond à ce que, seul parmi les nombres entiers n décomposables en un produit de quatre nombres premiers, le nombre 60 vérifie les trois conditions que nous venons d'énumérer, conditions nécessaires pour que le groupe d'ordre n ne soit pas résoluble.

M. Frobenius recherche enfin les groupes non résolubles, dont l'ordre est décomposable en un produit de *cinq* nombres premiers. Il ne trouve que, d'une part, deux groupes composés d'ordre égal à 120, dans l'un desquels les ordres des groupes composants sont 2 et 60, tandis que dans l'autre ils sont 60 et 2; et, d'autre part, trois groupes simples formés par les substitutions linéaires fractionnaires propres relatives aux trois modules $p = 7$, $p = 11$, $p = 13$ et dont les ordres respectifs sont donnés par la formule $\frac{1}{2}p(p^2 - 1)$ et sont, par suite, égaux à 168, 660, 1092.

2e semestre 1893.

Schwarz. — Discours de réception à l'Académie. (623-624).

La Géométrie supérieure et la théorie des fonctions analytiques ont exercé sur M. Schwarz, dès le début de ses études, une grande attraction. Il a, à plusieurs reprises, cherché à résoudre des problèmes difficiles de Géométrie supérieure en s'appuyant sur des résultats empruntés à la théorie des fonctions analytiques; il a également cherché la solution de problèmes d'Analyse en se plaçant, en partie du moins, au point de vue de la Géométrie supérieure. Chaque fois que le succès a couronné ses efforts, il ne se cache pas d'avoir éprouvé une satisfaction particulière à être parvenu au résultat en suivant cette voie indirecte en apparence, mais peut-être en apparence seulement.

M. Schwarz énumère ses principaux travaux, parmi lesquels il faut citer tout

d'abord ceux qui concernent les surfaces minima, puis la démonstration rigoureuse du principe de Lejeune-Dirichlet dans le cas des surfaces fermées de Riemann, et dans celui de régions planes limitées par des lignes vérifiant certaines conditions déterminées, enfin la détermination de tous les cas où l'intégrale générale de l'équation différentielle de la série hypergéométrique est une fonction algébrique de la variable indépendante.

Frobenius (*G.*). — Discours de réception à l'Académie. (626-628).

C'est à l'étude de questions d'Algèbre que M. Frobenius a surtout consacré sa vie; c'est à elles qu'il revient toujours avec joie, après chaque incursion faite dans le domaine de l'Analyse. La théorie des équations et celle des formes l'attirent également : dans la théorie des équations, c'est surtout l'étude des déterminants; dans celle des formes, c'est surtout l'étude des groupes qui ont fait l'objet de ses recherches.

Les recherches analytiques de M. Frobenius ont elles aussi été fructueuses. Grâce à ses connaissances algébriques, il a pu étendre aux équations différentielles linéaires la notion capitale d'irréductibilité. Il faut citer aussi ses longs travaux sur les fonctions thêta de plusieurs variables, en particulier ceux qui concernent les belles propriétés des fonctions thêta de trois variables, et leurs relations avec la théorie des courbes du quatrième ordre, et ses recherches sur les fonctions thêta à modules singuliers.

Réponse de M. *Auwers*, Secrétaire perpétuel de la classe physico-mathématique de l'Académie. (629-632).

M. Auwers répond au nom de l'Académie à MM. Schwarz et Frobenius. Tout en étant heureux que l'Académie ait confié à MM. Schwarz et Frobenius la grande et difficile mission de continuer les traditions de Kummer, de Kronecker et de M. Weierstrass, M. Auwers ne peut s'empêcher de regretter que les travaux des mathématiciens contemporains se soient quelque peu détournés des applications des Mathématiques à l'étude de la nature. Il espère toutefois que la perfection même des recherches purement théoriques actuelles permettra plus tard d'étendre avec succès le champ des applications.

Helmholtz (*H. von*). — Conséquences tirées de la théorie de Maxwell sur les mouvements de l'éther. (649-656).

Dans la théorie électrodynamique de Maxwell, on se représente l'éther en mouvement traversé par une substance pondérable se mouvant avec lui. Ces mouvements simultanés de l'éther et de la matière pondérable apparaissent dans toute substance conductrice ou réfringente par rapport au vide, ou ayant des valeurs des constantes diélectriques et magnétiques différentes de celles du vide, et l'on peut déduire des mouvements de la matière pesante, de ceux que l'on peut observer comme de ceux qui sont déterminés par la théorie, les mouvements de l'éther qui concordent avec eux. Les conséquences de cette théorie ont toujours été d'accord avec les mesures des forces électromotrices que les mouvements des corps pesants développent par induction.

Mais quand l'espace envisagé ne contient que de l'éther, sans matière pondé-

rable, comme c'est le cas pour les espaces situés entre les planètes, ou entre les étoiles ou encore entre les molécules des corps pesants, cet éther peut-il encore, tout en étant totalement dépourvu d'inertie, satisfaire aux équations de Maxwell; et, s'il y satisfait, quels seront les mouvements de cet éther? A cette question se rattache intimement la suivante concernant le cas où des corps pesants sont répandus au sein de l'éther : l'éther s'écartera-t-il des corps pesants voisins, ou bien pénétrera-t-il dans ces corps et, dans ce cas, restera-t-il en repos ou se mettra-t-il en mouvement, ou enfin s'écartera-t-il en partie et pénétrera-t-il en partie, comme le pensait Fresnel?

Si l'on suppose que l'éther jouisse des propriétés mécaniques d'un fluide incompressible dénué de frottement, et que l'éther n'ait aucune inertie, M. Helmholtz montre qu'il suffit d'admettre comme postulat le principe de la moindre action sous la forme qu'il lui a donnée (voir *Bulletin*, p. 129, 1897), en ajoutant au potentiel électrocinétique Φ le produit

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right] S(x, y, z),$$

du premier membre de l'équation de définition de l'incompressibilité

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

[où x, y, z désignent les coordonnées d'un point et u, v, w les composantes de sa vitesse] par une fonction arbitraire S de x, y, z, pour pouvoir en déduire l'explication de nombreux phénomènes tels que l'apparition et la persistance de forces pondéromotrices au sein de l'éther en repos ou en mouvement. L'addition du facteur $S(xyz)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right]$ qui est toujours nul, en vertu de l'équation d'incompressibilité, ne change d'ailleurs pas la valeur du potentiel électrocinétique Φ.

Les lois de Maxwell que Hertz a complétées en introduisant explicitement les composantes des vitesses et qu'Helmholtz a déduites du principe de la moindre action [voir *Bulletin*, p. 130, 1897] permettent donc d'expliquer entièrement les lois des mouvements et des changements ayant lieu au sein de l'éther.

Helmholtz montre, en particulier, que dans certains cas l'éther glisse nécessairement à la surface des corps pondérables.

Fuchs (*L.*). — Sur les équations différentielles linéaires auxquelles correspondent des groupes de substitutions indépendantes de certains paramètres. (975-988).

1. Envisageons d'abord une équation différentielle linéaire de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+p_n y=0, \tag{1}$$

où les coefficients p_1, p_2, ..., p_n sont des fonctions de x qui, aux environs

d'un point singulier a, sont représentées par des séries telles que

$$p_\lambda = \frac{1}{(x-a)^\lambda} \mathfrak{P}_\lambda,$$

$\mathfrak{P}_\lambda$ étant une série entière en $(x-a)$.

M. Fuchs démontre que l'on peut toujours trouver une équation différentielle linéaire

$$(2) \qquad \frac{d^n W}{dx^n} + E_1(x)\frac{d^{n-1} W}{dx^{n-1}} + \ldots + E_n(x) W = 0,$$

appartenant à la même *classe* que l'équation (1), et telle que, si l'on envisage l'équation déterminante fondamentale, relative à l'un quelconque des points singuliers essentiels a, y compris le point $x=\infty$, et si l'on désigne par r_1, r_2, ..., r_μ celles des racines de cette équation déterminante fondamentale dont la différence n'est pas un nombre entier, les racines de cette équation déterminante fondamentale dont la différence avec r_k (où k désigne l'un des entiers 1, 2, ..., μ) est un nombre entier sont

$$r_k - 1, \quad r_k - 2, \quad \ldots, \quad r_k - \nu,$$

où ν est un certain nombre entier positif plus petit que n.

2. Supposons que les coefficients $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$, de l'équation différentielle (1) dépendent d'un paramètre t, tandis que le groupe de substitutions du système fondamental d'intégrales de cette équation différentielle relatives à chacun des points singuliers ne dépende pas de t. Supposons, en outre, que les intégrales de l'équation différentielle (1) aient partout des valeurs déterminées, de sorte que, pour tous les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$, les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_n$ soient de la forme

$$p_k = \frac{F_{k(\rho-1)}(x)}{[(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\rho)]^k},$$

où $F_{k(\rho-1)}(x)$ désigne une fonction rationnelle de x de degré $k(\rho-1)$. Supposons aussi que $a_1, a_2, \ldots, a_{\rho-1}$ soient indépendants de t et que $a_\rho = t$. Supposons enfin que, a étant un quelconque des points singuliers et $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ désignant le système fondamental des intégrales relatives à a, on ait pour chacune de ces intégrales η, en désignant par r la racine de l'équation déterminante fondamentale à laquelle appartient η,

$$\eta = (x-a)^r \{ \varphi_0 + \varphi_1 \log(x-a) + \varphi_2[\log(x-a)]^2 + \ldots + \varphi_m[\log(x-a)]^m \},$$

où $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ sont développables en séries entières en $x-a$ et $t-t_0$ aux environs du point singulier $x=a$ et d'une valeur arbitraire $t=t_0$ du paramètre t.

Sous ces hypothèses, qui sont réalisées pour les équations différentielles que vérifient les modules de périodicité des intégrales abéliennes, M. Fuchs démontre que l'on peut toujours déterminer une équation différentielle appartenant à la même *classe* que l'équation (1), pour laquelle les mêmes hypothèses que celles que nous venons d'énumérer sont vérifiées, et jouissant, en outre, de la propriété de l'équation différentielle (2) du n° 1. Il est, dès lors, légitime

de supposer, dans ce qui va suivre, que l'équation différentielle envisagée (1) jouisse elle-même de cette propriété énoncée au n° 1.

3. Soit alors $\eta_{11}, \eta_{12}, \ldots, \eta_{1n}$ le système d'intégrales fondamentales de l'équation différentielle (1), relatif au point singulier essentiel a, choisi de façon que les exposants auxquels appartiennent $\eta_{11}, \eta_{12}, \ldots, \eta_{1n}$ coïncident avec les racines $r_1, r_2, \ldots, r_n$ de l'équation déterminante fondamentale, relatif à ce même point singulier a; enfin, soit $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un système d'intégrales fondamentales de l'équation différentielle (1) pour lequel on ait

$$(3) \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = A_0 y + A_1 y' + \ldots + A_{n-1} y^{(n-1)},$$

où $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$, et où $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ sont des fonctions rationnelles de x; ce dernier système d'intégrales fondamentales de l'équation différentielle (1) existe toujours parce que le groupe de substitutions fondamentales des intégrales de l'équation différentielle (1) ne dépend pas de t par hypothèse.

Posons $y_k = e_{k,1}\eta_{11} + e_{k,2}\eta_{12} + \ldots + e_{k,n}\eta_{1n}$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$; en général, $e_{k,1}$, $e_{k,2}, \ldots, e_{k,n}$ dépendront de t.

M. Fuchs démontre que la fonction rationnelle de x

$$A_{n-1}(x),$$

coefficient de la dérivée $y^{(n-1)}$ d'ordre $(n-1)$ dans la relation (3), s'annule, au moins une fois, en chacun des points singuliers essentiels $a_1, a_2, \ldots, a_{\rho-1}$ qui ne dépendent pas de t. Elle s'annule aussi au point singulier $a_\rho = t$ lorsque $n > 2$; pour $n = 2$, elle prend au point $a_\rho = t$ une valeur qui, si elle n'est pas nulle, est certainement finie. Enfin, au point $x = \infty$ elle est infinie d'ordre au plus égal à $2n - 2$.

Il démontre ensuite que chacune des fonctions rationnelles de x,

$$A_0(x), \quad A_1(x), \quad \ldots, \quad A_{n-1}(x),$$

ne peut être infinie d'ordre supérieur à 1, en un point singulier non essentiel (c'est-à-dire en un point tel que les intégrales n'y deviennent pas infinies et ne s'y ramifient pas).

Il en résulte que, si m désigne le nombre des points singuliers non essentiels de l'équation différentielle (1), et ρ le nombre de ses points singuliers essentiels, l'inégalité

$$\rho \leqq 2n + m + 1.$$

est nécessairement vérifiée.

Si l'on pouvait déterminer l'équation (2) du n° 1, appartenant à la même classe que l'équation (1), de façon à n'introduire aucun point singulier non essentiel, on aurait nécessairement

$$\rho \leqq 2n + 1.$$

Enfin, dans le cas particulier où les coefficients désignés plus haut par $e_{k,1}$, $e_{k,2}, \ldots, e_{k,n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ne dépendent pas de t, on a nécessairement

$$\rho \leqq \frac{3n}{n-1}.$$

1er semestre 1894.

Frobenius (G.). — Sur les diviseurs élémentaires des déterminants. (31-44).

1. Envisageons un système S formé par les éléments $a_{\alpha,\beta}$, où chacun des deux indices α et β prend un nombre quelconque de valeurs entières et positives. Ces éléments $a_{\alpha,\beta}$ pourront à volonté représenter soit des nombres entiers, soit des fonctions entières d'une variable à coefficients constants quelconques, soit des fonctions entières de plusieurs variables à coefficients constants quelconques, soit enfin des quantités entières d'un *corps* quelconque. Suivant que les éléments $a_{\alpha,\beta}$ auront l'une ou l'autre de ces significations, nous entendrons par p soit un nombre premier, soit une fonction linéaire ou irréductible, soit un diviseur premier effectif ou idéal dans le corps envisagé.

Nous désignerons par D_ρ un quelconque des déterminants de *degré* ρ, ayant donc ρ lignes et ρ colonnes, formé au moyen des éléments $a_{\alpha,\beta}$ en donnant à l'indice α ρ valeurs entières positives distinctes ou non et à l'indice β également ρ valeurs entières positives distinctes ou non.

Soit

$$p^{\delta_\rho}$$

la puissance la plus élevée du diviseur p contenue dans *tous* les déterminants D_ρ. Il peut arriver que quelques-uns des déterminants D_ρ soient divisibles par une puissance plus élevée de p que la puissance δ_ρ; mais p étant un diviseur *premier*, un au moins des déterminants D_ρ n'est certainement pas divisible par $p^{\delta_\rho+1}$. M. Frobenius appelle *déterminant régulier* D_ρ chacun des déterminants qui n'est pas divisible par $p^{\delta_\rho+1}$.

Si un déterminant A est un des déterminants mineurs d'un déterminant B, il est souvent commode de dire de B qu'il est un déterminant *majeur* de A, et nous aurons lieu d'envisager *tous* les déterminants majeurs du même ordre d'un déterminant mineur donné.

Weierstrass a désigné sous le nom de *diviseurs élémentaires,* ou aussi d'*invariants élémentaires* du système S, les quantités

$$p^{\delta_\rho-\delta_{\rho-1}},$$

et a montré le rôle capital que jouent ces diviseurs ou invariants élémentaires dans la théorie des formes bilinéaires et quadratiques (*Monatsberichte der Berliner Akademie,* 1868). Nous dirons de $p^{\delta_\rho-\delta_{\rho-1}}$ qu'il est le $\rho^{\text{ième}}$ diviseur élémentaire du système S relatif au diviseur premier p.

Supposons que r soit un nombre entier positif, plus petit ou égal au *rang* du système S. On peut démontrer les trois théorèmes suivants :

Théorème I. — Chaque déterminant *régulier* D_r de degré r contient un mineur *régulier* D_{r-1} de degré $r-1$.

Théorème II. — Chaque déterminant *régulier* D_{r-1} de degré $r-1$ est le mineur d'un déterminant *régulier* D_r de degré r.

Théorème III. — L'inégalité

$$\delta_r - 2\delta_{r-1} + \delta_{r-2} \geqq 0$$

est toujours vérifiée.

En supposant que ces théorèmes aient lieu pour tout entier positif *plus petit* que le nombre r, pour lequel on veut les démontrer, M. Frobenius établit d'abord la proposition fondamentale que voici :

Théorème IV. — Le produit $D_r D_{r-1}$ de deux déterminants de degrés r et $r-1$ du système S est divisible par le produit du plus grand commun diviseur de tous les mineurs de degré $r-1$ du déterminant D_r et du plus grand commun diviseur de tous les majeurs de degré r du déterminant D_{r-1} que l'on peut former dans le système S.

Il déduit immédiatement de cette proposition fondamentale IV, que les trois théorèmes annoncés I-III ont lieu pour le nombre envisagé r.

Des théorèmes I et II on déduit comme corollaire le théorème :

Théorème V. — Si R et T sont deux déterminants *réguliers* du système S, de degrés ρ et τ, si R est un des mineurs de T, et si σ est un entier compris entre ρ et τ, il existe un déterminant régulier de degré σ qui est à la fois mineur de T et majeur de R.

Le théorème IV peut être aisément généralisé. On montre en effet que, si s désigne un entier positif quelconque plus petit que r, et si t est un nombre plus petit ou égal à $r-s$, le produit $D_r D_s$ de deux déterminants de degrés r et s d'un système S est toujours divisible par le produit du plus grand commun diviseur de tous les mineurs de degré $r-t$ de D_r et du plus grand commun diviseur de tous les majeurs de degré $s+t$ de D_s.

2. Lorsque le système S envisagé est un système *symétrique,* de sorte que $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, on appelle *déterminant mineur principal* tout mineur dont les éléments situés dans la diagonale servant d'axe de symétrie sont aussi des éléments de la diagonale servant d'axe de symétrie au déterminant formé par tous les éléments $a_{\alpha\beta}$.

On peut toujours former une suite

$$A_1, \quad A_2, \quad \dots, \quad A_r$$

de déterminants mineurs principaux d'un système symétrique S, tels que, si le déterminant de degré ρ

$$A_\rho = \sum \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{\rho-1,\rho-1} a_{\rho,\rho}$$

n'est pas régulier, les déterminants

$$A_{\rho-1} = \sum \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{\rho-2,\rho-2} a_{\rho-1,\rho-1}$$

et

$$A_{\rho+1} = \sum \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{\rho,\rho} a_{\rho+1,\rho+1}$$

soient réguliers et que, en outre, le déterminant

$$B_\rho = \sum \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{\rho-1,\rho-1} a_{\rho,\rho+1}$$

soit régulier, tandis que le déterminant

$$C_\rho = \sum \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{\rho-1,\rho-1} a_{\rho+1,\rho+1}$$

ne soit pas régulier. On a

$$\delta_{\rho+1} - 2\delta_\rho + \delta_{\rho-1} = 0.$$

Le déterminant

$$A_r = \sum \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{r,r}$$

est régulier.

Il en résulte que :

Théorème VI. — Lorsque le nombre $\delta_{\rho+1} - 2\delta_\rho + \delta_{\rho-1}$ est *positif*, tout déterminant symétrique de rang r contient un déterminant mineur principal, régulier, de degré ρ.

3. Envisageons maintenant la forme *quadratique* quelconque

$$\sum a_{\alpha,\beta} x_\alpha x_\beta \qquad a_{\alpha,\beta} = a_{\beta,\alpha}.$$

Si nous substituons à la variable $x_{\rho+1}$ la variable

$$x'_{\rho+1} = x_{\rho+1} - x_\rho,$$

en ne changeant pas les autres variables, les déterminants A_1, A_2, ..., $A_{\rho-1}$, $A_{\rho+1}$, ..., A_r ne changent pas, tandis que le déterminant A_ρ est remplacé par le déterminant A'_ρ, où l'on a posé

$$A'_\rho = A_\rho + 2B_\rho + C_\rho.$$

Mais, si A_ρ n'est pas régulier, il est aisé de voir que A'_ρ l'est certainement. On peut donc, au moyen de substitutions très simples, obtenir une forme quadratique équivalente à la forme quadratique quelconque envisagée, et pour laquelle chacun des déterminants de la suite

$$A_1, \quad A_2, \quad \dots, \quad A_r$$

est un déterminant régulier.

Il y a lieu d'envisager à part le cas où les éléments $a_{\alpha,\beta}$ sont des quantités entières d'un *corps* et où p est égal à 2 ou à un diviseur premier de 2.

4. On peut étudier de même les systèmes alternés S pour lesquels on a

$$a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha} = 0, \qquad a_{\alpha\alpha} = 0.$$

On obtient, dans ce cas, une suite de déterminants mineurs principaux réguliers de degrés pairs

$$A_2, \quad A_4, \quad \dots, \quad A_{2r},$$

où pour $\rho = 1, 2, \ldots, r$, on a

$$A_{2\rho} = \sum \pm a_{11} \ldots a_{2\rho, 2\rho},$$

et où $A_{2\rho}$ est un mineur de $A_{2\rho+2}$.

5. M. Frobenius démontre ensuite les deux théorèmes de Smith :

Théorème VII. — Si l'on divise un déterminant M différent de zéro, de degré r, d'un système S par le plus grand commun diviseur de tous ses mineurs de degré $r-1$, le quotient de la division contient le facteur p *au moins* $\delta_r - \delta_{r-1}$ fois. Il peut arriver qu'il le contienne plus de $\delta_r - \delta_{r-1}$ fois, mais lorsque le déterminant M est *régulier* cela n'est pas possible; le quotient de la division est divisible par $p^{\delta_r - \delta_{r-1}}$, et n'est pas divisible par $p^{\delta_r - \delta_{r-1}+1}$.

Théorème VIII. — Si l'on divise le plus grand commun diviseur de tous les déterminants de degré r qui contiennent un même mineur L différent de zéro, de degré $r-1$, par ce mineur L, et si l'on réduit le quotient, le numérateur du quotient réduit contient le facteur p au *maximum* $\delta_r - \delta_{r-1}$ fois. Si L est *régulier*, ce quotient réduit contient p exactement $\delta_r - \delta_{r-1}$ fois, il est divisible par $p^{\delta_r - \delta_{r-1}}$.

6. Envisageons maintenant deux systèmes S′ et S″ formés, le premier par les éléments $a_{\alpha,\beta}$, le second par les éléments $b_{\alpha,\beta}$, où les indices α et β prennent toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$. Composons ces deux systèmes; soit S le système composé, $c_{\alpha,\beta}$ ses éléments, de sorte que l'on a

$$c_{\alpha,\beta} = a_{\alpha,1} b_{1,\beta} + a_{\alpha,2} b_{2,\beta} + \ldots + a_{\alpha,n} b_{n,\beta} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots, n \\ \beta = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Le système composé S jouit de la propriété fondamentale que voici :

Théorème IX. — Le $r^{\text{ième}}$ diviseur élémentaire de S est divisible par le $r^{\text{ième}}$ diviseur élémentaire de chacun des systèmes composants S′ et S″.

7. Soient ρ, r, s, n des entiers positifs tels que l'on ait

$$\rho \leq r \leq s \leq n,$$

où n est un entier que l'on peut supposer plus grand que 2.

Envisageons le système S formé par les éléments $a_{\mu,\nu}$ ($\mu = 1, 2, \ldots, n$; $\nu = 1, 2, \ldots, n$) et désignons par T le système formé par les éléments $a_{k,\lambda}$ ($k = 1, 2, \ldots, r$; $\lambda = 1, 2, \ldots, r$).

Nous dirons de deux déterminants

$$D_\rho = |a_{\alpha,\beta}|, \qquad \alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho; \quad \beta = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\rho;$$

et

$$D'_\rho = |a_{\gamma,\delta}|, \qquad \gamma = \alpha_{\rho+1}, \alpha_{\rho+2}, \ldots, \alpha_n; \quad \delta = \beta_{\rho+1}, \beta_{\rho+2}, \ldots, \beta_n,$$

de degrés ρ et $n-\rho$ du système S, qu'ils sont *complémentaires,* lorsque

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_\rho, \quad \alpha_{\rho+1}, \quad \ldots, \quad \alpha_n$$

et

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_\rho, \quad \beta_{\rho+1}, \quad \ldots, \quad \beta_n$$

désignent deux permutations des indices $1, 2, \ldots, n$, toutes deux paires ou toutes deux impaires.

M. Frobenius établit le théorème suivant concernant les déterminants du système S :

Théorème X. — Si l'on envisage *tous* les déterminants

$$D_\rho = |a_{\alpha,\beta}|$$

de degré ρ du système

$$|a_{\alpha,\beta}| \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r; \quad \beta = 1, 2, \ldots, s),$$

où l'indice α prend ρ quelconques des valeurs $1, 2, \ldots, r$, tandis que l'indice β prend ρ quelconques des valeurs $1, 2, \ldots, s$, si D'_ρ désigne les déterminants complémentaires de ces déterminants D_ρ, si enfin l'on désigne par D_0 le nombre 1 et par D'_0 le déterminant

$$|a_{\mu,\nu}| \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n; \quad \nu = 1, 2, \ldots, n),$$

on a, pour tous les choix possibles de ρ, r, s, n, compatibles avec les inégalités $\rho \leq r \leq s \leq n$, la relation

$$\sum_{\rho=0}^{r} \left[\sum_{D_\rho} (-1)^\rho D_\rho D'_\rho \right] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{1,s+1} & \ldots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{2,s+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{r,s+1} & \ldots & a_{r,n} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \ldots & a_{r+1,s} & a_{r+1,s+1} & \ldots & a_{r+1,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,s} & a_{n,s+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

8. On peut remplacer les démonstrations algébriques de ces divers théorèmes, données par M. Frobenius dans le Mémoire que nous analysons, par des démonstrations ayant un caractère purement arithmétique. Celles de ces démonstrations qui ont été données par M. Smith et celles de M. Frobenius lui-même peuvent être considérablement simplifiées, comme le fait voir M. Frobenius en prenant pour exemple le théorème IX.

M. Hensel, à qui M. Frobenius avait communiqué les démonstrations algébriques des théorèmes précédents, a donné, de son côté, une démonstration d'un caractère purement arithmétique du théorème IV, qui est celui qui sert de base à toutes ces recherches. C'est par la reproduction de la démonstration de M. Hensel que M. Frobenius termine son Mémoire.

Vogel (*C.*). — Sur le spectre de β de la Lyre. (115-132).

Pour expliquer les variations du double spectre de cette étoile, Belopolsky suppose qu'elle est formée de deux corps mobiles l'un par rapport à l'autre, le plus obscur passant pour nous alternativement devant et derrière le plus brillant. Les observations de M. Vogel et de M. Wilsing montrent que cette hypothèse ne permet pas de se rendre compte des phénomènes observés.

Frobenius (*G.*). — Sur la loi d'inertie des formes quadratiques. Deux Mémoires. (241-256 et 407-431).

1. Deux formes quadratiques à coefficients réels sont dites équivalentes

lorsqu'on peut les transformer l'une dans l'autre au moyen d'une substitution linéaire à coefficients réels. Toutes les formes équivalentes font partie d'une même classe de formes. Chaque classe de formes contient des formes φ dans lesquelles ne figurent que les carrés des variables; dans toutes ces formes φ, il y a un même nombre n_1 de coefficients positifs et un même nombre n_2 de coefficients négatifs; on appelle *rang* de la classe, ou encore de chacune des formes de la classe, la somme n_1+n_2; on appelle *signature* de la classe, ou encore de chacune des formes de la classe, la différence n_1-n_2.

Soit

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$$

une forme quadratique. Pour trouver son *rang*, formons le déterminant

$$A_n=\sum \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

de ses coefficients. Si tous les mineurs de degré $r+1$ de ce déterminant A_n sont nuls tandis que l'un au moins de ses mineurs de degré r est différent de zéro, le rang de la forme quadratique envisagée est égal à r.

Pour trouver la *signature* de la forme quadratique, formons la suite des $r+1$ mineurs

$$A_0=1,\qquad A_1=a_{11},\qquad A_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2,\qquad \ldots,\qquad A_r=\sum \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{rr}.$$

Si aucun de ces mineurs ne s'annule, la signature s de la forme quadratique envisagée est égale à la différence du nombre des permanences de signe et du nombre des variations de signe dans cette suite $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_r$.

Si un ou plusieurs des termes de cette suite s'annule, il suffit souvent de ranger les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans un autre ordre pour qu'aucun des mineurs de la nouvelle suite, formée suivant la même règle, ne s'annule. On démontre d'ailleurs aisément que dans chaque classe il y a des formes pour lesquelles on peut ranger les variables de façon qu'il en soit ainsi. Si donc, après avoir rangé les n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de toutes les manières possibles, on s'aperçoit que dans chacune des suites $A_0, A_1, \ldots, A_r$ correspondant à ces arrangements il y a au moins un terme nul, il suffit, pour trouver la signature s de la forme quadratique, d'envisager une de ses formes équivalentes convenablement choisie et de lui appliquer la règle donnée plus haut; ce cas se présente, par exemple, quand on a

$$a_{11}=a_{22}=\ldots=a_{nn}=0.$$

On peut toutefois se proposer de déterminer la signature s d'une forme quadratique, sans passer à une forme équivalente, même quand un terme de chacune des suites $A_0, A_1, \ldots, A_r$ correspondant aux divers arrangements des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'annule. Cette recherche offre un grand intérêt parce qu'elle se rattache à un ensemble d'identités remarquables établies par Sylvester et Kronecker; c'est elle qui fait l'objet principal du Mémoire de M. Frobenius.

2. Le point de départ de toutes ces recherches est le théorème suivant énoncé sans démonstration par Sylvester en 1851, et démontré par M. Frobenius

dans le tome 86 du *Journal de Crelle :* « Si l'on envisage une forme bilinéaire quelconque

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta,$$

et si l'on pose

$$B_{\alpha\beta}=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1\beta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r\beta} \\ a_{\alpha 1} & \dots & a_{\alpha r} & a_{\alpha\beta} \end{vmatrix},$$

on a, entre les déterminants

$$A_r=\sum \pm a_{11}a_{22}\dots a_{rr},$$

$$A_n=\sum \pm a_{11}a_{22}\dots a_{nn},$$

$$\Delta=\sum \pm B_{r+1,r+1}\dots B_{n,n},$$

la relation

$$\Delta = A_n A_r^{n-r-1} \text{ ».}$$

De ce théorème de Sylvester on déduit immédiatement le théorème démontré par Kronecker dans le tome 72 du *Journal de Crelle :* Si les déterminants $B_{\alpha\beta}$ de degré $r+1$ sont tous nuls, tous les mineurs de degré $r+1$ du déterminant A_n de la forme bilinéaire sont nuls.

On en déduit aussi le théorème démontré par M. Frobenius dans le tome 82 du *Journal de Crelle :* « Si les déterminants $B_{\alpha\beta}$ de degré $r+1$ sont tous nuls, on a, en désignant par $p_1 p_2, \dots, p_r$ et par $q_1, q_2, \dots, q_r$, r quelconques des nombres 1, 2, ..., n, la relation

$$\sum \pm a_{11}a_{22}\dots a_{rr} \sum \pm a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\dots a_{p_rq_r}$$
$$= \sum \pm a_{p_1,1}a_{p_2,2}\dots a_{p_r,r} \sum \pm a_{1,q_1}a_{2,q_2}\dots a_{r,q_r}.$$

On en déduit enfin que, quand le mineur A_r est différent de zéro, la signature, ou le rang, de la forme quadratique

$$\varphi=\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$$

est égale à la somme des signatures, ou des rangs, des deux formes quadratiques

$$\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta=1}^{r} a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta \quad \text{et} \quad \frac{1}{A_r}\sum_{\alpha=r+1}^{n}\sum_{\beta=r+1}^{n} B_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$$

obtenues, la première en faisant $x_{r+1}=x_{r+2}=\dots=x_n=0$ dans la forme envisagée, la seconde en y faisant $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=\dots=\frac{\partial\varphi}{\partial x_r}=0$.

2de Partie.

3. Dans le tome 91 du *Journal de Crelle*, Gundelfinger a démontré que si r est le *rang* d'un déterminant A_n de degré n, il existe au moins un mineur *principal* (c'est-à-dire tel que ses termes diagonaux soient pris parmi les termes diagonaux de A_n) de degré r qui soit différent de zéro. Il a également montré que l'on peut toujours ranger les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'une forme quadratique quelconque

$$\varphi = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$$

de rang r, de façon que, dans la suite

$$A_0 = 1, \quad A_1 = a_{11}, \quad A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad \ldots, \quad A_r = \sum \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{rr},$$

il n'y ait pas deux termes consécutifs qui soient nuls, et que le dernier terme A_r de la suite soit différent de zéro.

Le premier de ces deux théorèmes avait déjà été démontré par M. Frobenius, dans le tome 82 du *Journal de Crelle*. Il les démontre maintenant tous deux à nouveau en s'appuyant sur le théorème de Sylvester du n° 2.

Mais alors, comme l'a montré Gundelfinger, on a l'expression suivante de la signature s de la forme quadratique φ quelconque envisagée

$$s = \sum_{\rho=1}^{r} \operatorname{sgn}(A_{\rho-1}A_\rho),$$

où $\operatorname{sgn}(\alpha)$ désigne l'unité positive quand α est positif, l'unité négative quand α est négatif, et zéro quand α est nul.

4. M. Frobenius recherche ensuite si, quand *deux* termes consécutifs de la suite $A_0, A_1, \ldots, A_r$ correspondant à un certain arrangement des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont nuls, on peut encore déterminer la signature s de la forme envisagée φ au moyen des permanences et des variations des signes des termes de cette suite. Il montre que, si les deux termes consécutifs $A_{\rho+1}$ et $A_{\rho+2}$ de cette suite sont nuls, il suffit de remplacer dans la formule précédente de Gundelfinger la somme des trois termes

$$\operatorname{sgn}(A_\rho A_{\rho+1}) + \operatorname{sgn}(A_{\rho+1}A_{\rho+2}) + \operatorname{sgn}(A_{\rho+2}A_{\rho+3}),$$

qui est nulle, par le terme

$$-\operatorname{sgn}(A_\rho A_{\rho+3}),$$

qui ne l'est pas, et d'appliquer la formule ainsi modifiée pour obtenir la signature s de la forme quadratique φ envisagée. S'il y a plusieurs fois, dans la suite $A_0, A_1, \ldots, A_r$, deux termes consécutifs qui sont nuls, il faudra faire plusieurs fois le même changement dans la formule de Gundelfinger.

5. Mais si *trois* termes consécutifs de la suite $A_0, A_1, \ldots, A_r$ sont nuls, la signature s de la forme quadratique φ dépend, en général, d'autres circonstances que des permanences et des variations de signes de cette suite. On s'en aperçoit sur un exemple. Prenons pour φ la forme

$$\varphi = a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{14}x_1x_4,$$

dont les coefficients soient des nombres réels quelconques tels que l'on ait $a_{22}a_{33} - a_{23}^2 > 0$. La signature s de cette forme de rang 4 est égale à $2 \operatorname{sgn}(a_{22})$; or, la suite A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 est ici

$$1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad -a_{14}^2(a_{22}a_{33} - a_{23}^2);$$

on voit donc que s n'est pas donnée par les permanences et variations de signes de cette suite $+$, 0, 0, 0, $-$.

6. Il existe toutefois des formes quadratiques particulières où, même quand trois ou plus de trois termes consécutifs de la suite A_0, A_1, ..., A_r sont nuls, la signature s ne dépend que des permanences et variations de signes des termes de cette suite. Telles sont, par exemple, les formes quadratiques dont les coefficients forment un système *récurrent*, c'est-à-dire tel que l'on ait

$$a_{\alpha,\beta} = a_{\alpha+\beta} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \beta = 0, 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}.$$

Ces systèmes ont été étudiés par Kronecker. M. Frobenius montre que les démonstrations des théorèmes qui les concernent peuvent être notablement simplifiées, si l'on utilise une relation linéaire établie par Kronecker lui-même, dans les *Sitzungsberichte* de 1882, et qui relie les mineurs de tout système symétrique, récurrent ou non.

$x_0, x_1, \ldots, x_\rho$; $y_0, y_1, \ldots, y_\rho$; z désignant des variables quelconques, on a d'abord l'identité fondamentale

$$\begin{vmatrix} a_0 & \ldots & a_{\rho-1} & y_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\rho-1} & \ldots & a_{2\rho-2} & y_{\rho-1} \\ x_1 & \ldots & x_\rho & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & \ldots & a_{\rho-1} & y_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\rho-1} & \ldots & a_{2\rho-2} & y_\rho \\ x_0 & \ldots & x_{\rho-1} & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & \ldots & a_{\rho-2} & x_0 & y_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\rho-1} & \ldots & a_{2\rho-3} & x_{\rho-1} & y_{\rho-1} \\ a_\rho & \ldots & a_{2\rho-2} & x_\rho & y_\rho \end{vmatrix}.$$

En désignant par A_ρ et $B_{\alpha,\beta}$ les déterminants

$$A_\rho = \begin{vmatrix} a_0 & \ldots & a_{\rho-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\rho-1} & \ldots & a_{2\rho-2} \end{vmatrix}, \qquad B_{\alpha,\beta} = \begin{vmatrix} a_0 & \ldots & a_{\rho-1} & a_{\rho+\beta} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\rho-1} & \ldots & a_{2\rho-2} & a_{2\rho-1+\beta} \\ a_{\rho+\alpha} & \ldots & a_{2\rho-1+\alpha} & a_{2\rho+\alpha+\beta} \end{vmatrix},$$

on démontre ensuite que si, pour une valeur déterminée de ρ, le déterminant A_ρ est différent de zéro, tandis que $B_{0,0} = B_{0,1} = \ldots = B_{0,\sigma-2} = 0$, les déterminants $B_{\alpha,\beta}(\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, \sigma-1)$ forment un *système récurrent*, de sorte que

$$B_{\alpha,\beta} = B_{\alpha+\beta}.$$

Pour cette raison on désignera, dans ce qui suit, par $A_{\rho,\rho+\sigma}$ les déterminants $B_{\alpha,\beta}$ dont la somme des indices α, β est égale à $\sigma - 1$.

De ce théorème on déduit aisément la proposition établie par Kronecker dans les *Monatsberichte* de 1881 : Si A_ρ est différent de zéro, et si

$$B_{0,0} = B_{0,1} = \ldots = B_{0,\sigma-2} = 0,$$

on a aussi

$$A_{\rho+1} = A_{\rho+2} = \ldots = A_{\rho+\sigma-1} = 0;$$

inversement si A_ρ est différent de zéro et si $A_{\rho+1} = A_{\rho+2} = \ldots = A_{\rho+\sigma-1} = 0$, on

a aussi

$$B_{0,0} = B_{0,1} = \ldots = B_{0,\sigma-2} = 0,$$

et

$$A_\rho^{\sigma-1} A_{\rho+\sigma} = (-1)^{\frac{\sigma(\sigma-1)}{2}} A_{\rho,\rho+\sigma}^{\sigma}.$$

On déduit aussi du même théorème cette autre proposition établie par Kronecker dans les *Monatsberichte* de 1881 : Si r est le *rang* d'un système récurrent illimité, le déterminant A_r est nécessairement différent de zéro.

On sait que cette dernière proposition de Kronecker n'est plus exacte, en général, lorsque le système récurrent, au lieu d'être illimité, est limité. M. Frobenius montre que l'on peut, dans ce cas, le remplacer par le théorème suivant :

« Si r est le *rang* d'un système récurrent limité, $a_{\alpha+\beta}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n-1$), le déterminant

$$A'_r = \begin{vmatrix} a_0 & \ldots & a_{\rho-1} & a_{n-\sigma} & \ldots & a_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\rho-1} & \ldots & a_{2\rho-2} & a_{n-\sigma+\rho-1} & \ldots & a_{n+\rho-2} \\ a_{n-\sigma} & \ldots & a_{n-\sigma+\rho-1} & a_{2n-2\sigma} & \ldots & a_{2n-\sigma-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & \ldots & a_{n+\rho-2} & a_{2n-\sigma-1} & \ldots & a_{2n-2} \end{vmatrix}$$

formé par les ρ premières lignes et colonnes, et par les σ dernières lignes et colonnes du déterminant du système récurrent, est différent de zéro; ρ désigne le plus grand entier plus petit ou égal à r pour lequel A_ρ est différent de zéro, et $\sigma = r - \rho$. »

Ceci posé, pour évaluer la signature s d'une forme quadratique *récurrente* quelconque

$$\varphi = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \sum_{\beta=0}^{n-1} a_{\alpha+\beta} x_\alpha x_\beta,$$

nous formerons la suite

$$A_0, \quad A_1, \quad \ldots, \quad A_r,$$

d'après la règle donnée au n° 1 pour une forme quadratique quelconque; soient $A_0, A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, \ldots, A_k, A_\lambda, \ldots, A_\nu, A_\rho$, où $0 < \alpha < \beta < \gamma < \ldots < \rho$, les termes de cette suite qui sont différents de zéro; si ρ est $< r$, on y joindra A'_r, qui, on l'a démontré, est différent de zéro. Nous envisagerons, parmi les différences

$$\alpha, \quad \beta - \alpha, \quad \gamma - \beta, \quad \ldots, \quad r - \rho,$$

celles qui sont *impaires*. Soit, par exemple, $\lambda - k$ une de ces différences impaires; nous formerons le nombre

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-k-1)} \operatorname{sgn}(A_k A_\lambda);$$

nous aurons alors, pour la signature s de la forme récurrente φ, l'expression

$$s = \sum (-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-k-1)} \operatorname{sgn}(A_k A_\lambda),$$

où la somme est étendue à autant de termes qu'il y a de différences impaires dans la suite α, $\beta-\alpha$, ..., $r-\rho$; si $r-\rho$ est impair, le dernier terme de la somme est

$$(-1)^{\frac{1}{2}(r-\rho-1)}\operatorname{sgn}(A_\rho A'_r).$$

7. Pour relier les recherches précédentes à celles de Kronecker concernant les fonctions de Sturm, nous envisagerons la forme récurrente

$$\varphi=\sum_{\alpha=0}^{n-1}\sum_{\beta=0}^{n-1}(a_{\alpha+\beta}x-a_{\alpha+\beta+1})x_\alpha x_\beta,$$

où x désigne une variable et $a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}$ des constantes telles que l'on puisse envisager le système

$$\begin{matrix} a_0, & \ldots, & a_{n-1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_n, & \ldots, & a_{2n-1}, \end{matrix}$$

de rang r, comme étant une partie d'un système récurrent indéfini de même rang r, et que le déterminant A_r soit différent de zéro. Désignons par F_ρ le déterminant

$$F_\rho=\begin{vmatrix} a_0x-a_1 & \ldots & a_{\rho-1}x-a_\rho \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{\rho-1}x-a_\rho & \ldots & a_{2\rho-2}x-a_{2\rho-1} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_0 & \ldots & a_{\rho-1} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & . \\ a_\rho & \ldots & a_{2\rho-1} & x^\rho \end{vmatrix};$$

c'est un polynome de degré ρ en x, dans lequel le coefficient de x^ρ est égal à A_ρ.

Si l'on exclut les valeurs de x pour lesquelles un des polynomes F_ρ s'annulerait sans être nul identiquement en x, on peut déterminer la signature s de la forme récurrente envisagée φ pour une valeur particulière de x par la formule

$$s=\sum\operatorname{sgn}(F_{\lambda-1}F_\lambda)-\sum\operatorname{sgn}(A_k A_{k,\lambda}),$$

où la première somme est étendue à tous les indices λ pour lesquels A_λ est différent de zéro, $(\lambda>0)$, tandis que la seconde somme est étendue à tous les termes de la suite

$$A_0,\quad A_\alpha,\quad A_\beta,\quad \ldots,\quad A_k,\quad A_\lambda,\quad \ldots,\quad A_r,$$

pour lesquels la différence $\lambda-k$ de deux indices consécutifs est un nombre *pair*.

Mais c'est surtout la différence Δs des signatures s' et s de la forme récurrente φ, lorsqu'on y donne à x deux valeurs particulières quelconques x' et x qu'il importe de déterminer. Si x' et x sont deux des valeurs non exclues de la variable x, cette différence Δs est donnée par la différence des valeurs de l'expression

$$\sum\operatorname{sgn}(F_{\lambda-1}F_\lambda),$$

formée après avoir remplacé la variable x par les deux valeurs envisagées x'

et x; dans cette expression, la somme est étendue aux valeurs de λ pour lesquelles le déterminant A_λ est différent de zéro ($\lambda > 0$). (On montre d'ailleurs qu'on peut, sans rien changer au résultat, l'étendre à tous les indices $\lambda = 1, 2, \ldots, n-1$). On a aussi

$$\sum \operatorname{sgn}(F_{\lambda-1} F_\lambda) = \sum \operatorname{sgn}(A_\lambda A_{k,\lambda} F_k F_\lambda).$$

Si, en particulier, $x' = +x$, $x = -x$, on a

$$\frac{1}{2}\Delta s = \sum \operatorname{sgn}(A_k A_{k,\lambda}),$$

où la somme est étendue à tous les termes de la suite

$$A_0 = 1, \quad A_\alpha, \quad A_\beta, \quad \ldots, \quad A_k, \quad A_\lambda, \quad \ldots, \quad A_r,$$

pour lesquels $\lambda - k$ est *impair*.

8. L'expression générale de Δs trouvée au numéro précédent est encore exacte lorsqu'on donne à x l'une ou l'autre des valeurs, exclues jusqu'ici, qui annulent l'un ou l'autre des polynomes F_ρ. Pour le démontrer, M. Frobenius établit entre ces polynomes une relation linéaire qui est une généralisation d'une relation déjà obtenue par Jacobi (*Œuvres*, t. III, p. 319); cette relation linéaire lui permet de démontrer que, pour une même valeur de x, il est impossible que, parmi les polynomes

$$F_0 = 1, \quad F_\alpha, \quad F_\beta, \quad F_\gamma, \quad \ldots, \quad F_k, \quad F_\lambda, \quad F_\mu, \quad \ldots, \quad F_r,$$

ayant mêmes indices que les termes $A_0, A_\alpha, A_\beta, \ldots, A_r$ de la suite $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_r$ qui sont différents de zéro, il y en ait deux consécutifs qui soient nuls; puis il montre que la formule du n° 7,

$$\Delta s = \sum \operatorname{sgn}(F_{\lambda-1} F_\lambda) = \sum \operatorname{sgn}(A_\lambda A_{k,\lambda} F_k F_\lambda),$$

continue à avoir lieu quand on remplace x ou x' par l'une des racines de l'*un* des polynomes F_ρ; elle a donc lieu dans tous les cas.

9. Si maintenant on suppose que la variable réelle x varie d'une façon continue dans un certain intervalle, par valeurs croissantes par exemple, l'expression trouvée pour Δs reste manifestement la même tant que x n'atteint aucune des racines du polynome F_r; si x traverse une de ces racines, Δs augmente de $+2$, -2 ou 0 unités. Convenons de donner à chaque racine de F_r la caractéristique $+1$, -1, ou 0, suivant que, quand x traverse cette racine en croissant, le produit $F_{r-1}F_r$ passe du négatif au positif, du positif au négatif, ou conserve son signe; alors, si $x' > x$, l'expression $\frac{1}{2}\Delta s$ sera égale à la somme des caractéristiques des racines de $F_r = 0$ comprises entre x et x'; Δs est donc déterminée par les deux polynomes F_{r-1} et F_r seulement.

Kronecker a montré (*Göttinger Nachrichten*, 1881) comment on peut caractériser chacune des racines réelles d'une équation algébrique quelconque qui sont comprises dans un intervalle donné. A cet effet, il envisage, outre les

fonctions F_ρ, d'autres fonctions G_ρ définies par la relation

$$G_\rho = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{\rho-1} & 0 \\ a_1 & \dots & a_\rho & a_0 \\ a_2 & \dots & a_{\rho+1} & a_0 x + a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_\rho & \dots & a_{2\rho-1} & a_0 x^{\rho-1} + a_1 x^{\rho-2} + \dots + a_{\rho-1} \end{vmatrix};$$

M. Frobenius montre que, en s'appuyant sur les théorèmes précédents, on peut parvenir au même résultat en n'envisageant que les fonctions F_ρ seulement; la marche suivie gagne ainsi beaucoup en netteté.

10. On entend par *formes de Bézout* les formes quadratiques

$$\varphi = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \sum_{\beta=0}^{n-1} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$

dont les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont définis par l'identité en u et v,

$$\frac{\left[\sum_{\lambda=0}^{n} p_\lambda u^{n-\lambda}\right]\left[\sum_{\lambda=0}^{n} q_\lambda v^{n-\lambda}\right] - \left[\sum_{\lambda=0}^{n} p_\lambda v^{n-\lambda}\right]\left[\sum_{\lambda=0}^{n} q_\lambda u^{n-\lambda}\right]}{u-v} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \sum_{\beta=0}^{n-1} a_{\alpha\beta} u^{n-1-\alpha} v^{n-1-\beta},$$

où $p_0, \dots, p_n, q_0, \dots, q_n$ désignent $2n+2$ paramètres indépendants les uns des autres. Ces coefficients $a_{\alpha,\beta}$ sont donc obtenus en éliminant, suivant la méthode de Bézout, une variable entre deux équations algébriques.

M. Frobenius montre que la signature des formes de Bézout se détermine exactement par les mêmes formules que celles que nous avons obtenues dans les numéros précédents pour les formes récurrentes. On peut en déduire, comme conséquences de relations identiques entre des déterminants, les propositions de Kronecker sur les fonctions de Sturm.

2ᵉ semestre 1894.

Wien (W.). — De l'influence du vent sur la forme des vagues. (509-525).

Les hypothèses faites par M. Wien sont celles faites par Helmholtz dans son Mémoire sur les mouvements atmosphériques (*Sitzungsberichte*, 1889) : le mouvement des deux fluides est permanent; il est parallèle au plan des XY du système de coordonnées rectangulaires OXYZ, dont l'axe des +X est dirigé suivant le zénith; il n'y a pas de tourbillons; il n'y a pas de frottement; la force donnée est la pesanteur.

Si φ désigne le potentiel des vitesses et si le fluide se meut parallèlement aux lignes $\psi = \text{const.}$, on sait que les équations de l'Hydrodynamique sont vérifiées, sous les hypothèses que nous venons de faire, en égalant $x + iy$ à une fonction de $\varphi + i\psi$. Il suffit de tenir compte des conditions à la limite pour

que le problème soit déterminé. M. Wien en développe la solution dans le cas où l'un des fluides est la mer et l'autre l'air atmosphérique.

Sturm (*R.*). — Sur le complexe général du second degré. (697-704).

M. Sturm communique à l'Académie quelques-uns des théorèmes et résultats auxquels il est parvenu et qu'il a publiés dans la troisième Partie de son Traité sur la Géométrie des formes réglées du premier et du second degré.

Mangoldt (*H. von*). — Extrait du Mémoire : *Contribution au Mémoire de Riemann sur le nombre des nombres premiers plus petits qu'un nombre donné.* (883-896).

Dans son Mémoire sur le nombre des nombres premiers plus petits qu'un nombre donné (*Monatsberichte*, 1859) et (*Œuvres*, 2ᵉ édition, p. 154), Riemann a énoncé les deux théorèmes suivants :

1. « Le nombre des racines de l'équation $\xi(t) = 0$, dont la partie réelle est comprise entre o et T, est égal à $\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$. Il est très probable que toutes ces racines sont réelles. »

2. « La série

$$\Sigma^{\alpha}\left[\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right],$$

dont les termes sont supposés ordonnés suivant les α croissants, converge vers la même limite que l'expression

$$\frac{1}{2i\pi\log x}\int_{a-bi}^{a+bi}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\log\frac{\xi\left[\left(s-\frac{1}{2}\right)i\right]}{\xi(0)}\right\}x^{s}\,ds. \text{ »}$$

Le lecteur trouvera dans le Mémoire de Riemann la signification des différentes lettres qui figurent dans l'énoncé de ces deux théorèmes.

M. Mangoldt démontre le second théorème; en ce qui concerne le premier théorème, il montre seulement que le nombre des racines de l'équation $\xi(t) = 0$ dont la partie réelle est comprise entre o et T est égal, *à des termes près d'ordre inférieur*, à $\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$. On ne voit pas si toutes ces racines sont réelles. C'est en s'appuyant sur les résultats obtenus par M. Hadamard, dans son Mémoire sur les propriétés des fonctions entières (*Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. IX), qu'il parvient à ces résultats par une voie qui est d'ailleurs toute semblable à celle suivie, en 1884, par M. Piltz dans sa thèse inaugurale (Iéna, 1884).

Königsberger (*L.*). — Sur l'existence d'équations aux dérivées partielles irréductibles (989-1027).

Envisageons l'équation aux dérivées partielles, d'ordre m,

$$\frac{\partial^m u}{\partial z_1^m} = F\left(z_1, z_2, \ldots, z_p, u, \frac{\partial u}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial z_p}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial z_1^{m-1}}, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial z_1^{m-2}\,\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial z_1^{m-1}\,\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial z_2^m}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial z_p^m}\right),$$

où $z_1, z_2, \ldots, z_p$ désignent des variables indépendantes, u une fonction de ces variables et F une fonction algébrique irréductible dans le domaine de rationalité formé par les quantités écrites dans la parenthèse. On dit que cette équation aux dérivées partielles est *irréductible,* lorsqu'elle n'a aucune intégrale commune avec une quelconque des équations aux dérivées partielles analogues, d'ordre quelconque, où F désigne encore une fonction algébrique et où les dérivées partielles, prises par rapport à z_1, sont d'ordres inférieurs à m, tandis que les dérivées partielles prises par rapport aux autres variables sont de l'ordre que l'on veut.

Soit, par exemple, l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, à deux variables indépendantes z_1, z_2,

$$\frac{\partial u}{\partial z_1} = F\left(z_1, z_2, u, \frac{\partial u}{\partial z_2}\right),$$

où F désigne une fonction algébrique irréductible. Cette équation aux dérivées partielles sera dite irréductible lorsqu'elle n'a aucune intégrale commune avec une quelconque des équations différentielles ordinaires de la forme

$$f\left(z_1, z_2, u, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z_2^2}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial z_2^m}\right) = 0,$$

où f désigne une fonction algébrique quelconque, m un entier positif quelconque et où z_1 est envisagé comme un paramètre.

Il faut avant tout montrer qu'il existe de telles équations aux dérivées partielles, irréductibles. Dans une première Partie de son Mémoire, M. Kœnigsberger démontre que toutes les équations aux dérivées partielles linéaires, de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial z_1} = F(z_1, z_2)\,\frac{\partial u}{\partial z_2},$$

sont irréductibles, lorsque F est une fonction algébrique irréductible de z_1, z_2 pour laquelle $\frac{\partial^2 F}{\partial z_2^2}$ est différent de zéro et telle que pour aucun entier positif ν ou m, pour aucun nombre N, pour aucun entier positif nul ou négatif γ, l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \psi}{\partial z_1} - F\,\frac{\partial \psi}{\partial z_2} = N_\lambda\,\frac{\partial^\lambda F}{\partial z_2^\lambda} + N\,\frac{\partial^2 F}{\partial z_2^2} + \gamma\psi\,\frac{\partial F}{\partial z_2}$$

n'admette une intégrale qui soit une fonction rationnelle de z_1, z_2, F, ne se réduisant pas à une constante ou à zéro. Dans la dernière équation, λ est un quelconque des nombres 3, 4, ..., $m-1$, m; N_3, ..., N_{m-1}, N_m sont respectivement égaux à $\nu\frac{m(m-1)}{2}$ ou 0, ..., νm ou 0, ν ou 0.

Il s'agit donc de savoir s'il existe des fonctions F vérifiant ces diverses conditions.

Dans la seconde Partie de son Mémoire, M. Kœnigsberger montre que, si l'on suppose que $F(z_1, z_2)$ soit de la forme

$$F = f_1 z_2 + f_2 z_2^2 + \ldots + f_k z_2^k,$$

où $k > 3$ et où $f_1, f_2, \ldots, f_k$ désignent des fonctions rationnelles de z_1, toutes différentes de zéro, et telles qu'il n'existe aucune relation linéaire homogène à coefficients constants soit entre f_1, f_2, soit entre f_1, f_3 et une des autres fonctions $f_4, \ldots, f_k$, l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial z_1} = F(z_1, z_2) \frac{\partial u}{\partial z_2}$$

est toujours irréductible, lorsque les équations

$$\frac{\partial u}{\partial z_1} = \rho u f_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial z_1} = \rho_1 u f_1 + A_2 f_2 + A_3 f_\lambda, \qquad \frac{\partial u}{\partial z_1} = u f_1 + B_2 f_2 + B_3 f_{\lambda+1}$$

n'ont pas d'intégrale qui soit une fonction rationnelle de z_1, autre qu'une constante ou zéro, quels que soient les entiers positifs nuls ou négatifs ρ et ρ_1, quelles que soient les constantes A_2, A_3, B_2, B_3 et quel que soit celui des nombres $3, 4, \ldots, k$ que l'on choisisse pour λ.

Si donc l'on peut déterminer des fonctions rationnelles de z_1,

$$f_1(z_1), \quad \ldots, \quad f_k(z_1) \qquad (k > 3),$$

telles que l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial z_1} = c_1 f_\alpha u + c_2 f_\beta + c_3 f_\gamma \qquad (\alpha < \beta < \gamma),$$

dans laquelle c_1 désigne une constante *quelconque* différente de zéro, et c_2, c_3 des constantes quelconques, n'admet aucune intégrale qui soit une fonction rationnelle de z_1 ne se réduisant pas à une constante ou à zéro, on est certain que l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial z_1} = (f_1 z_2 + f_2 z_2^2 + \ldots + f_k z_2^k) \frac{\partial u}{\partial z_2}$$

est *irréductible*. Or il est aisé de déterminer de diverses manières des fonctions $f_1, \ldots, f_k$ vérifiant ces conditions. On n'a, par exemple, qu'à prendre pour $f_1, f_2, \ldots, f_k$ des polynomes en z_1, dont les degrés n'augmentent pas avec l'indice de f. L'existence d'équations aux dérivées partielles irréductibles est donc établie.

M. Kœnigsberger démontre ensuite la proposition fondamentale :

Si une équation aux dérivées partielles du type général envisagé au début est irréductible et si elle a *une* intégrale commune avec une autre équation aux dérivées partielles du même type et d'un ordre quelconque égal ou plus grand que le nombre p des variables indépendantes, elle a *toutes* ses intégrales communes avec cette dernière équation.

Il en résulte que tous les théorèmes que M. Kœnigsberger avait déduits de cette proposition fondamentale dans son Mémoire sur la théorie des équations différentielles, peuvent être étendus aux équations aux dérivées partielles.

Fuchs (*L.*). — Sur les équations différentielles linéaires auxquelles correspondent des groupes de substitutions indépendantes de certains paramètres. (1117-1127).

1. Dans cette Communication qui fait suite à celle faite par M. Fuchs en 1893 sous le même titre, on trouve d'abord une démonstration du théorème :

« Si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ désignent des fonctions rationnelles de x telles que les intégrales de l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0$$

soient partout déterminées; s'il existe, en outre, un système fondamental d'intégrales vérifiant l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = A_0 y + A_1 \frac{\partial y}{\partial x} + \ldots + A_{n-1} \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}},$$

où t désigne un paramètre figurant dans $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et où $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ désignent des fonctions rationnelles de x; si enfin aucune des différences de celles des racines de l'équation fondamentale déterminante, appartenant à un point singulier a, qui forment un groupe, n'est en valeur absolue plus grande que $n-2$, *le coefficient* A_{n-1} *s'annule, au moins une fois, pour* $x = a$. Quand n est plus grand que 2, il est indifférent que a dépende ou non du paramètre t; pour $n = 2$, a est supposé indépendant de t. »

Ce même théorème résulterait aussi des considérations développées par M. Fuchs dans la première Partie de son Mémoire (*Sitzungsberichte*, 1893), mais seulement sous l'hypothèse qu'aux conditions que nous venons d'énumérer vienne encore s'ajouter la dernière du n° 2 (voir *Bulletin*, 1897, p. 156) qui concerne les expressions logarithmiques de chacune des intégrales η du système fondamental d'intégrales relatif à a; la démonstration actuelle montre qu'il n'est pas nécessaire de faire cette dernière hypothèse. Elle permet aussi de trouver des conditions suffisantes pour que A_{n-1} s'annule pour $x = a$, même quand les différences de celles des racines de l'équation fondamentale déterminante, appartenant à un point singulier a, qui forment un groupe, sont en valeur absolue plus grandes que $n-2$.

2. Dans les *Sitzungsberichte* de 1892, M. Fuchs a montré que, s'il existe un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle (1) qui vérifient l'équation (2), les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ de l'équation (2) vérifient un système d'équations différentielles linéaires simultanées.

Il s'agit maintenant d'obtenir directement ce système d'équations linéaires. A cet effet, soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un système fondamental quelconque d'intégrales de l'équation différentielle (1), et $z_1, z_2, \ldots, z_n$ le système adjoint à $y_1, y_2, \ldots, y_n$; envisageons les expressions

$$s_{\alpha,\beta} = y_1^{(\alpha)} z_1^{(\beta)} + y_2^{(\alpha)} z_2^{(\beta)} + \ldots + y_n^{(\alpha)} z_n^{(\beta)},$$

où les accents désignent des dérivées prises par rapport à la variable indépendante x; ce sont des fonctions rationnelles entières de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et de

leurs dérivées prises par rapport à x ; on a, en particulier, $s_{\alpha,\beta} = 0$, quand $\alpha + \beta < n - 1$, et $s_{\alpha,\beta} = (-1)^\beta$, quand $\alpha + \beta = n - 1$. En désignant par $P(y)$ le premier membre de l'équation (1), formons enfin les expressions

$$Q_\mu(A_k) = \sum_{l=1}^{n} z_l^\mu \, P(A_k y_l^{(k)});$$

les équations différentielles linéaires cherchées que vérifient les fonctions A_0, $A_1, \ldots, A_{n-1}$ de x seront alors les n équations

$$Q_\mu(A_0) + Q_\mu(A_1) + \ldots + Q_\mu(A_{n-1}) + \frac{\partial p_1}{\partial t} s_{n-1,\mu} + \frac{\partial p_2}{\partial t} s_{n-2,\mu} + \ldots + \frac{\partial p_n}{\partial t} s_{0,\mu} = 0$$

$$(\mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Envisageons, en particulier, le cas où $n = 2$; on peut alors, sans restreindre la généralité des recherches, supposer que p_1 soit nul ; en posant $p_2 = -p$, l'équation différentielle (1) prend la forme

$$(3) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = py,$$

et les deux équations différentielles linéaires simultanées que nous venons d'apprendre à former pour A_0 et A_1 se réduisent à

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} - 2\frac{\partial A_0}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2} + 2p\frac{\partial A_1}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} A_1 = \frac{\partial p}{\partial t};$$

on en déduit aisément l'équation différentielle suivante que doit vérifier A_1,

$$\frac{\partial^3 A_1}{\partial x^3} - 4p\frac{\partial A_1}{\partial x} - 2\frac{\partial p}{\partial x} A_1 + 2\frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

M. Fuchs étudie le cas où, $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ désignant les points singuliers de l'équation différentielle (3), $a_1, a_2, \ldots, a_{\rho-1}$ sont indépendants de t, tandis que $a_\rho = t$. Il montre, par exemple, que, si la fonction rationnelle A_1 de x s'annule pour $x = a_1, a_2, \ldots, a_{\rho-1}$ et reste finie pour $x = a_\rho$, A_1 ne peut être qu'un polynome en x. Il montre aussi que les conditions nécessaires et suffisantes pour que le groupe de substitutions de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y\left[\frac{\alpha_1}{x} + \frac{\beta_1}{x} + \frac{\alpha_2}{(x-1)^2} + \frac{\beta_2}{x-1} + \frac{\alpha'}{(x-t)^2} + \frac{\beta'}{x-t}\right]$$

soit indépendant du paramètre t est que l'on ait, entre les quantités $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha', \beta'$, qui sont supposées indépendantes de x, les relations

$$\beta_1 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha')(t-1) + 2\alpha_1}{t},$$

$$\beta_2 = \frac{(\alpha' - \alpha_1 - \alpha_2)t + 2\alpha_2}{t-1},$$

$$\beta' = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha' - 2\alpha' t}{t(t-1)}.$$

Kœnigsberger (L.). — Sur le théorème d'Eisenstein concernant l'irréductibilité des équations algébriques. (1135-1139).

1. Toute équation algébrique de la forme

$$F_0(x)y^n+(x-\alpha)F_1(x)y^{n-1}+(x-\alpha)F_2(x)y^{n-2}+\ldots$$
$$+(x-\alpha)F_{n-1}(x)y+(x-\alpha)F_n(x)=0,$$

dans laquelle $F_0(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_{n-1}(x)$, $F_n(x)$ désignent des polynomes en x dont le premier et le dernier $F_0(x)$ et $F_n(x)$ ne s'annulent pas quand on y remplace x par la constante α, est *irréductible.*

Les solutions de ces équations irréductibles sont formées et ne sont formées que par les fonctions algébriques y, plurivoques d'ordre n, pour lesquelles $x=\alpha$ est un point de ramification d'ordre n, prenant en $x=\alpha$ une valeur déterminée, par exemple $y=0$, et étant alors représentées aux environs du point $x=\alpha$ par un développement en série procédant suivant les puissances croissantes de $x-\alpha$ dont le premier terme est $(x-\alpha)^{\frac{1}{n}}$. Une substitution linéaire permet d'ailleurs de passer, des solutions où la valeur de y qui correspond à $x=\alpha$ est une valeur déterminée différente de zéro, aux solutions où elle est nulle.

A ce théorème correspond, dans la théorie des nombres algébriques, le théorème bien connu d'Eisenstein :

« Toute équation algébrique à coefficients entiers de la forme

$$a_0x^n+pa_1x^{n-1}+pa_2x^{n-2}+\ldots+pa_{n-1}x+pa_n=0,$$

dans laquelle p désigne un nombre premier quelconque, et $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, a_n des nombres entiers quelconques dont le premier et le dernier, a_0 et a_n, ne sont pas divisibles par p, est *irréductible.* »

2. Toute équation algébrique de la forme

$$F_0(x)y^n+(x-\alpha)^{E\left(\frac{r}{n}\right)+1}F_1(x)y^{n-1}$$
$$+(x-\alpha)^{E\left(\frac{2r}{n}\right)+1}F_2(x)y^{n-2}+\ldots$$
$$+(x-\alpha)^{E\left[\frac{(n-1)r}{n}\right]+1}F_{n-1}(x)y+(x-\alpha)^rF_n(x)=0$$

dans laquelle $F_0(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_{n-1}(x)$, $F_n(x)$ désignent des polynomes en x dont le premier et le dernier $F_0(x)$ et $F_n(x)$ ne s'annnulent pas quand on y remplace x par la constante α, et où $E\left(\frac{\lambda r}{n}\right)$ désigne pour

$$\lambda=1, 2, \ldots n-1,$$

le plus grand entier contenu dans le nombre $\frac{\lambda r}{n}$, est *irréductible,* lorsque r est premier relatif à n.

Les solutions de ces équations irréductibles sont formées et ne sont formées que par les fonctions algébriques y, plurivoques d'ordre n, prenant en $x=\alpha$ une valeur déterminée, par exemple $y=0$, et étant alors représentées aux

environs du point $x = \alpha$ par un développement en série, procédant suivant les puissances croissantes de $x - \alpha$, dont le premier terme est $(x - \alpha)^{\frac{r}{n}}$.

A ce théorème correspond, dans la théorie des nombres algébriques, le nouveau théorème que voici :

« Toute équation algébrique à coefficients entiers de la forme

$$a_0 x^n + p^{E\left[\frac{r}{n}\right]+1} a_1 x^{n-1} + p^{E\left[\frac{2r}{n}\right]+1} a_2 x^{n-2} + \ldots + p^{E\left[\frac{(n-1)r}{n}\right]+1} a_{n-1} x + p^r a_n = 0,$$

dans laquelle p désigne un nombre premier, r un nombre premier relatif à n, et où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ désignent des nombres entiers quelconques dont le premier et le dernier a_0 et a_n ne sont pas divisibles par p, est *irréductible*. »

3. Le théorème 2 peut lui-même être généralisé de diverses manières; à chacune de ces généralisations correspond un théorème analogue concernant les nombres algébriques. On peut démontrer, par exemple, l'*irréductibilité* de toute équation algébrique à coefficients entiers, de la forme

$$a_0 x^n + p^{h_\mu^{(1)}} q^{h_\nu^{(1)}} a_1 x^{n-1}$$
$$+ p^{h_\mu^{(2)}} q^{h_\nu^{(2)}} a_2 x^{n-2} + \ldots + p^{h_\mu^{(n-1)}} q^{h_\nu^{(n-1)}} a_{n-1} x + p^\nu q^\mu a_n = 0,$$

dans laquelle μ et ν désignent deux nombres premiers relatifs quelconques dont le produit soit égal à n, où p et q désignent deux nombres premiers quelconques inégaux, où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ désignent des nombres entiers quelconques dont le premier et le dernier a_0 et a_n ne sont divisibles ni par p, ni par q et où enfin, pour $\rho = 1, 2, \ldots, n-1$, on a désigné par $h_\mu^{(\rho)}$ le plus grand entier contenu dans le nombre $\frac{\rho - 1}{\mu}$, augmenté de deux ou de une unité suivant que ρ est ou n'est pas divisible par μ, et de même par $h_\nu^{(\rho)}$ le plus grand entier contenu dans le nombre $\frac{\rho - 1}{\nu}$, augmenté de deux ou de une unité suivant que ρ est ou n'est pas divisible par ν.

Schwarz (H.-A.). — Sur la représentation analytique des fonctions elliptiques au moyen d'un nombre illimité de fonctions rationnelles d'une exponentielle. (1187-1197).

1. Dans la Note sur les fonctions elliptiques que M. Hermite a publiée dans la sixième édition du *Traité élémentaire de Calcul différentiel et intégral* de Lacroix, se trouvent deux modes de représentation analytique particulièrement simples des fonctions doublement périodiques, au moyen de fonctions simplement périodiques; dans l'un, les fonctions doublement périodiques $f(u)$ à périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$, sont représentées par un produit infini de la forme

$$f(u) = \prod_{(\mu)} \Phi(u + 2\mu\omega_3), \qquad (\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \infty);$$

dans l'autre, elles sont représentées par une série de la forme

$$f(u) = \sum_{(\mu)} \Psi(u + 2\mu\omega_1), \qquad (\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty),$$

où $\Phi(u)$, $\Psi(u)$ désignent des fonctions analytiques simplement périodiques de u admettant la période $2\omega_1$.

M. Schwarz recherche comment il faut choisir une fonction *rationnelle* $F(x)$ de l'argument

$$x = e^{\frac{i\pi u}{\omega_1}},$$

pour que l'on puisse prendre cette fonction $F(x)$, envisagée comme une fonction de u, soit pour la fonction $\Phi(u)$, soit pour la fonction $\Psi(u)$ du théorème de M. Hermite.

2. Il démontre que l'on peut représenter, à une constante multiplicative près, d'une infinité de manières, au moyen de fonctions *rationnelles* $F_1(x)$ de la variable x, chaque fonction doublement périodique $f(u)$ de la variable u, par le produit infini de M. Hermite dans lequel on suppose $\Phi(u)$ remplacée par $F_1(x)$.

Si $2\omega_1$, $2\omega_3$ forment un couple de périodes primitives de $f(u)$, on aura, en désignant par C_1 une constante, et par q la quantité $e^{\frac{i\pi\omega_3}{\omega_1}}$ de Jacobi,

$$f(u) = C_1 \prod_n F_1\left(e^{\frac{u\pi i}{\omega_1}} q^{2n}\right), \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty),$$

si l'on prend pour $F_1(x)$ une quelconque des fonctions rationnelles de x définies par l'égalité

$$F_1(x) = \frac{\left(x - e^{\frac{i\pi b_1}{\omega_1}}\right)\left(x - e^{\frac{i\pi b_2}{\omega_1}}\right)\cdots\left(x - e^{\frac{i\pi b_\nu}{\omega_1}}\right)}{\left(x - e^{\frac{i\pi a_1}{\omega_1}}\right)\left(x - e^{\frac{i\pi a_2}{\omega_1}}\right)\cdots\left(x - e^{\frac{i\pi a_\nu}{\omega_1}}\right)},$$

dans laquelle a_1, a_2, ..., a_ν désignent un quelconque des systèmes comportant un représentant et un seul de chaque pôle de la fonction doublement périodique $f(u)$, d'ordre ν, envisagée, et b_1, b_2, ..., b_ν un quelconque des systèmes comportant un représentant et un seul de chaque zéro de cette même fonction doublement périodique $f(u)$.

On sait que $b_1 + b_2 + \ldots + b_\nu$ est congrue, modulis $2\omega_1$, $2\omega_3$, à $a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu$; si l'on choisit les représentants des zéros et des pôles de façon que l'on ait

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu = b_1 + b_2 + \ldots + b_\nu,$$

et si C désigne la constante multiplicative qui figure alors dans l'expression bien connue

$$f(u) = C \frac{\sigma(u - b_1)\sigma(u - b_2)\ldots\sigma(u - b_\nu)}{\sigma(u - a_1)\sigma(u - a_2)\ldots\sigma(u - a_\nu)}$$

de la fonction doublement périodique $\varphi(u)$, on a

$$C_1 = C e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}\left[b_1^2+b_2^2+\ldots+b_\nu^2-a_1^2-a_2^2-\ldots-a_\nu\right]}.$$

3. M. Schwarz démontre aussi que l'on peut représenter, à une constante additive près, d'une infinité de manières, au moyen de fonctions *rationnelles* $F_0(x)$ de la variable x, chaque fonction doublement périodique $f(u)$ de la variable u, par la série de M. Hermite dans laquelle on suppose $\Psi(u)$ remplacée par $F_0(x)$.

Si $2\omega_1$, $2\omega_3$ forment un couple de périodes primitives de $\varphi(u)$, on aura, en désignant par C_0 une constante, et par q la quantité $e^{\frac{i\pi\omega_3}{\omega_1}}$ de Jacobi,

$$f(u) = C_0 + \sum_n F_0\left(e^{\frac{u\pi i}{\omega_1}} q^{2n}\right), \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty),$$

si l'on prend pour $F_0(x)$ une quelconque des fonctions rationnelles de x, définies par l'égalité

$$F_0(x) = \frac{\pi i}{2\omega_1}\left[\sum_{m=1}^{m=\nu} A^{(m)} \frac{x + e^{\frac{i\pi a_m}{\omega_1}}}{x - e^{\frac{i\pi a_m}{\omega_1}}} + \sum_{m=1}^{m=\nu}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\alpha_m-1} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\frac{d^\lambda}{du^\lambda}\left(\frac{x + e^{\frac{i\pi a_m}{\omega_1}}}{x - e^{\frac{i\pi a_m}{\omega_1}}}\right)\right],$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ désignent encore un quelconque des systèmes comportant un représentant et un seul de chaque pôle de la fonction doublement périodique $f(u)$, d'ordre ν, envisagée, et où les constantes $A^{(m)}$, $A_\lambda^{(m)}$ sont celles que l'on obtient en développant $f(u)$ aux environs du pôle a_m par la formule

$$f(a_m+h) = A^{(m)}\frac{1}{h} + A^{(m)}_1 D\frac{1}{h} + A_2^{(m)} D^{(2)}\frac{1}{h} + \ldots + A^{(m)}_{\alpha_m-1} D^{(\alpha_m-1)}\frac{1}{h} + P(h),$$

où $P(h)$ désigne une série entière en h, et où $D, D^{(2)}, \ldots, D^{(\alpha_m-1)}$ sont des symboles de dérivation par rapport à h.

Rappelons que la somme des résidus relatifs aux pôles $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ est nulle, en d'autres termes que l'on a

$$A^{(1)} + A^{(2)} + \ldots + A^{(\nu)} = 0;$$

l'ordre de $f(u)$ étant égal à ν, on a aussi

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu = \nu.$$

En désignant par C la constante additive qui figure dans la formule de décomposition de $f(u)$ en éléments simples on a

$$C_0 = C - \frac{\eta_1}{\omega_1}\sum_{m=1}^{m=\nu}\left[A^{(m)} a_m + A_1^{(m)}\right].$$

4. Il est particulièrement intéressant de rechercher directement sous quelles

conditions le produit infini et la série de M. Hermite dans lesquels on remplace $\Phi(u)$, $\Psi(u)$ par une fonction rationnelle quelconque de $x = e^{\frac{i\pi u}{\omega_1}}$ sont absolument et uniformément convergents. M. Schwarz démontre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'on ait

$$F_1(x) = F_1(0) = 1,$$
$$F_0(x) = F_0(0) = 0,$$

qu'aucune des valeurs pour lesquelles l'un des facteurs du produit infini devient infiniment grand ne coïncide avec une des valeurs pour lesquelles quelque autre facteur de ce produit infini devient infiniment petit, et qu'aucune des valeurs pour lesquelles un des termes de la série devient infiniment grand ne coïncide avec une des valeurs pour lesquelles quelque autre terme de cette série devient infiniment grand.

Dans les expressions de $f(u)$ que nous avons écrites aux nos 3 et 4, les deux dernières conditions sont vérifiées par suite de l'incongruité, modulis $2\omega_1$, $2\omega_3$, des pôles $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ et des zéros $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$ de $f(u)$, soit entre eux, soit les uns avec les autres. M. Schwarz montre que la condition

$$F_0(x) = F_0(0) = 0$$

est vérifiée ; la condition

$$F_1(x) = F_1(0) = 1,$$

est d'ailleurs manifestement vérifiée, comme on le voit sur la définition de $F_1(x)$, en tenant compte, pour $F_1(0)$, de la relation

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu = b_1 + b_2 + \ldots + b_\nu.$$

Dans une dernière partie de son Mémoire, M. Schwarz démontre directement, sans s'appuyer sur les propriétés dont jouissent les fonctions doublement périodiques, que chacune des deux relations

$$F_0(x) = F_0(0), \qquad F_1(x) = F_1(0),$$

est entièrement équivalente à la relation

$$A^{(1)} + A^{(2)} + \ldots + A^{(\nu)} = 0,$$

qui exprime que la somme des résidus de la fonction doublement périodique $f(u)$ correspondant aux pôles $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ de cette fonction est nulle.

Schwarz (*H.-A.*). — Sur la théorie des surfaces minima limitées par des segments de droites. (1237-1266).

Dans son Mémoire sur les surfaces minima limitées par des polygones gauches donnés (*Monatsberichte de l'Académie de Berlin*, p. 612 ; 1866) et dans la Note qui lui fait suite (*loc. cit.*, p. 855), Weierstrass a établi quelques propriétés fondamentales concernant les fonctions dont dépend la détermination analytique de ces surfaces. M. Schwarz reprend ces recherches, mais en se plaçant au point de vue de la Communication qu'il a faite *Sur la détermination d'une surface minima particulière*, en 1867, à l'Académie de Berlin. Il parvient ainsi, par une nouvelle voie, au théorème fondamental de Weierstrass que

nous allons rappeler dans un instant, et il montre, d'autre part, qu'une des propositions énoncées par Riemann dans son Mémoire posthume sur les surfaces minima (*Mémoires de la Société royale des Sciences de Göttingue*, t. XIII), proposition que nous rappellerons aussi un peu plus loin, est inexacte.

M. Schwarz démontre d'abord que toute droite située sur une partie de surface minima est axe de symétrie de la surface minima obtenue par continuation analytique de cette partie de surface minima. En s'appuyant sur ce théorème, il montre comment on peut se représenter la continuation d'une partie (M) de surface minima, limitée par deux segments de droite OA, OB et l'arc de courbe AB intercepté sur la surface minima par la surface d'une sphère de centre O et de rayon suffisamment petit.

Fixons un trièdre trirectangle OXYZ de la manière suivante : OX suivant OA prolongé; OY perpendiculaire à OX dans le plan déterminé par les deux segments OA et OB dans un sens tel que la seconde coordonnée y du point B soit négative; OZ perpendiculaire au plan OXY dans un sens tel qu'un observateur traversé des pieds à la tête par OZ et regardant OX voit OY à sa *gauche*.

Si l'on envisage, dans le plan de la variable imaginaire u, le demi-cercle (E) *image* de (M) obtenue par représentation conforme, dont le centre $u = 0$ soit l'image du point de rencontre O des deux segments OA et OB, et qui est limité par le diamètre A'OB' situé sur l'axe des quantités réelles et joignant les images des points A et B, les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de (M) rapporté au trièdre OXYZ seront représentées par les parties réelles de trois fonctions de u

$$f(u),\quad g(u),\quad h(u),$$

définies pour les valeurs de u comprises dans l'intérieur du demi-cercle (E).

A la continuation de la partie de surface minima (M) correspond la continuation de son image (E), et l'on peut ainsi obtenir la continuation analytique des trois fonctions $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$ aux environs du point singulier $u = 0$.

Soit $\alpha\pi$, où $0 < \alpha < 1$, la mesure de l'angle que font les deux segments OA et OB. Aux environs du point singulier $u = 0$, on obtient pour $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$, en laissant de côté des constantes additives ayant des valeurs purement imaginaires, des développements de la forme

$$\begin{aligned}
f(u) &= \quad u^{2-\alpha}[f_0 + f_1 u + f_2 u^2 + \ldots] + u^{\alpha}\,[g_0 + g_1 u + g_2 u^2 + \ldots],\\
g(u) &= -iu^{2-\alpha}[f_0 + f_1 u + f_2 u^2 + \ldots] + iu^{\alpha}[g_0 + g_1 u + g_2 u^2 + \ldots],\\
h(u) &= \qquad iu[h_0 + h_1 u + h_2 u^2 + \ldots],
\end{aligned}$$

dans lesquels $f_0, f_1, f_2, \ldots, g_0, g_1, g_2, \ldots, h_0, h_1, h_2, \ldots$ désignent des constantes réelles; ces fonctions $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$ sont d'ailleurs liées par la relation identique en u,

$$\left(\frac{d\,f(u)}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\,g(u)}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\,h(u)}{du}\right)^2 = 0,$$

de sorte que les constantes réelles $f_0, f_1, f_2, \ldots, g_0, g_1, g_2, \ldots, h_0, h_1, h_2, \ldots$ ne sont pas indépendantes.

2. Si, dans les développements précédents de $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$, on entend par $u^{2-\alpha}$, u^{α} les *déterminations principales* de ces puissances de u, les par-

ties réelles de ces développements représenteront, pour des valeurs suffisamment petites de $|u|$, les coordonnées x, y, z des points d'une partie (M) de surface minima, limitée en partie par les deux segments OA et OB se rencontrant au point O dont le point $u=0$ est l'image, et faisant entre eux un angle mesuré par le nombre $\alpha\pi$ où $0<\alpha<1$. La condition nécessaire et suffisante qui doit être vérifiée pour qu'il soit possible d'assigner un nombre positif N, tel qu'il n'y ait pas, parmi les points u dont les affixes sont plus petites que N en valeur absolue, deux points différents images du même point x, y, z de (M), est que l'on n'ait pas à la fois

$$f_0=0, \qquad g_0=0.$$

On obtient d'ailleurs des parties de surfaces minima de formes différentes suivant que ni f_0 ni g_0 ne sont nuls, ou que f_0 est nul sans que g_0 ne soit nul, ou enfin que g_0 soit nul sans que f_0 ne soit nul.

Dans le premier cas $[f_0\neq 0,\ g_0\neq 0]$, la partie de surface minima qui est située aux environs du point O est tout entière du même côté du plan déterminé par les deux segments OA et OB. On est toujours dans ce premier cas lorsque la ligne donnée L, qui doit limiter la partie de surface minima, contient deux segments de droite concourants, et qu'elle est située tout entière du même côté du plan déterminé par ces deux segments concourants : donc, par exemple, lorsque L est un quadrilatère gauche quelconque.

Dans le second cas $[f_0=0,\ g_0\neq 0]$, il est possible de mener un plan par le sommet O de façon que la partie de surface minima située aux environs de O soit située tout entière d'un même côté de ce plan. Le plan déterminé par les deux segments OA et OB divise la partie de surface minima située aux environs du sommet O en autant de secteurs que l'indique l'exposant de u dans le premier terme différent de zéro du développement de la fonction $h(u)$ en série entière en u.

Dans le troisième cas, $[f_0\neq 0, g_0=0]$, tout plan mené par le sommet O coupe la partie de surface minima située aux environs de ce sommet O. Le plan déterminé par les deux segments OA et OB divise encore la partie de surface minima située aux environs du sommet O en $\mu+1$ secteurs, si le premier terme du développement de $h(u)$ en série entière en u est $ih_\mu u^{\mu+1}$, où $h_\mu\neq 0$; ici $\mu+1$ est toujours $\geqq 2$.

3. A cause de la relation $\left[\frac{df(u)}{du}\right]^2+\left[\frac{dg(u)}{du}\right]^2+\left[\frac{dh(u)}{du}\right]^2=0$ qui lie les trois fonctions $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$, on peut définir deux fonctions $G(u)$ et $H(u)$ par les relations

$$\frac{df(u)}{du}=G^2(u)-H^2(u),$$

$$\frac{dg(u)}{du}=iG^2(u)+iH^2(u),$$

$$\frac{dh(u)}{du}=2G(u)H(u);$$

si l'on désigne par s la fonction

$$s=\frac{H(u)}{G(u)},$$

et si l'on pose

$$\Phi(u) = i\,G^2(u)\,\frac{ds}{du},$$

$$F(u) = \frac{d^2 \log\left(\dfrac{ds}{du}\right)}{du^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d \log \dfrac{ds}{du}}{du}\right)^2,$$

on définit deux nouvelles fonctions de la variable u qui jouissent de propriétés remarquables.

M. Schwarz montre d'abord qu'elles ne dépendent aucunement du choix du trièdre OXYZ auquel on a rapporté la partie (M) de surface minima envisagée; elles ont des valeurs réelles pour des valeurs réelles de la variable u; aux environs du point $u = 0$, elles ont *le caractère* de fonctions rationnelles de u; si l'on pose

$$w = \int \sqrt{\Phi(u)}\,du,$$

on définit une variable imaginaire w dans le plan de laquelle l'image des lignes de courbure de la surface minima, obtenue par représentation conforme, est formée par deux systèmes de droites orthogonales et où, par suite, l'image de toute courbe tracée sur la surface minima et coupant les lignes de courbure de cette surface minima sous un angle constant, comme c'est le cas pour les lignes asymptotiques, par exemple, est aussi une ligne droite. Cette remarque s'applique en particulier aux segments du contour donné L de la surface minima.

Les développements de s, de $\Phi(u)$ et de $F(u)$ sont différents suivant les trois cas que nous avons été amenés à distinguer au n° 2.

Dans le premier cas ($f_0 \neq 0$, $g_0 \neq 0$), on a

$$s = \frac{i\,h_0}{2\alpha g_0}\,u^{1-\alpha} + \ldots,$$

$$\Phi(u) = -\frac{1}{2}(1-\alpha)\,h_0\,\frac{1}{u} + \ldots,$$

$$F(u) = \left[\frac{1}{2} - \frac{(1-\alpha)^2}{2}\right]\frac{1}{u^2} + \ldots.$$

Dans le second cas ($f_0 = 0$, $g_0 \neq 0$), on a

$$s = \frac{i(\mu+1)\,h_\mu}{2\alpha g_0}\,u^{\mu+1-\alpha} + \ldots,$$

$$\Phi(u) = -\frac{1}{2}(\mu+1)(\mu-1-\alpha)\,h_\mu\,u^{\mu-1} + \ldots,$$

$$F(u) = \left[\frac{1}{2} - \frac{(1-\alpha)^2}{2}\right]\frac{1}{u^2} + \ldots.$$

Dans le troisième cas ($f_0 \neq 0$, $g_0 = 0$), on a

$$s = \frac{i(\mu+1)\,h_\mu}{2(2\mu+\alpha)\,g_{2\mu}}\,u^{-(\mu-1+\alpha)} + \ldots,$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}(\mu+1)(\mu-1+\alpha)\,h_\mu\,u^{\mu-1} + \ldots.$$

$$F(u) = -\left[\frac{(\mu-1+\alpha)^2}{2} - \frac{1}{2}\right]\frac{1}{u^2} + \ldots.$$

4. Après avoir établi ces propositions générales, M. Schwarz aborde le problème de la *détermination des fonctions* $\Phi(u)$ *et* $F(u)$ *pour une partie simplement connexe* (M) *d'une surface minima, limitée par une ligne brisée donnée* L *dont le nombre* n *de côtés est au moins égal à* 4.

Soit (E) l'image de (M) obtenue par représentation conforme sur le demi-plan de la variable imaginaire u, limité par l'axe des quantités réelles et situé du côté de cet axe où est le point $+i$; les images c_1c_2, c_2c_3, ..., $c_{n-1}c_n$ des segments O_1O_2, O_2O_3, ..., $O_{n-1}O_n$ qui forment les côtés de la ligne brisée L sont alors situées sur l'axe des quantités réelles, et les abscisses des points c_1, c_2, ..., c_n croissent avec l'indice de ces points.

M. Schwarz démontre que *la fonction* $\Phi(u)$, *dont la définition peut être étendue à toutes les valeurs de* u, *est une fonction rationnelle de* u *de la forme*

$$\Phi(u) = \frac{T(u)}{(u-c_1)(u-c_2)\dots(u-c_n)},$$

où $T(u)$ est un polynome en u dont le degré est en général égal à $n-4$, mais peut être plus petit dans des cas particuliers. Les coefficients du polynome $T(u)$ sont des nombres réels; les zéros de ce polynome sont donc des nombres réels ou imaginaires conjugués. Riemann a désigné par a une quelconque des racines imaginaires pour lesquelles le coefficient de i est positif, par a' sa conjuguée, par b une quelconque des racines réelles de $T(u)$; en adoptant cette notation, on pourra donc mettre la fonction $\Phi(u)$, sous la forme

$$\Phi(u) = C_0 \frac{\Pi(u-a)\,\Pi(u-a')\,\Pi(u-b)}{(u-c_1)(u-c_2)\dots(u-c_n)},$$

où les produits sont étendus aux $(n-4)$ racines a, a', b de $T(u)$, et où C_0 désigne une constante.

En général, les nombres b sont différents de chacun des nombres c_1, c_2, ..., c_n; mais, dans des cas particuliers, il peut arriver que la fraction qui représente $\Phi(u)$ se simplifie; la surface minima (M) correspondante admet alors au sommet O_ν, dont l'image est le point à affixe c_ν ne figurant plus au dénominateur de $\Phi(u)$, une singularité plus grande que dans le cas général.

M. Schwarz démontre ensuite que *la fonction* $F(u)$, dont la définition peut également être étendue à toutes les valeurs de u, est, elle aussi, une *fonction rationnelle de* u. Si l'on se place dans le cas général où tous les facteurs linéaires de $T(u)$ sont inégaux et où aucun d'eux n'est égal à l'un des facteurs $u-c_\nu$ du dénominateur de $\Phi(u)$, on a pour $F(u)$ une expression de la forme

$$\begin{aligned} F(u) = &-\frac{3}{2}\sum\left[\frac{1}{(u-a)^2}+\frac{1}{(u-a')^2}\right]+\sum\left(\frac{A}{u-a}+\frac{A'}{u-a'}\right) \\ &-\frac{3}{2}\sum\frac{1}{(u-b)^2}+\sum\frac{B}{u-b}-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1-(1-\alpha_\nu)^2}{(u-c_\nu)^2}+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{C_\nu}{u-c_\nu}, \end{aligned}$$

où les deux premières sommes sont étendues à toutes les paires a, a' de racines imaginaires conjuguées de $T(u)$, tandis que les deux sommes suivantes sont étendues à toutes les racines réelles b de $T(u)$; les A et les A′ sont des constantes imaginaires conjuguées, les B sont des constantes réelles, les C_ν des constantes réelles, correspondant respectivement aux racines a, a', b, c_ν du nu-

mérateur et du dénominateur de $\Phi(u)$; ces constantes sont en général inégales; enfin $\alpha_\nu \pi$, où $0 < \alpha_\nu < 1$, est la mesure de l'angle que font entre eux les deux segments du polygone gauche L qui se rencontrent en O_ν.

Dans l'équation différentielle du n° 3, concernant le problème actuel,

$$\mathrm{F}(u) = \frac{d^2 \log\left(\frac{ds}{du}\right)}{du^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{d \log\left(\frac{ds}{du}\right)}{du}\right]^2,$$

figurent donc $5n - 8$ constantes, à savoir les n constantes α_ν, les $2n - 4$ constantes a, a', b, c_ν, enfin les $2n - 4$ constantes A, A', B, C_ν. Mais ces $5n - 8$ constantes ne peuvent être choisies arbitrairement; elles ne dépendent dans le problème actuel que de $3n - 7$ paramètres, comme le montre M. Schwarz. Comme on peut adjoindre à ces $3n - 7$ paramètres 7 constantes arbitraires, la solution du problème actuel contiendra $3n$ constantes arbitraires, c'est-à-dire précisément le même nombre de constantes arbitraires que celui par lequel le polygone gauche L donné est déterminé. Le problème est résolu quand on connaît s en fonction de u, car la relation (n° 3) $\Phi(u) = i\mathrm{G}^2(u)\frac{ds}{du}$ permet alors de déterminer $\mathrm{G}(u)$, puis $\mathrm{H}(u) = s\mathrm{G}(u)$; enfin, connaissant $\mathrm{G}(u)$ et $\mathrm{H}(u)$, les trois premières relations du n° 3 donnent $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$.

Il resterait à démontrer que, dans chacun des cas qui peuvent se présenter, on peut satisfaire, au moins d'une manière, à toutes les conditions du problème.

5. On démontre que l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(\gamma) \qquad \mathrm{F}(u) = \frac{d^2 \log\left(\frac{ds}{du}\right)}{du^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{d \log\left(\frac{ds}{du}\right)}{du}\right]^2$$

est une fonction linéaire rationnelle d'une quelconque des intégrales particulières de cette équation différentielle. On s'assure aussi que le quotient de deux solutions χ_1 et χ_2, linéairement indépendantes de l'équation différentielle homogène linéaire du second ordre

$$(\delta) \qquad \frac{d^2\mathrm{X}}{du^2} + \mathrm{P}(u)\frac{d\mathrm{X}}{du} + \mathrm{Q}(u)\chi = 0,$$

dans laquelle $\mathrm{P}(u)$ et $\mathrm{Q}(u)$ désignent des fonctions quelconques de u, vérifie nécessairement l'équation

$$\frac{d^2 \log\left(\frac{ds}{du}\right)}{du^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{d \log\left(\frac{ds}{du}\right)}{du}\right]^2 = 2\mathrm{Q}(u) - \frac{1}{2}\mathrm{P}^2(u) - \frac{d\,\mathrm{P}(u)}{du}.$$

Pourvu donc que l'on choisisse $\mathrm{P}(u)$ et $\mathrm{Q}(u)$ de façon que l'on ait

$$2\mathrm{Q}(u) - \frac{1}{2}\mathrm{P}^2(u) - \frac{d\,\mathrm{P}(u)}{du} = \mathrm{F}(u),$$

ce qui est possible d'une infinité de manières, et l'on pourra exprimer l'intégrale générale de l'équation différentielle (γ) par une fonction linéaire ration-

nelle homogène de deux intégrales linéairement indépendantes χ_1 et χ_2 de l'équation différentielle (δ).

Si, par exemple, on prend

$$P(u) = 0, \qquad Q(u) = \frac{1}{2} F(u),$$

on aura

$$\chi_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{ds}{du}}}, \qquad \chi_2 = \frac{s}{\sqrt{\frac{ds}{du}}}.$$

Si l'on prend pour $P(u)$ et $Q(u)$ les fonctions rationnelles de u définies par les égalités

$$P(u) = -\frac{d\log\Phi(u)}{du}, \qquad Q(u) = \frac{1}{2}\left\{F(u) - \frac{d^2\log\Phi(u)}{du^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{d\log\Phi(u)}{du}\right]^2\right\},$$

on aura

$$\chi_1 = G(u), \qquad \chi_2 = H(u).$$

On a ainsi une nouvelle démonstration de la proposition fondamentale concernant les fonctions $G(u)$, $H(u)$, découverte par Weierstrass (*Monatsberichte* de l'Académie de Berlin, p. 856; 1866), d'après laquelle *ces deux fonctions, dont la détermination est identique à celle de la surface minima cherchée, vérifient une seule et même équation différentielle linéaire du second ordre dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de u.*

6. Si v désigne une fonction de u telle que l'on ait

$$\frac{dv}{du} = \frac{\Pi(u-a)\,\Pi(u-a')\,\Pi(u-b)}{(u-c_1)(u-c_2)\ldots(u-c_n)},$$

les fonctions

$$k_1 = \sqrt{\frac{du}{ds}}\sqrt{\frac{dv}{ds}}, \qquad k_2 = s\sqrt{\frac{du}{ds}}\sqrt{\frac{dv}{ds}},$$

envisagées par Riemann dans le § 14 de son Mémoire posthume cité en commençant, sont des intégrales χ_1, χ_2 de la même équation linéaire du second ordre (δ), si l'on y prend pour $P(u)$ et $Q(u)$ les fonctions

$$P(u) = -\frac{d\log\frac{dv}{du}}{du}, \qquad Q(u) = -\frac{1}{k_i}\frac{d^2k_i}{dv^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 \qquad (i = 1, 2).$$

Le quotient $\frac{k_2}{k_1}$ étant égal à s vérifie l'équation différentielle (γ); on a donc, entre ces diverses expressions et celle de $F(u)$, la relation

$$F(u) = 2Q(u) - \frac{1}{2}P^2(u) - \frac{dP(u)}{du},$$

d'où

$$Q(u) = \frac{1}{2}\left[F(u) - \frac{d^2\log\frac{dv}{du}}{du^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\log\frac{dv}{du}}{du}\right)^2\right].$$

Comparant ces deux valeurs de $Q(u)$, on voit que *l'expression* $\frac{1}{k_i}\frac{d^2k_i}{dv^2}$ *est en général infinie d'ordre* 3 *aux points* a, a', b.

Ce résultat est contraire à l'affirmation de Riemann. Pour $n = 4$, cette erreur n'influe en rien sur ses résultats; mais pour $n = 5$ et pour $n = 6$, il en résulte que les formules données par Riemann sont inexactes. Ce passage du Mémoire de Riemann a été supprimé dans les réimpressions de ses Œuvres posthumes.

7. M. Schwarz démontre enfin que *si* L *est un quadrilatère gauche, on ne peut déterminer que d'une seule manière* des fonctions analytiques représentant une partie (M) de surface minima limitée par le quadrilatère L et ne contenant à l'intérieur de L aucun point singulier.

J. M.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

3e série, t. XII, 1895 (1).

Borel. — Sur quelques points de la théorie des fonctions. (9-55).

La notion de fonction prolongée analytiquement, obtenue à l'aide de la série de Taylor, a joué un grand rôle en Analyse.

Mais, dans le cas où une fonction admet une ligne singulière essentielle fermée, on ne sait ce que l'on doit appeler *prolongement analytique de la fonction au delà de cette ligne*. M. Poincaré avait même cru pouvoir affirmer que cette expression est nécessairement dénuée de sens.

M. Borel reprend la question à un point de vue un peu différent et il montre qu'il est possible, dans certains cas, de donner du prolongement analytique au delà d'une ligne essentielle fermée une définition qui ne soit contradictoire ni avec elle-même ni avec les notions antérieurement acquises. Il fait voir comment les difficultés signalées par M. Poincaré tiennent à la définition que l'on donne ordinairement de l'uniformité des fonctions.

Dans la seconde Partie de son travail, M. Borel indique comment la considération de certaines fonctions à espace lacunaire signalées par M. Poincaré l'a conduit à un important théorème sur les fonctions d'une variable réelle, qui dans un intervalle donné ont toutes leurs dérivées finies et qui, cependant, ne sont développables en série de Taylor pour aucun point de l'intervalle. Il donne pour ces fonctions une expression analytique (la somme d'une série de puissances et d'une série de Fourier), telle que les expressions analytiques des dérivées de tous les ordres de la fonction s'en déduisent immédiatement par la différentiation des séries terme à terme.

Pour obtenir ce résultat, l'auteur a dû compléter sur quelques points la

---

(1) Voir *Bulletin*, XX_2, p. 278.

théorie d'un système d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Il donne en terminant quelques applications de cette théorie.

Dans la conclusion, il montre comment les deux Parties en apparence assez distinctes de son travail découlent des mêmes idées, et il cherche à faire voir quelle importance ces idées peuvent avoir dans les applications, notamment en Physique mathématique.

M. Borel a rejeté dans une Note la démonstration de quelques propositions qui se rattachent à la théorie des ensembles et à l'approximation des irrationnelles.

Lelieuvre. — Sur les surfaces à génératrices rationnelles. (57-143).

Soit une famille de lignes unicursales G dépendant d'un paramètre u; les coordonnées d'un point de chaque ligne sont des fonctions rationnelles d'un paramètre t. Les lignes G ou $u = \text{const.}$ seront dites *divisées homographiquement* par les lignes $t = \text{const.}$ tracées sur la surface S qu'elles engendrent quand u varie.

M. Lelieuvre s'est proposé la détermination de certaines familles de lignes tracées sur la surface S et définies par une équation différentielle du premier ordre entre u et t de la forme

$$(1) \qquad A_0\left(\frac{dt}{du}\right)^m + A_1\left(\frac{dt}{du}\right)^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$

où les A sont des polynômes entiers en t, à coefficients fonctions de u. Il étudie les *conjuguées* des génératrices G, leurs trajectoires orthogonales, ou encore les lignes minima, asymptotiques ou de courbure de la surface S : l'équation (1) est alors du premier ou du second degré par rapport à $\frac{dt}{du}$.

Le problème proposé se ramène à l'intégration de l'équation (1). Il y a lieu, notamment, de considérer le cas où l'intégrale générale n'a que des points critiques fixes. On doit alors rechercher les conditions que doivent remplir les génératrices G pour que toutes les racines de A_0 appartiennent aux coefficients suivants. Si l'équation (1) est du premier degré en $\frac{dt}{du}$, c'est une équation de Riccati, facile à intégrer quand on en connaît une solution particulière. Si l'équation (1) est du second degré en $\frac{dt}{du}$, d'autres conditions sont nécessaires; les points critiques sont fixes : 1° quand le discriminant est un carré parfait (l'équation se décompose en deux de Riccati); 2° quand il a une racine double et les deux autres solutions singulières; 3° quand il a quatre racines, solutions singulières.

On a signalé, depuis longtemps, des exemples dans lesquels la détermination des familles de lignes énumérées ci-dessus se ramène à l'intégration d'une équation de Riccati (seconde famille d'asymptotiques d'une famille réglée, trajectoires orthogonales d'un système de cercles, conjuguées d'une série de coniques ayant deux enveloppes, etc.).

Dans la première Partie de son Mémoire, M. Lelieuvre indique comment les plus connus de ces résultats pouvaient être prévus presque sans calculs, et il

applique ces considérations préliminaires à l'étude des lignes de courbure des surfaces réglées et des surfaces cerclées.

Dans la seconde Partie, en supposant que l'équation (1) définisse une des familles de lignes énumérées ci-dessus, l'auteur expose une méthode générale pour rechercher les conditions générales d'existence sur la surface S d'un lieu $t = \varphi(u)$ tel que $\varphi(u)$ soit racine commune des coefficients de l'équation (1), ou racine multiple de son discriminant ou solution singulière. Il applique cette méthode à l'équation des conjuguées des génératrices G et à celle des asymptotiques de la surface S qu'elles engendrent.

La troisième Partie est consacrée à l'application des résultats précédents, à la recherche des familles de lignes unicursales planes et de cubiques gauches divisées homographiquement par leurs conjuguées et à l'étude des lignes asymptotiques de la surface S correspondante. Dans le cas où les lignes G sont planes, la transformation de Laplace permet de rapporter immédiatement la surface S aux lignes G et à leurs conjuguées, et son application répétée donne des solutions du même problème, dans le cas où la génératrice G est gauche.

Raffy (*L.*). — Sur les spirales harmoniques. (144-196).

L'objet de ce Mémoire est *la détermination de tous les éléments linéaires harmoniques qui conviennent à des surfaces spirales.*

Au début du Chapitre I, l'auteur indique les premières solutions du problème fournies par le théorème de M. Maurice Lévy : « Tout élément linéaire homogène, de degré autre que — 2, appartient à une infinité de spirales ». Tel est le cas de l'élément linéaire suivant

$$(m) \qquad ds^2 = (au^m - bv^m)(du^2 + dv^2),$$

qui est visiblement harmonique. En faisant croître ou décroître m indéfiniment, on en déduit ces deux autres :

$$(e) \qquad ds^2 = (e^{au} - e^{bv})(du^2 + dv^2),$$

$$(l) \qquad ds^2 = (\log au - \log bv)(du^2 + dv^2),$$

qui conviennent également à des spirales. Ces solutions une fois signalées, le problème est posé dans toute sa généralité. Il s'agit de *trouve toutes les fonctions* T *de* $x+y$ *qui vérifient, conjointement avec deux autres fonctions inconnues* $X(x)$ *et* $Y(y)$, *la relation*

$$(\text{S}) \qquad \begin{cases} 2X(T' + T^2 - 2iT - 1) - 2Y(T' + T^2 + 2iT - 1) \\ \qquad + 3X'(T - i) - 3Y'(T + i) + X'' - Y'' = 0, \end{cases}$$

où les accents désignent des dérivées et i l'unité imaginaire. Il faut en outre distinguer, parmi les éléments linéaires cherchés, ceux qui sont *doublement harmoniques* et ceux qui ne le sont point.

Avant de discuter l'équation (S), l'auteur montre que *pour les spirales simplement harmoniques les fonctions* X *et* Y *sont nécessairement de la forme* $X = Ae^{2rx}$, $Y = Be^{-2ry}$, A, B *et* r *étant trois constantes dont la dernière peut être nulle,* puis il résout l'équation (S), d'abord en réduisant X et Y à des constantes, ce qui donne l'élément linéaire (e), ensuite en prenant pour X

et Y les exponentielles, ce qui conduit aux deux éléments linéaires (m) et (l). Le Chapitre se termine par la recherche des éléments linéaires qui conviennent à la fois à des spirales et à des surfaces de révolution; ils rentrent tous dans le type $(x+y)^m\,dx\,dy$.

Au Chapitre II, M. Raffy traite complètement l'équation (S). Il rencontre d'abord les spirales à courbure totale constante, qui sont forcément des développables, puis les spirales applicables sur les surfaces de révolution. Ces deux cas particuliers une fois écartés, l'équation (S), convenablement différentiée, permet d'exprimer X' et Y' en fonction linéaire de X et Y, et comme ses coefficients ne dépendent que de T et de T', on a

$$(\tau) \qquad X' = T_1 X + T_2 Y, \qquad Y' = T_3 X + T_4 Y,$$

les lettres T_i désignant des fonctions rationnelles de T et de ses quatre premières dérivées. Il suit de là que la fonction T doit satisfaire à deux équations différentielles du cinquième ordre, réductibles, il est vrai, au quatrième, la variable indépendante n'y figurant pas. Mais telle serait la complication de ces équations, que, loin de pouvoir les discuter, on serait presque dans l'impossibilité de les écrire explicitement. C'est pourquoi l'auteur procède d'une tout autre façon. Laissant provisoirement de côté la recherche de T, il considère les T_i comme quatre fonctions inconnues, sans relations entre elles, et démontre que le système (τ) admet deux solutions et deux seulement, qui sont déterminées, à des coefficients arbitraires près. Les expressions de X, Y et des T_i qui forment ces deux solutions, étant substituées dans l'équation (S), la décomposent en deux équations de Riccati, dont la discussion comporte l'examen de cas assez nombreux. La conclusion finale est que *le type* (m), *avec ses formes dégénérées* (e) *et* (l), *comprend tous les éléments linéaires* cherchés, mais qu'il ne les représente pas sous leur forme harmonique la plus générale. L'analyse qui mène à cette conclusion permet de distinguer les éléments linéaires de spirales (au nombre de quatre) qui sont doublement harmoniques.

Riquier. — Sur les notions de limite et de continuité et sur quelques propriétés générales des fonctions continues d'un nombre quelconque de variables. (197-210).

Les définitions de la *limite* et de la *continuité* données jusqu'à présent ne paraissent pas à M. Riquier entièrement satisfaisantes; il indique les améliorations dont elles lui semblent susceptibles.

Ces notions de limite et de continuité se rattachant par un lien immédiat à celle de *quantité*, l'auteur donne sur cette dernière quelques indications sommaires qui permettent de concevoir comment on peut, avec le seul concept de nombre entier et sans faire intervenir la moindre considération relative aux grandeurs concrètes, définir tour à tour les fractions, les quantités négatives et les nombres incommensurables.

Le Roux. — Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. (227-316).

Ce travail a pour objet l'étude de quelques propriétés des fonctions définies

par une équation linéaire et homogène aux dérivées partielles du second ordre (équations de Laplace).

Dans la première Partie, l'auteur établit l'existence d'une infinité d'intégrales particulières dont on peut déduire des solutions plus générales par des quadratures à limites variables, portant sur une fonction arbitraire. Il étudie les développements en série des *intégrales principales* et de quelques-unes des intégrales qui s'en déduisent.

La deuxième Partie est consacrée à l'étude des lieux de points singuliers accidentels, c'est-à-dire des points qui dérivent des données initiales définissant les intégrales et non de la forme particulière des coefficients de l'équation. M. Le Roux définit les *intégrales normales* et démontre qu'elles ne peuvent admettre d'autres courbes singulières accidentelles que des *caractéristiques*. Après avoir étudié la forme des intégrales dans le voisinage des points critiques, il montre comment on peut intégrer l'équation en partant de solutions particulières qui admettent des caractéristiques singulières mobiles.

Dans la troisième Partie, il fait l'application des théories précédentes à quelques équations simples.

Dans tout le cours de son travail, l'auteur s'attache à déduire les différents résultats qu'il obtient d'une méthode générale et uniforme.

Bourlet. — Nouvelle démonstration du théorème de d'Alembert, par M. Weierstrass (Exposition française). (317-335).

Démonstration qui s'appuie exclusivement sur l'emploi des séries entières et donne en même temps un procédé de calcul numérique des racines.

Brioschi. — Sur une classe d'équations du cinquième degré. (337-342).

L'auteur signale une classe étendue d'équations du cinquième degré résolubles algébriquement.

Brioschi. — Sur l'équation du sixième degré. (343-350).

Lerch. — Sur la différentiation d'une classe de séries trigonométriques. (351-361).

Résolution du problème, proposé par M. Hermite, d'obtenir la dérivée de la série de Kummer et des séries trigonométriques analogues, pour lesquelles la règle ordinaire conduit à des séries divergentes.

Vogt. — Sur les tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique et dont les arêtes sont tangentes à une autre quadrique. (363-389).

Pour que deux quadriques soient telles qu'il existe un tétraèdre conjugué par rapport à l'une et dont les arêtes sont tangentes à l'autre, il est nécessaire, comme on sait, que l'invariant Φ de Salmon soit égal à zéro.

Jugeant les démonstrations qu'on a données de ce théorème peu satisfaisantes

à divers égards, M. Vogt reprend la question d'un autre point de vue. Il fait voir que $\Phi = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un tétraèdre au moins jouissant de la propriété énoncée, que ces tétraèdres forment une infinité simple et que le lieu de leurs sommets est une courbe gauche du huitième ordre; les coordonnées des points de cette courbe, ainsi que les éléments des tétraèdres, s'expriment au moyen d'un paramètre variable. L'équation qui existe entre les paramètres relatifs à deux sommets différents d'un même tétraèdre étant de genre deux, on est appelé à les exprimer en fonction quadruplement périodique de deux variables, reliées par une équation particulière.

L'étude des tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique, faite par M. Vogt au moyen des fonctions hyperelliptiques, semble être une généralisation des recherches de Halphen sur les relations biquadratiques entre deux variables et sur les polygones de Poncelet inscrits dans une conique et circonscrits à une autre. Halphen montre qu'une relation biquadratique exprime la relation qui existe entre $f(u)$ et $f(u+u_0)$, où f est une fonction doublement périodique et u_0 une constante. M. Vogt rencontre une relation bicubique qui est la généralisation de celle-là et que l'on peut interpréter d'une manière analogue.

Supplément.

Lacour. — Sur des fonctions d'un point analytique à multiplicateurs exponentiels ou à périodes rationnelles. (3-51).

Dans la première Partie de son travail, l'auteur étudie des fonctions d'un point analytique qui comprennent comme cas particulier les fonctions introduites par M. Appell et qui sont analogues aux fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Les fonctions de M. Appell se comportent comme les puissances de la fonction $\Theta[u^{(i)}(x,y)]$ qu'on obtient en prenant une fonction Θ à p variables et en y remplaçant les variables par les intégrales abéliennes normales de première espèce correspondant à une courbe algébrique de genre p. Si l'on considère la surface de Riemann rendue simplement connexe R_{abc}, ces fonctions admettent le long de chacune des p coupures b un multiplicateur de la forme $e^{-mu^{(i)}(x,y)}$, m désignant un nombre entier et $u^{(i)}(x,y)$ l'intégrale normale de première espèce correspondant à la courbure traversée.

Dans les fonctions plus générales envisagées par M. Lacour, à chacune des $2p$ coupures correspond un multiplicateur exponentiel, et l'exposant, au lieu de contenir une seule intégrale de première espèce, est une fonction linéaire de ces p intégrales.

Les coefficients de ces fonctions linéaires ne peuvent être pris arbitrairement; si l'on a ramené à l'unité les multiplicateurs relatifs aux coupures a, dans chacune des p fonctions linéaires restantes l'un des coefficients doit être un nombre entier. Ce sont ces entiers qui interviennent dans la recherche de l'excès du nombre des zéros sur celui des pôles de la fonction.

En étudiant la manière dont la fonction se comporte à l'égard des intégrales abéliennes attachées à la surface, l'auteur obtient une suite de propositions qui relient entre eux les théorèmes d'Abel sur les zéros et les infinis des fonctions algébriques, les théorèmes similaires de M. Appell sur les fonctions à

multiplicateurs et, d'autre part, le théorème de Riemann sur les zéros d'une fonction $\Theta[u^{(i)}(x, y) - G_i]$, dans laquelle figurent p constantes arbitraires G_i.

Dans la seconde Partie, M. Lacour étudie des fonctions qui comprennent comme cas particulier les dérivées logarithmiques des précédentes et qui, elles-mêmes, se rattachent à des fonctions très générales introduites dans la Science par M. Picard. Les nouvelles fonctions considérées par M. Lacour reçoivent, quand la variable traverse une des coupures a ou b, un accroissement qui dépend du point de passage et qui est exprimé par une fonction rationnelle du point analytique correspondant.

L'auteur montre d'abord qu'on peut supposer nulles les périodes relatives aux coupures a. En supposant que la fonction n'admet d'autres points singuliers que des pôles, on trouve entre ces pôles et les résidus p relations qui, dans certains cas particuliers, peuvent se réduire à des identités.

M. Lacour obtient ensuite une relation qui donne l'expression de la fonction quand on connaît les pôles avec les résidus correspondants et les périodes. Dans cette expression se présentent des intégrales définies contenant la variable sous le signe somme et admettant comme ligne de discontinuité une des coupures b.

Mais existe-t-il une fonction jouissant des propriétés énoncées, quand on se donne à l'avance les fonctions rationnelles d'un point analytique qui doivent servir de périodes, les pôles et les résidus correspondants, pourvu que les p relations entre les pôles et les résidus soient vérifiées par les données? La formule qui donne la solution de cette question se réduit, dans le cas où les périodes deviennent nulles, à la formule de Riemann-Roch. On peut encore composer avec des intégrales abéliennes et des fonctions rationnelles une fonction répondant à la question.

Dans la troisième et dernière Partie, M. Lacour vérifie que les fonctions considérées en dernier lieu satisfont à une équation différentielle linéaire avec second membre, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles d'un point analytique.

Delassus. — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles à caractéristiques réelles. (52-123).

Étant donnée une équation linéaire aux dérivées partielles à coefficients analytiques (réels), le problème de l'intégration pourra être considéré comme presque résolu si, sans former l'intégrale correspondant à des conditions analytiques données, on peut dire dans quel domaine elle sera analytique. La recherche de ce domaine est identique à celui des lignes singulières essentielles de l'intégrale.

M. Delassus s'est proposé de déterminer la nature de ces lignes singulières, et les résultats généraux auxquels il est parvenu permettent, dans certains cas particuliers, de déterminer ces lignes elles-mêmes.

Tout d'abord se présente la séparation des équations linéaires en deux groupes, suivant que les caractéristiques sont ou ne sont pas toutes réelles, une même équation pouvant appartenir aux deux groupes dans des portions distinctes du plan des xy.

Les intégrales analytiques des équations du second groupe (ex. l'équation de Laplace $\Delta V = 0$) peuvent avoir des lignes singulières absolument quelconques.

L'objet principal du Mémoire de M. Delassus est l'étude des équations du second groupe $\left(\text{ex. } \frac{d^{p+q} z}{dx^p\, dy^q} = 0\right)$.

Les recherches de l'auteur l'ont conduit, pour ces équations, à la notion caractéristique du *domaine d'un arc*.

Soit σ un arc analytique régulier : on peut lui faire correspondre un domaine ρ l'entourant complètement et jouissant de cette propriété que, quelles que soient les fonctions analytiques initiales sur tout l'arc σ, l'intégrale correspondante est analytique dans tout le domaine ρ. Cette région ρ est le domaine de l'arc σ. De là résulte ce théorème fondamental : « Les lignes singulières essentielles des intégrales analytiques des équations du premier groupe ne peuvent être que certaines lignes fixes ou des caractéristiques ».

L'auteur montre qu'il existe des équations à un nombre quelconque de variables qui peuvent être considérées comme généralisant les équations à deux variables à caractéristiques réelles et auxquelles s'étendent les propriétés fondamentales qui viennent d'être énoncées.

Il étend ensuite à toute une classe d'équations d'ordre quelconque et à caractéristiques réelles la méthode de Riemann exposée par M. Darboux dans sa *Théorie des surfaces* (II[e] Partie, Chap. IV). En appliquant la méthode des approximations successives due à M. Picard, M. Delassus parvient à retrouver tous les résultats obtenus pour le second ordre et, en particulier, l'intégration simultanée de l'équation et de son adjointe au moyen d'une seule fonction de quatre variables.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO. In-8°. Torino, E. Lœscher.

Tome XXIII, 1887-88 (¹).

Basso (*G.*). — [V9] En commémoration de G.-R. Kirchhoff. (2-4).

Zanotti Bianco (*O.*). — [H5gα] Quelques théorèmes sur les coefficients de Legendre. (5-25).

Détermination de la valeur des intégrales

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\, \mathrm{P}_n(x)\, dx,$$

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\, x^r\, \mathrm{P}_n(x)\, dx,$$

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\, \mathrm{P}_n(x)\, \mathrm{P}_p(x)\ldots dx.$$

(¹) Voir *Bulletin*, XIII₂, p. 179.

Jadanza (*N.*). — [U10] Sur le calcul des azimuts au moyen des coordonnées rectilignes. (89-106).

Porro (*F.*). — [U] Sur l'éclipse totale de Lune du 28 janvier 1888. (262-265).

Jadanza (*N.*). — [U10, T3] Sur le déplacement de la lentille anallactique et sur la verticalité de la stadia. (294-302).

Ovazza (*E.*). — [R1*e*] Sur le calcul des déformations des systèmes articulés. (384-401, 1 pl.).

Morera (*G.*). — [T2*c*] Sur le problème de la corde vibrante. (402-417).

Les formules finales ne sont pas modifiées dans le cas où la corde vibrante a des sommets. Comme application de la série de Bernoulli, l'auteur démontre aussi que la force vive d'une corde vibrant transversalement est à chaque instant la somme des forces vives dues aux vibrations simples composantes.

Siacci (*F.*). — [U10] Sur la compensation des polygonales servant de base aux relèvements topographiques. (430-432, 1 pl.).

Pizzetti (*P.*). — [U10] Les azimuts réciproques d'un arc de géodésique (433-448).

Jadanza (*N.*). — [T3*a*] Une nouvelle forme de lunette. (570-573).

Ovazza (*E.*). — [T2*a*] Sur le calcul des flèches élastiques des poutres réticulaires. (625-636, 1 pl.).

Tome XXIV; 1888-89.

Basso (*G.*). — [V9] En commémoration de R. Clausius. (3-4).

Castelnuovo (*G.*). — [$M^1$2] Géométrie sur les courbes elliptiques. (4-22).

Étude des involutions rationnelles, des involutions elliptiques et de quelques séries non involutives sur une courbe elliptique.

Porro (*F.*). — [U] Éphémérides du Soleil et de la Lune pour l'horizon de Turin et pour l'année 1889. (36-57).

D'Ovidio (*E.*). — [B7*d*] Le covariant steinérien d'une forme binaire du 6e ordre. (164-176).

Calcul du steinérien S qui est donné par

$$3^3 S = -3^2 5^3 \Delta^2 - 2.3^2.5^2 A k \Delta - 3^2.5 A^2 k^2$$
$$- (2^3.3 A^2 + 2^4.3^2 B) fl + 2^3 A^3 H + 2^4.3^2 A fm + 2^6.3^2 fn.$$

Jadanza (*N.*). — [U10] Sur la mesure directe et indirecte des côtés d'une polygonale topographique. (177-194).

Basso (*G.*). — [V9] Commémoration du comte Paul Ballada de Saint-Robert (235-244).

Castelnuovo (*G.*). — [M^{1}2] Recherches de Géométrie sur les courbes algébriques. (346-373).

L'auteur ne limite pas dans ses recherches le nombre de dimensions de l'espace, et traite la Géométrie sur une courbe sans se servir du *Restsatz*, et en déterminant les séries au moyen d'espaces de formes fondamentales. Dans la dernière Partie du travail, il résout la question suivante : Déterminer le genre maximum d'une courbe qui doit renfermer une série donnée de groupes de points, c'est-à-dire une série $g_n^{(r)}$ dont on connaît les nombres n, r.

Valle (*G.*). — [F5*b*] L'équation modulaire dans la transformation des fonctions elliptiques. (374-389).

Démonstration de l'existence et détermination du degré de cette équation, sans supposer que l'ordre de la transformation soit un nombre premier.

Novarese (*E.*). — [R1*b*] Étude sur l'accélération d'ordre n dans le mouvement d'une droite. (400-410).

Il y a des propriétés semblables à celles des vitesses et des accélérations ordinaires. Par exemple, il y a un paraboloïde hyperbolique contenant toutes les directions des accélérations d'ordre n.

Pieri (*M.*). — [M^{2}6$c\alpha$, P6] Sur les tangentes triples de certaines surfaces du 6e ordre. (514-526).

L'auteur établit une transformation double de l'espace de la manière suivante. Il prend une courbe gauche du 4e ordre c'_4 de première espèce, et cinq points A'_1, A'_2, ..., A'_5 sur un plan Π' tels que ces mêmes points et les intersections de Π' avec c'_4 puissent former la base d'un faisceau de cubiques. Ces éléments déterminent un système linéaire ∞^3 de surfaces générales du troisième ordre Φ'_3, dont trois ont en commun *deux* points variables.

La surface limite de cette transformation est du 6e ordre, à droite quadruple et dix points doubles situés par couples sur cinq plans doubles passant par

2ème Partie

la droite. Ses tangentes triples forment seize surfaces gauches elliptiques du 8e degré ayant la même droite quadruple et les mêmes points doubles.

Des particularités dans la transformation donnent des surfaces limites ayant un plus grand nombre de points doubles, et l'auteur trouve aussi pour ces surfaces les propriétés relatives à la distribution des points doubles et des tangentes triples.

Segre (*C.*). — [M'2] Les correspondances univoques sur les courbes elliptiques. (734-756).

Étant u l'intégrale de 1re espèce relative à une courbe elliptique, les correspondances algébriques ordinaires sont données par

$$u' \equiv \pm u + C \qquad (\mathrm{mod}\, \omega_1 \omega_2).$$

Mais il y a aussi d'autres correspondances algébriques (singulières) ayant lieu seulement pour des courbes spéciales, et qui sont données les unes par

$$u' \equiv \pm iu + C,$$

les autres par

$$u' \equiv \pm \alpha u + C,$$
$$u' \equiv \pm \alpha^2 u + C,$$

α étant une racine cubique imaginaire de l'unité. L'auteur fait une étude des correspondances algébriques, et particulièrement des singulières.

Tome XXV, 1889-90.

Porro (*F.*). — [U] Sur la différence de longitude entre les observatoires astronomiques de Milan et de Turin. (38-44).

Aschieri (*T.*). — [U] Éphémérides du Soleil et de la Lune pour l'horizon de Turin et pour 1890 (44-57).

Jadanza (*N.*). — [U10] Sur la manière d'employer les éléments géodésiques de l'Institut géographique militaire italien. (90-100).

Pizzetti (*P.*). — [T3b] Sur le calcul de la réfraction terrestre. (101-113).

Valle (*G.*). — [F5] Sur les équations différentielles auxquelles satisfont le module et le multiplicateur dans la transformation des fonctions elliptiques (114-126).

Démonstration du théorème de Jacobi. Si l'on a la relation

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \mu \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}},$$

il sera

$$3\left(\frac{d^2\lambda}{dk^2}\right)^2-2\frac{d\lambda}{dk}\frac{d^3\lambda}{dk^3}+\left(\frac{d\lambda}{dk}\right)^2\left[\left(\frac{1+k^2}{k-k^3}\right)^2-\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda-\lambda^3}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{dk}\right)^2\right]=0.$$

Jadanza (*N.*). — [U] Influence des erreurs instrumentales du théodolite sur les mesures des distances zénithales (148-152).

Segre (*C.*). — [K6*c*, L¹8*b*] Sur un champ nouveau de recherches géométriques. (276-301). Note II (430-457). Note III (592-612).

En considérant les éléments réels et imaginaires

$$(x_1+ix'_1,\ x_2+ix'_2,\ x_3+ix'_3,\ x_4+ix'_4)$$

de l'espace, on a une multiplicité ∞^6. Une équation à coefficients réels entre les parties réelles et les coefficients des imaginaires de ces coordonnées peut être réduite à une relation entre les coordonnées x et leurs conjuguées $\bar{x}$

$$f(x, \bar{x}) = 0,$$

qui n'est pas nécessairement du même degré en x et $\bar{x}$. Une telle équation équivaut à deux équations entre des variables réelles et détermine, par conséquent, une variété ∞^4 de points; en des cas particuliers peut en déterminer une ∞^5. Au moyen de plusieurs équations, on peut avoir des variétés ∞^3, ∞^2, ∞^1. Les recherches de l'auteur sont principalement relatives à une géométrie projective de ces formes géométriques. Il commence par établir un mode de correspondance qu'il appelle *antiprojectivité*, qui peut se présenter à côté de la projectivité lorsqu'on considère en deux formes de première espèce tous les éléments réels et imaginaires. Cette correspondance a en commun avec la projectivité la propriété de transformer quatre éléments harmoniques en quatre éléments harmoniques, mais les rapports anharmoniques des groupes correspondants ont des valeurs complexes conjuguées. On en déduit la manière d'établir une *anticollinéation* et une *antiréciprocité* entre deux formes de deuxième ou de troisième espèce. L'auteur examine les cas qui peuvent se présenter relativement aux éléments unis et aux éléments *involutifs*. Puis il donne la représentation analytique de l'antiprojectivité, qui est une relation linéaire entre les coordonnées d'un élément et les conjuguées des coordonnées de l'élément correspondant.

Note II. — Une *anti-involution* (c'est-à-dire une antiprojectivité qui coïncide avec son inverse) sur une forme de $r^{\text{ième}}$ espèce et dans laquelle il y ait au moins $r+2$ éléments unis indépendants n'a pas seulement ces $r+2$ éléments unis, mais elle en a un nombre ∞^r. Cet ensemble est appelé une *chaîne* de $r^{\text{ième}}$ espèce, ou *chaîne* r^{uple} (*fondamentale* de l'anti-involution). Suivent les propriétés des chaînes et leur représentation analytique. Des propriétés des chaînes, l'auteur fait une application aux éléments tangents. En étudiant les chaînes et les anti-involutions pour les formes des différentes espèces, l'auteur trouve que : pour les formes de première espèce, une anti-involution, ou n'a

pas d'éléments unis ou bien elle en a une chaîne; deux couples d'éléments homologues d'une anti-involution appartiennent à une chaîne, condition qui est aussi suffisante; il existe des anti-involutions sans éléments unis. Dans les formes de deuxième espèce, *toute* anti-involution a pour éléments unis ceux d'une chaîne de deuxième espèce; toute chaîne plane de points peut être engendrée par deux faisceaux antiprospectifs de rayons, c'est-à-dire antiprojectifs et ayant le rayon commun pour rayon uni, pourvu que les centres des deux faisceaux aient entre eux une relation particulière par rapport à la chaîne (soient *harmoniques* par rapport à celle-ci). Pour les formes de troisième espèce, si l'anti-involution a un élément uni, elle en a une chaîne de troisième espèce. Il existe des anti-involutions sans éléments unis. Les propriétés trouvées pour une forme de première espèce sont appliquées aux anti-involutions et aux chaînes qui peuvent se présenter entre les points d'une conique, ou d'une cubique gauche. La Note se termine par l'examen de certaines correspondances que l'on obtient par la projection d'une chaîne plane.

Note III. — Une antiréciprocité involutive est appelée une *antipolarité.* Une antipolarité plane ayant un point uni en a un nombre ∞^3 qui forment ce qu'on appelle une *hyperconique* (*fondamentale* de l'antipolarité). Une antipolarité de l'espace ayant un point uni en a un nombre ∞^5 qui constituent une *hyperquadrique* (*fondamentale*). L'auteur après avoir établi ces notions donne des propriétés des antipolarités, principalement par rapport à leur permutabilité avec les anti-involutions, et des propriétés des hyperconiques et hyperquadriques, ainsi que leur représentation analytique. Dans une Note, l'auteur cite un Travail de Juel (*Acta math.*, t. XIV) où étaient traitées quelques-unes des questions qui ont été l'objet du présent Mémoire.

Gerbaldi (*F.*). — [B10*d*] Sur les combinants de trois formes ternaires quadratiques. (390-396).

Leur expression au moyen des invariants fondamentaux.

Ovazza (*E.*). — [R3*b*] Le polygone funiculaire en Cinématique. (406-413, 1 pl.).

Une construction relative à la composition des rotations autour d'axes parallèles, qui est identique à celle pour la composition des forces parallèles quelconques dans l'espace (construction au moyen du rabattement et du polygone funiculaire) est ici interprétée d'une manière purement cinématique.

Jadanza (*N.*). — [U10] Encore sur le moyen d'employer les éléments géodésiques de l'Institut géographique militaire italien. (414-429).

Ferria (*O.*). — [T2] Sur la stabilité des voûtes chargées suivant la règle de Schwedler (510-518).

Porro (*F.*). — [U] Sur les déterminations de latitude faites en 1888, 1889, 1890 à l'observatoire de Turin. (619-630).

Fabri (*C.*). — [D] Sur quelques propriétés générales des fonctions qui dépendent d'autres fonctions et de lignes. (654-674).

Extension des recherches de M. Volterra (*Rendiconti dei Lincei*, t. III) relatives aux fonctions qui dépendent de *toutes les valeurs* d'une autre fonction Ici l'on suppose que la fonction considérée dépend de toutes les valeurs de plusieurs fonctions de plusieurs variables indépendantes.

Porro (*F.*). — [U] Sur l'étoile variable *u Orionis* (Chandler 2100) (675-679, 1 pl.).

Castelnuovo (*G.*). — [$M^2 8c$, Q2] Sur les surfaces algébriques dont les sections sont des courbes de genre 3. (695-715).

Les surfaces sont considérées dans un espace quelconque S_r. L'auteur trouve toutes les familles de surfaces dont les sections sont des courbes de genre 3, et contiennent un système (γ) (au moins ∞^2) de courbes du quatrième ordre, qui déterminent sur la section générale de la surface la série spéciale $g_4^{(2)}$. La recherche analogue pour le cas des sections hyperelliptiques avait été faite par l'auteur même dans un autre travail (*Rend. del Circolo mat. di Palermo*, t. IV). Les surfaces F^n en question se divisent en quatre espèces suivant que dans le système (γ) est contenu un système ∞^2 de courbes du quatrième ordre et

1° de genre 0;
2° de genre 1 au moins;
3° » 2 »
4° » 3 »

Il y a enfin deux cas spéciaux lorsque la courbe générale de (γ) se décompose

a. en deux coniques;
b. en quatre droites.

Ces cas sont examinés successivement, principalement par rapport à la représentation de ces surfaces sur le plan.

Tome XXVI; 1890-91.

D'Ovidio (*E.*). — [V9] F. Casorati. Notice nécrologique. (3-4).

Aschieri (*T.*). — [U] Éphémérides du Soleil et de la Lune pour l'horizon de Turin et pour 1891. (5-19).

Chini (*M.*). — [O4*g*] Sur certaines déformations des surfaces réglées (20-34).

Soient θ l'angle que la direction positive de la génératrice fait avec celle de

la directrice, et φ l'angle que le plan tangent à la surface fait avec le plan osculateur à la directrice, ρ et T les deux rayons de courbure de la directrice. Si l'on connaît ces quatre quantités en fonction de l'arc v de directrice, la surface est déterminée. On aura toutes les surfaces réglées que l'on peut obtenir au moyen de déformations de la surface (ρ, T, φ, θ), en prenant des valeurs ρ_1, T_1, φ_1, θ_1 liées aux premières par les équations

$$\frac{\cos\varphi_1}{\rho_1} = \frac{\cos\varphi}{\rho},$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial v} - \frac{1}{T_1}\right)\operatorname{tang}\theta - \frac{\operatorname{sen}\varphi_1}{\rho_1} = \pm\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{1}{T}\right)\operatorname{tang}\theta - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\right],$$

$$\theta_1 = \theta.$$

Suivent les applications à des déformations particulières.

Segre (*C.*). — [K6*c*, L¹8*b*] Un champ nouveau de recherches géométriques. Note IV (*voir* Tome précédent). (35-71).

L'équation

$$\lambda\Sigma a_{lm} x_l \overline{y_m} + \mu\Sigma b_{lm} x_l \overline{y_m} + \ldots = 0,$$

sous la condition que les λ, μ, ..., soient réels, représente un *système linéaire d'antipolarités,* et l'équation

$$\lambda\Sigma a_{lm} x_l \overline{x_m} + \mu\Sigma b_{lm} x_l \overline{x_m} + \ldots = 0,$$

un système linéaire d'hyperconiques ou d'hyperquadriques (fondamentales des antipolarités). Dans le plan, on a que les hyperconiques forment un système ∞^8; dans l'espace les hyperquadriques en forment un ∞^{15}. Propriétés des faisceaux (systèmes ∞^1), principalement par rapport à leurs éléments de base. Réseaux (systèmes ∞^2). Un réseau détermine une cubique γ et deux certaines correspondances hyperalgébriques Ω et Π entre ses points. Les points unis d'Ω, lorsqu'il y en a, sont les points bases du réseau, et forment sur la cubique γ une variété ∞^1 que l'auteur appelle un *fil cubique,* qui peut être constitué d'une seule branche ou de deux. La correspondance Π a toujours un fil de points unis. Pour les fils cubiques, on a des propriétés analogues à celles des correspondances univoques entre deux cubiques planes, et la raison de cette analogie se trouve dans le fait que toute antiprojectivité, composée avec une antiprojectivité fixe, donne lieu à une projectivité. L'auteur détermine aussi tous les fils cubiques qui sont sur une cubique plane donnée, ayant un invariant absolu réel; c'est-à-dire qu'il trouve les conditions qui doivent être satisfaites par la correspondance Ω. Ensuite il fait l'application des résultats précédents aux cubiques elliptiques et aux cubiques rationnelles.

Pastore (*G.*). — [R1*e*] La loi de Roberts sur le quadrilatère articulé. (84-101, 1 pl).

Démonstration du théorème de Roberts : la courbe décrite par un point lié invariablement à la bielle peut se décrire au moyen de trois quadrilatères articulés différents. Applications et observations sur des mécanismes à point fixe.

Bertini (*E*.). — [M¹2] Sur quelques théorèmes de la Géométrie sur une courbe algébrique. (118-130).

Dans ces *Atti*, t. XXIV, M. Castelnuovo trouve le genre maximum p d'une courbe, étant connus les nombres n, r d'une série g_n^r (série ∞^r de groupes de n points de la courbe, déterminée par un système linéaire de courbes). M. Bertini après quelques propositions préliminaires, dont le but est d'écarter un cas particulier, donne une généralisation des propriétés employées par M. Castelnuovo dans sa détermination. Ensuite, il applique les propriétés ainsi généralisées pour obtenir d'une manière plus simple le résultat de M. Castelnuovo et, pour faire l'extension aux hyperespaces de quelques théorèmes de M. Nœther [*Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven* (*Acad. des Sc. de Berlin*, 1882)].

D'Ovidio (*E*.). — [B1*a*] Nouvelle addition à la Note : *Sur les déterminants de déterminants*. (131-133).

Rétablissement de priorité relatif à des théorèmes donnés par M. Barbier (*Comptes rendus, etc.*, p. 1845, t. XCVI; 1883) et par M. Picquet (*Ibid.*, p. 310, t. LXXXVI; 1878 et *Journ. de l'Éc. Polytechn.*, XLV[e] Cahier; 1878).

Ovazza (*E*.). — [R9*c*] Sur la résistance de frottement entre vis et écrou. (215-235, 1 pl.).

Valle (*G*.). — [F5*a*] Sur un cas particulier de transformation des fonctions elliptiques. (236-243).

L'auteur ajoute quatre transformations du 2[e] ordre aux dix-huit données par Abel.

Loria (*G*.). — [P4*g*] Sur les transformations rationnelles de l'espace déterminées par une surface générale du troisième ordre. (275-299).

Pour trouver toutes ces transformations, l'auteur passe en revue les courbes essentiellement distinctes contenues dans la surface, qui peuvent servir comme courbes fondamentales d'un système homaloïdique. Il trouve ainsi, en indiquant par (μ, ν) une transformation dont les systèmes homaloïdiques sont respectivement des ordres μ, ν :

Une transformation rationnelle (3, 3) de genre 1 ayant dans l'un et dans l'autre espace une courbe fondamentale unique du sixième ordre et de genre 3.

Une (3, 4) rationnelle de genre 1. Les surfaces du premier système ont en commun une courbe gauche du cinquième ordre et de genre 1, et un point fixe; celles du second système une conique, double pour toutes, et une courbe du cinquième ordre et de genre 1

Une (3, 5) rationnelle de genre 1. Le premier système a en commun une quartique gauche rationnelle, et touche un plan donné en un point donné; le second a une conique commune et une courbe du cinquième ordre double pour toutes les surfaces.

Une autre (3, 5) rationnelle de genre 1. Le premier système a en commun une droite, une cubique gauche et deux points; le second une droite triple, deux droites doubles et une courbe rationnelle du cinquième ordre.

Une (3, 6) rationnelle de genre 1. Les surfaces du premier système ont en commun une cubique gauche et ont avec un plan donné en un point donné, un contact du deuxième ordre. Les surfaces du système inverse ont en commun une droite triple et une courbe double du sixième ordre.

Autres deux (3, 6) rationnelles de genre 1. Dans l'une, les surfaces du premier système passent par trois droites, gauches entre elles, et par un point fixe, et touchent un plan donné en un point donné; celles du système inverse ont en commun une conique triple, trois droites doubles et une cubique gauche. Dans l'autre, les surfaces du premier système se touchent suivant une droite fixe et passent par une autre, gauche avec la première, et par trois points fixes. Celles du second ont en commun une droite quadruple, trois droites doubles et une courbe rationnelle du cinquième ordre.

Il n'existe pas de transformations rationnelles (3, ν), ν étant > 6.

Peano (*G.*). — [O2-3] Sur certaines courbes singulières. (299-302).

Certaines propositions de Staudt (*Geom. der Lage*, § 11) sur les tangentes et les plans osculateurs envisagés comme limites ne sont pas vraies absolument; il faut y introduire des restrictions qui, dans le champ analytique, se traduisent par la possibilité du développement en série de Taylor. L'auteur donne trois exemples de courbes planes en traitant la question analytiquement.

Novarese (*E.*). — [R 1 *b*] Sur l'accélération du 2e ordre dans le mouvement rotatoire autour d'un point. (302-309).

D'Ovidio (*E.*). — [L¹7] Les propriétés focales des coniques dans la métrique projective. (339-366).

D'Ovidio (*E.*). — [L¹19] Sur les coniques confocales dans la métrique projective. (426-437).

D'Ovidio (*E.*). — [L¹3] Théorèmes sur les coniques dans la métrique projective. (525-535).

Jadanza (*N.*). — [X8, T3] Influence de l'excentricité de l'alidade sur les verniers. Un microscope à grossissement constant. (536-540).

Bottiglia (*A.*). — [R9*d*] Sur les vitessses de rendement maximum et à vide des turbines. (541-550).

Reina (*V.*). — [U10] Sur la compensation dans le problème de Hansen. (571-579).

Brioschi (*F.*). — [C2*d*] Sur quelques formules elliptiques. (586-595).

Ces formules sont relatives à la réduction de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

où

$$f(x) = A_0 x^4 + 4A_1 x^3 + 6A_2 x^2 + 4A_3 x + A_4,$$

à la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

étant

$$\varphi(x) = 4s^3 - g_2 s - g_3,$$

au moyen de la transformation

$$x = a_0 + \frac{l}{s-m},$$

a_0 étant une des racines de $f(x) = 0$, et

$$l = \frac{1}{4} f'(a_0), \qquad m = \frac{1}{2.3.4} f''(a_0).$$

Jadanza (*N.*). — [T3]. Un prisme universel à réflexion. (649-656).

Amodeo (*F.*). — [Q2]. Quels peuvent être les postulats fondamentaux de la Géométrie projective d'un S_r. (741-770).

Les postulats de l'auteur sont de deux espèces. Il y en a $r+2$ qui servent à engendrer l'espace S_r, et trois à établir la correspondance entre les points d'une *droite* (dans le sens projectif général) et une variable numérique. Les premiers sont relatifs à l'existence des *points* (éléments généraux), et à la détermination de la droite au moyen de deux points, et du plan au moyen de trois. Les trois derniers sont les suivants : l'un d'eux est relatif à la forme de la droite et dit qu'un point d'une droite peut passer de sa propre position à celle d'un autre point quelconque de la même droite, et cela en deux directions opposées; dans l'une ou dans l'autre direction, un point peut passer une fois et une seule par toutes les positions des points de la droite et revenir au point de départ.

L'autre correspond à celui d'Archimède et c'est le suivant : Si l'on prend sur la droite trois points arbitraires a, b_0, b_1 et si l'on construit les groupes harmoniques $ab_1b_0b_2$, $ab_2b_1b_3$, ..., successivement, on a une série de points

$$b_1 b_2 b_3 \ldots,$$

Si p est un point arbitrairement pris entre a et b_1 dans le segment $b_0 b_1 a$, il

y a toujours dans la série $b_2 b_3 b_4 \ldots$, un point compris entre p et a dans le segment $b_0 pa$, même si p n'appartient pas à la série.

Le dernier est le postulat de la continuité, qui sert pour compléter la correspondance entre nombres et points lorsque les nombres sont des irrationnels.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, 3e série (1).

Tome XV; 1896.

Klein (*F.*) (Traduction *L. Laugel*). — [V9] (2) L'œuvre géométrique de Sophus Lie. (1-20).

Extrait de l'Ouvrage : *The Evanston Colloquium;* conférences sur les Mathématiques faites au Congrès des Mathématiciens à l'Exposition de Chicago en 1893.

Cet article est un lumineux exposé de la grande conception de Sophus Lie, de la théorie des transformations de contact. Associé à M. Lie au début de ses recherches, M. Klein était mieux préparé que tout autre à en parler avec autorité, car il les a suivies à un moment où les idées étaient, dit-il, à l'état naissant.

Goursat (*E.*). — [M¹5*h*] Sur le théorème de Salmon. (20-22).

Soient A, A′ deux points quelconques d'une cubique n'ayant pas de point double; par chacun de ces points on peut mener quatre tangentes à la courbe, non compris celle qui a son point de contact au point lui-même. Soient P, Q, R, S les points de contact des tangentes issues du point A, P′, Q′, R′, S′, les points de contact des tangentes issues du point A′. Le rapport anharmonique des quatre droites AP, AQ, AR, AS est le même que celui des quatre droites A′P′, A′Q′, A′R′, A′S′, prises dans un certain ordre.

Laurent (*H.*). — [B3*d*] Sur les fonctions entières. (23-28).

Emploi, au calcul des solutions communes à plusieurs équations algébriques, d'une classe de polynomes dont l'auteur a montré l'importance dans la théorie de l'élimination.

Petrovitch (*M.*). — [D2*b*α] Un problème sur les séries. (58-63).

---

(1) Voir *Bulletin*, XVII_2, p. 204; XIX_2, p. 117; XX_2, p. 47 et 209.

(2) Les indications entre crochets sont celles de l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

Connaissant la somme $F(x)$ d'une série

$$F(x) = \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \ldots + \varphi(n)x^n + \ldots$$

en déduire la somme de la série

$$\Phi(x) = \frac{\varphi(1).x}{1} + \frac{\varphi(2).x^2}{1.2} + \frac{\varphi(3)x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{\varphi(n).x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots,$$

à l'aide des intégrales définies.

Calinon (*A.*). — [O5*p*] Le théorème de Gauss sur la courbure (63-65).

Simplification de détail dans la démonstration d'un théorème classique.

Balitrand (*F.*). — [K15*b*] Détermination des points d'inflexion dans le développement de la section plane d'un cône. (65-68).

L'auteur propose ici deux démonstrations qui lui ont semblé exemptes des défauts signalés par M. Carvallo (*Nouv. Annales*, p. 429-434; 1894) dans les démonstrations géométriques données pour la recherche des points d'inflexion dans le développement de la section plane d'un cône.

Concours des « Nouvelles Annales » pour 1896. — (105-107).

Innovation excellente à tous égards et de nature à stimuler le zèle des étudiants. Le Concours, ouvert exclusivement aux abonnés, donnera droit au lauréat à un choix important d'Ouvrages.

La question de ce premier Concours se rapporte à des propriétés du polynome $F(x)$ du 4e degré et de sa dérivée $F'(x)$ et du quotient $F'^2 : F$.

Ces propriétés ont, depuis, été généralisées dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* pour 1896 (Quest. 948).

Hurwitz (*A.*) (Traduction *L. Laugel*). — [A3*e*] Sur les conditions sous lesquelles une équation n'admet que des racines à partie réelle négative. (108-126).

La résolution de cette question d'après les méthodes de Sturm, Liouville, Cauchy et Hermite, ne présente aucune difficulté de principe, mais l'auteur a désiré exposer le résultat de ses recherches, parce que, sous sa forme simple et commode dans les applications, il offre peut être un certain intérêt.

Appell (*P.*). — [F2] Quelques exemples de séries doublement périodiques. (126-129).

L'auteur donne des exemples de ces sortes de séries qui sont, ou ne sont pas, des fonctions elliptiques.

Correspondance. — M. Maillard [Extrait d'une Lettre] : Note sur l'intégration d'une certaine équation différentielle. (140-141).

Laisant (*C.-A.*). — La Bibliothèque mathématique des travailleurs. (142-145).

L'idée première de cette utile collection est due à M. Lémeray qui l'a proposée au Congrès de Caen (1894). Accueillie avec la plus vive sympathie par les mathématiciens, la Bibliothèque s'est rapidement organisée, sous la direction de M. le Dr Hulmann, à Paris, qui a bien voulu se charger de l'installation à son domicile, 4, rue de la Cure.

En juillet 1895, elle comprenait déjà 630 volumes; elle en compte aujourd'hui plus de mille, provenant surtout de dons volontaires.

Cette Bibliothèque rend journellement les plus précieux services à nombre de ses correspondants.

Andoyer (*H.*). — [L^2 17a] Sur l'intersection de deux quadriques. (153-173).

Résolution complète de cette question, exposée ici en tous détails à l'intention des candidats à l'Agrégation.

Sée (*R.*). — [O8d] Théorème de Géométrie cinématique. (173-174).

Un plan se déplace en restant tangent à une surface; pour une quelconque de ses positions, sa caractéristique passe par le point où il touche cette surface.

Tannenberg (*W. de*). — [R7$a\beta$] Équation du mouvement d'un point matériel sur une surface quand on tient compte du frottement. (201-207).

L'auteur vérifie ses résultats sur une application traitée par M. A. de Saint-Germain dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (*Recherche du mouvement d'un point matériel sur une surface dépolie*, p. 223-229; 1892).

Fouché (*M.*). — [C2h] Sur la définition de l'intégrale définie. (207-215).

L'auteur, s'appuyant sur la considération des ensembles, parvient à établir qu'une fonction est intégrable si l'on peut partager l'intervalle de variation en un nombre fini d'intervalles dans chacun desquels la fonction est : 1° toujours croissante ou toujours décroissante; 2° ou finie et continue.

D'Ocagne (*M.*). — [L^1 9a] Sur les segments de coniques limités à une normale. (215-217).

Dans l'ellipse, une corde MV, normale en M, limite avec la courbe une aire minimum lorsque la corde rencontre le grand axe sous un angle de 45°.

Klein (*F.*) (Traduction *L. Laugel*). — [R8$c\beta$] Sur le mouve-

ment d'un corps grave de révolution suspendu par un point de son axe (der Kreisel) (218-220).

Simple remarque ayant trait à la simplification des formules de représentation du mouvement de rotation par l'emploi de substitutions linéaires unimodulaires.

Cette courte observation est suivie d'une addition bibliographique (220-222) sur la littérature du sujet.

Bickmore (C.-E.). — [I1] Sur les fractions décimales périodiques. (222-227).

Rectifications et compléments à un Tableau des facteurs de $10^n - 1$ déjà publié en 1855 dans les *Nouv. Annales* par le Dr Looff. L'auteur y a découvert quelques erreurs et il résume ici le fait de ses propres recherches et de celles de divers autres calculateurs, Reuschle, Shanks, Kessler. La question, très difficile, est encore très incomplète, car il y a dans la liste des nombres $10^n - 1$, de $n = 1$ à $n = 100$, une grande quantité de termes de plus de 12 ou 15 chiffres, dont il est actuellement impossible de dire s'ils sont ou non premiers.

Astor (A.). — [D3g] Sur le nombre des périodes d'une fonction uniforme (227-232).

Démonstration basée sur celle du théorème ainsi énoncé : « Étant données $n-1$ fonctions linéaires de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut rendre séparément chaque fonction inférieure en valeur absolue à une quantité quelconque donnée par des systèmes de valeurs entières des variables ne s'annulant pas toutes en même temps.

Autonne (L.). — [C1a] Sur une différentielle exacte. (232-236].

Développement d'un exercice sur l'emploi des coordonnées homogènes dans l'espace.

Borel (E.). — [R7bβ] Remarque sur les problèmes de forces centrales. (236-238).

L'auteur montre pourquoi les équations des problèmes de forces centrales sont en défaut dans le cas où le mouvement a lieu sur un cercle.

Correspondance. — M. Mannheim [Extrait d'une Lettre] : Réclamation de priorité au sujet de la propriété des centres de courbure d'une épicycloïde roulant sur une droite. (245).

Raffy (L.). — [C2j] Une Leçon sur la méthode de quadrature de Gauss. (249-262).

Cet article, à propos d'une question de Concours d'Agrégation, est destiné à

présenter avec détails la méthode de Gauss pour le calcul d'une intégrale définie, et à traiter, d'après l'analyse de M. Markoff, une question importante, laissée de côté par Gauss, de trouver la limite supérieure de l'erreur commise quand on applique sa méthode.

Stouff (*X*.). — [F 8 *f*] Sur une application des fonctions elliptiques. (262-266).

Dans un ellipsoïde à trois axes inégaux, on suppose que $2b^2 = a^2 + c^2$. On demande de trouver les lignes de cette surface qui, en chacun de leurs points, sont tangentes aux diagonales du rectangle des axes de l'indicatrice de ce point.

Duporcq (*E*.). — [M³ 6 *b*] Quelques propriétés des biquartiques gauches. (266-270).

On sait que toutes les quadriques, qui passent par sept points quelconques de l'espace, renferment un huitième point fixe. Il en résulte que, à sept points arbitraires d'une biquartique gauche, correspond un huitième point de cette courbe. L'auteur se propose de mettre en évidence quelques propriétés de ces groupes de huit points réciproques.

Teixeira (*G*.). — [D 1 *b*] Sur le développement de x^k en série ordonnée suivant les puissances du sinus de la variable. (270-274).

Vérification, par une méthode élémentaire, des formules que l'auteur a établies dans un article sur le même sujet, publié dans le *Journal de Crelle-Fuchs* (t. CXVI, p. 14), mais basé sur la théorie des intégrales prises entre des limites imaginaires.

D'Ocagne (*M*.). — [L¹ 10 *b*, *c*] Sur les cordes normales à la parabole. (274-281).

Solution de divers problèmes relatifs aux cordes normales à la parabole. Rappel d'un résultat déjà énoncé, p. 215.

Correspondance. — M. M. (Paris) [Extrait d'une Lettre] : Note additionnelle à l'article de M. d'Ocagne (p. 215). (281-282).

Bourlet (*C*.). — [I 25 *b*] Sur les nombres parfaits. (297-312).

Le présent Travail ne renferme pas de résultats absolument nouveaux, mais les démonstrations de l'auteur empruntent un certain intérêt à la corrélation qu'il a eu soin d'établir entre les propriétés des nombres parfaits, des nombres abondants et des nombres déficients. L'importante question de l'existence non encore démontrée de nombres parfaits impairs est ici examinée avec quelques détails.

Dumont (*F*.). — [M² 3 *f*] Théorème sur la détermination d'une

surface du troisième ordre générale par sa hessienne. (312-317).

Étude de la question ainsi énoncée : Une surface du 4e ordre à dix points doubles, sommets d'un pentaèdre, étant donnée, peut-elle être la hessienne d'une surface ou de plusieurs surfaces du troisième ordre?

Dumont (*F.*). — [M²3*b*] Sur la représentation de la surface cubique générale sur un plan. (318-325).

Si x, y, z, t désignent les coordonnées d'un point de la surface, X, Y, Z les coordonnées homogènes du point correspondant du plan, les formules

$$\frac{x}{P} = \frac{y}{Q} = \frac{z}{R} = \frac{t}{S},$$

où P, Q, R, S représentent des fonctions homogènes en X, Y, Z, traduisent deux modes de représentation (1, 1), celui de Reye si elles sont du 3e degré, celui de Salmon si elles sont du 4e.

L'auteur montre qu'il existe des modes de représentation (1, 1) de la surface cubique dans lesquels les fonctions P, Q, R, S sont d'un degré supérieur à 4 et qui, cependant, ont une définition géométrique simple.

Lémeray (*E.-M.*). — [O1*a*, H12*aα*] Sur la dérivée des fonctions interpolées. (325-327).

Expression de cette dérivée mise sous forme symbolique, en utilisant une relation que l'auteur a fait connaître dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* Question 788.

Klein (*F.*) (Traduction *L. Laugel*). — [D2*d*] Sur une représentation géométrique du développement en fraction continue ordinaire. (327-331).

Description et construction de contours ou encadrements polygonaux qui représentent les réduites successives d'une fraction continue et peuvent servir à illustrer et à simplifier la théorie des formes quadratiques du type

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$

dont le discriminant $b^2 - 4ac$ n'est pas un nombre carré parfait.

Bricard (*R.*). — [K14*d*] Sur une question de Géométrie, relative aux polyèdres. (331-334).

L'auteur s'est proposé le problème général suivant : « Étant donnés deux polyèdres équivalents, peut-on toujours décomposer l'un d'eux en un nombre *fini* de polyèdres, qui, assemblés d'une manière différente, reconstituent le second polyèdre? »

La réponse est négative, et entraîne la nécessité de la décomposition en éléments infiniment petits.

Concours de 1896. — École Normale supérieure; École Polytechnique. (337-339).

Laurent (*H.*). — [B2] Exposé d'une théorie nouvelle des substitutions linéaires. (345-365).

Préliminaires. — Des fonctions de substitutions. — Décomposition d'une substitution en facteurs primaires. — Équation caractéristique. — Fonctions rationnelles d'une substitution. — Substitutions de déterminant nul. — Pivots d'une substitution. — Substitutions échangeables. — Substitutions quasi-échangeables. — Forme remarquable que peut prendre une substitution quelconque.

Gutzmer (*A.*) (Traduction *L. Laugel*). — [F1*d*] Remarque sur la formule *thêta* de Jacobi. (365-369).

Simplification à la démonstration de la relation fondamentale qui a lieu entre les produits de quatre fonctions *thêta*.

Fontené (*G.*). — [P6*f*] Sur un cas remarquable de la projection gauche. (369-372).

Commentaire à des articles de Transon et de Hirst précédemment publiés dans les *Nouvelles Annales* (1865 et 1866).

Jamet (*V.*). — [E5] Sur les intégrales de Fresnel. (374-376).

Examen et résolution d'une difficulté qui se présente habituellement dans les démonstrations relatives à la détermination des intégrales

$$\int_0^\infty \sin\frac{\pi}{2}v^2\,dv, \qquad \int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}v^2\,dv.$$

Boulanger (*A.*). — [K23*a*] Sur la perspective des arcades. (376-377).

Note sur une propriété des cordes communes aux perspectives de deux coniques situées sur un même cône du second degré.

Concours de 1896. — Concours général; Agrégation des Sciences mathématiques; École centrale. (381-388).

Minkowski (*H.*). — [I11*b*] Sur les propriétés des nombres entiers qui sont dérivées de l'intuition de l'espace. (393-403).

L'auteur s'est proposé de parler de la configuration géométrique qui a avec les nombres entiers la relation la plus simple, c'est-à-dire le réseau des nombres, formé de l'ensemble des points x, y, z de l'espace pour lesquels x, y, z sont des nombres entiers, x, y, z désignant des coordonnées rectangulaires habituelles. La substance de cette communication au Congrès mathéma-

tique de Chicago est la reproduction, en leurs parties principales, de quelques résultats de l'Ouvrage du même auteur : *Geometrie der Zahlen*, dont il a été rendu compte ici (p. 25-30, 1897).

Mangeot (*S*.). — [M²3*f*, M¹2*f*] Étude analytique de la symétrie. (403-426).

Règles pratiques pour la recherche des axes des courbes planes algébriques. — Réduction de l'équation d'une courbe qui a des axes. — Sur la détermination des plans de symétrie des surfaces algébriques. — Méthodes pratiques pour la recherche des plans de symétrie des surfaces du 3ᵉ et du 4ᵉ ordre. — Sur un moyen de reconnaître si une surface du 3ᵉ, du 4ᵉ ou du 5ᵉ ordre est de révolution.

Brocard (*G*.). — [P1*f*] Sur la transformation homographique des propriétés métriques des figures planes. (426-432).

Démonstration et application de la proposition suivante :

Si par le sommet C d'un triangle ABC, on mène une droite isotrope, et la droite isotomique de l'autre droite isotrope, ces droites forment, avec les côtés du triangle issus du sommet C, un faisceau dont le rapport anharmonique est égal à $\frac{b^2}{a^2}$.

Correspondance. — M. M. (Paris). [Extrait d'une Lettre]. (432-434).

Démonstration géométrique de quelques propositions établies analytiquement par M. d'Ocagne, p. 274-281, sur les normales à la parabole.

Vogt (*H*.). — [B10*b*] Réduction simultanée de deux formes quadratiques de trois variables à des formes canoniques. Application à l'étude d'un système de deux coniques. (441-469).

Les méthodes exposées par M. Darboux (*J. de Liouville*, 1874) pour le cas d'un nombre quelconque de variables se simplifient par l'application d'un seul de leurs principes lorsqu'il s'agit de deux formes quadratiques à trois variables. C'est l'objet du présent Travail où il est fait emploi de la méthode basée sur les propriétés de la forme adjointe d'une forme quadratique.

Premier Concours des « Nouvelles Annales » pour 1897. — (489-491).

Le sujet se rapporte à l'établissement des propriétés fondamentales des fonctions circulaires.

Appell (*P*.). — [M¹8*b*] Exercice sur les courbes de direction. (491-495).

Laguerre a appelé *courbes de direction* les courbes algébriques $f(x, y) = 0$ telles que les cosinus directeurs de la tangente en un point (x, y) puissent être exprimés rationnellement en fonction de x et y.

L'auteur se propose d'indiquer un moyen de déduire d'une courbe de direction une infinité d'autres courbes de direction.

Burali-Forti (*C.*). — [C 2 *h*] Sur la définition de l'intégrale définie. (495-502).

Reprenant la méthode employée dans un précédent article (p. 207) par M. Fouché, pour la démonstration de deux théorèmes connus sur l'existence de l'intégrale définie, l'auteur se propose de la simplifier encore et de la généraliser, ainsi que d'ailleurs l'a fait connaître M. G. Peano.

Lognon. — [13 *b*] Généralisation de la formule de Wilson. (503).

La formule de Wilson est $n! + 1 = (n+1)e_1$, si $n+1$ est premier La généralisation ici établie est $(n!)^{k+1} + (-1)^{k+2} = (n+1)e_{k+1}$.

Fabry (*E.*). — [E 5] Sur les intégrales de Fresnel. (504-505).

Simplification de la démonstration exposée (p. 372) par M. Jamet.

Gravé (*D.*). — [U 3] Sur le problème des trois corps. (537-547).

L'auteur considère le système classique de douze équations fondamentales du premier ordre, puis la transformation proposée par M. J. Bertrand, et il cherche ensuite à résoudre la question de trouver toutes les intégrales des équations de M. Bertrand indépendantes de la loi des forces. Il arrive, en définitive, à reconnaître que les équations de M. Bertrand n'admettent pas d'intégrales indépendantes de la loi des forces autres que celles qui sont déjà connues.

Lémeray (*E.-M.*). — [A 3 *l*, G 6 *c*] Sur les racines de l'équation $x = a^x$ (548-556).

L'auteur se propose de montrer que les racines de l'équation $x = a^x$ sont les valeurs vers lesquelles convergent certaines expressions déjà étudiées dans sa communication au Congrès de Bordeaux (1895) sur les fonctions itératives.

Delix (*P.*). — Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1896. Solution de la question de Mathématiques. (556-566).

Propriétés de l'intersection d'un cône et d'un certain conoïde.

Duporcq (*E.*). — Solution du problème proposé en 1896 au Concours général de Mathématiques spéciales. (566-571).

A partir de 1896, le Journal a publié les énoncés des questions d'Analyse, de Mécanique et d'Astronomie proposées aux examens de Licence ès Sciences mathématiques à Paris et dans différentes Universités des départements, avec quelques indications sommaires pour la résolution de la plupart des questions.

Cette partie du Journal ne tient pas moins de 135 pages.

Les énoncés sont ceux des Sessions de juillet 1895, novembre 1896 et juillet 1896.

Une place étendue a également été attribuée à la publication de questions à résoudre et à l'insertion de leurs solutions.

Voici donc les *Nouvelles Annales de Mathématiques* redevenues un journal de problèmes, comme au temps de Terquem, et jusque vers 1885, où le problème fut absolument délaissé; mais actuellement elles paraissent avoir regagné le terrain perdu et avoir repris les traditions qui avaient fait leur célébrité. Il est à prévoir que cette utile innovation exercera la plus heureuse influence sur le progrès des études qui se rapportent à la préparation des candidats.

Exercices.

Brocard (*H.*). — Solution de la question 1406. (93-96).

Développements amenant à présumer que 0, 1, 6 sont les seuls nombres triangulaires dont les carrés soient triangulaires.

Gallucci. — Solution de la question 1554. (96-97).

x, y, z étant trois nombres positifs, si $x+y+z=1$, on a

$$(1-x)(1-y)(1-z) \geqq 8xyz.$$

Foucart (*E.*). — Solution de la question 1635. (97-98).

Propriété de la lemniscate de Bernoulli.

Foucart (*E.*). — Solutions des questions 1638 et 1639. (145-146).

Propriété d'un cercle fixe et d'un faisceau de cardioïdes. Propriété d'une cardioïde et d'un certain cercle.

Foucart (*E.*). — Solution de la question 1641. (146-147).

Propriété de l'intersection d'une hyperbole équilatère et d'une circonférence particulière.

M. Mannheim en a donné (p. 290-292) une démonstration géométrique, et M. Servais (p. 379-380) une généralisation.

Foucart (*E.*). — Solution de la question 1644. (147).

Propriété des angles sous lesquels une normale à la parabole rencontre cette courbe et son axe.

Voir aussi, p. 344, une remarque relative à cette question.

Foucart (*E.*). — Solution de la question **1645**. (148).

Propriété de la lemniscate de Bernoulli et d'une certaine hyperbole équilatère.

Droz-Farny (*A.*). — Solution de la question **1658**. (148-150).

Propriété du triangle. Construction d'une certaine circonférence qui est tangente au cercle des neuf points.

Droz-Farny (*A.*). — Solution de la question **1659**. (150).

Propriété d'une conique et du cercle orthoptique de cette conique.

Droz-Farny (*A.*). — Solution de la question **1665**. (150-151).

Propriété d'un certain triangle, d'être homologique à un triangle donné.

Droz-Farny (*A.*). — Solution de la question **1668**. (196-197).

Propriété d'une corde focale dans la parabole.

Droz-Farny (*A.*). — Solution de la question **1669**. (197-198).

Autre propriété d'une corde focale dans la parabole. *Voir* aussi p. 437-439.

Tzitzéica (*G.*). — Solution de la question **1670**. (198-199).

Question de limite ayant trait à la construction du cercle osculateur en un point d'une courbe.

Tzitzéica (*G.*). — Solution de la question **1671** (247-248).

Propriété des coordonnées des centres de courbure des développées successives en un point d'une courbe.

Brocard (*H.*). — Solution de la question **662**. (284-288).

Démonstration de formules dues à Grunert, exprimant le sinus et le cosinus du quart de la surface d'un quadrilatère sphérique inscrit, ayant a, b, c, d pour côtés.

Brocard (*H.*). — Solution de la question **1032**. (288-290).

Question d'Analyse indéterminée qui revient à proposer de rendre carrés à la fois $x+1$, $xy+1$, xy^2+1.

Mannheim (*A.*) et *Barisien* (*E.-N.*). — Solution de la question **1674**. (292-293).

Problème sur les cercles tangents en un même point à une conique donnée.

Barisien (*E.-N.*). — Solution de la question 1701. (294).

Lieu géométrique dans le limaçon de Pascal.

Barisien (*E.-N.*). — Solution de la question 1702. (295).

Triangles orthocentriques inscrits dans l'hyperbole équilatère.

Duporcq (*E.*). — Solution de la question 1707. (339-341).

Relation entre deux caustiques réciproques par rapport à une courbe.

Duporcq (*E.*). — Solution de la question 1708. (341-342).

Propriété des podaires.

Audibert. — Solution de la question 1718. (343).

Intégrale prise le long d'un contour.

Brocard (*H.*). — Solution de la question 1384. (388-389).

Propriété du triangle inscrit dans l'hyperbole équilatère.

Brocard (*H.*). — Solution de la question 1407. (389-390).

Induction en faveur de l'existence de groupes de cinq impairs consécutifs dont quatre sont des nombres premiers.

Brocard (*H.*). — Solution de la question 1498. (390-392).

Génération d'une certaine toroïde.

Droz-Farny (*A.*). — Solution de la question 1666. (434-437).

Solutions analytique et géométrique d'une question relative à des cercles.

Droz-Farny (*A.*). — Solution de la question 1679. (439).

Lieu géométrique relatif à des coniques.

Droz-Farny (*A.*). — Solution de la question 1681. (485).

Quartique unicursale obtenue comme lieu géométrique relatif à des coniques.

Droz-Farny (*A.*). — Solution de la question 1682. (486).

Lieu géométrique relatif aux coniques inscrites dans un quadrilatère.

La Géocine. — Solution de la question 1744. (536).

Construction relative à une enveloppe.

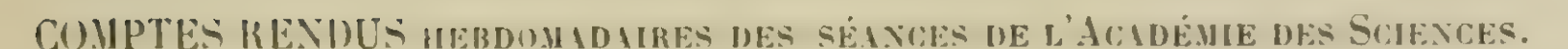
Audibert. — Solution de la question 1706. (576).

Hypocycloïde à quatre rebroussements, ou astroïde, déduite de l'ellipse.

Barisien (*E.-N.*). — Solution de la question 1709. (577-582).

Enveloppe et lieu géométrique relatifs à des cercles et à des axes radicaux.

H. B.



COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome CXXI; 1895 [1].

Picard (*Ém.*). — Sur une classe étendue d'équations linéaires aux dérivées partielles dont toutes les intégrales sont analytiques. (12-14).

Soit

$$a_0 \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + a_1 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} + \ldots + a_{n-1} \frac{\partial^n z}{\partial x \partial y^{n-1}} + a_n \frac{\partial^n z}{\partial y^n} + \ldots = 0$$

une équation linéaire d'ordre n, où les termes d'ordre n sont mis en évidence et où les coefficients sont des fonctions analytiques de x et y. On suppose que, dans une certaine région R du plan (x, y), les caractéristiques soient imaginaires, c'est-à-dire que l'équation en λ

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^n a_n = 0$$

ait toutes ses racines imaginaires (n étant alors nécessairement pair).

Dans ces conditions, toute intégrale de l'équation différentielle, bien déterminée et continue ainsi que ses dérivées partielles des n premiers ordres dans une région du plan contenu dans R, est nécessairement une fonction analytique de x et y.

Une pareille proposition paraît au premier abord très difficile à démontrer, parce qu'on n'a pas immédiatement une représentation de l'intégrale.

La méthode des approximations successives permet à M. Picard d'obtenir cette représentation et la démonstration devient alors assez simple. Une fois assuré de la nature analytique des intégrales, on peut en indiquer des représentations de formes très diverses.

Boussinesq. — Lois de l'extinction d'une houle simple en pleine mer. (15-19).

---

[1] Voir *Bulletin*, XXI_2, p. 34.

Le coefficient d'extinction (avec la distance) d'une houle simple est inversement proportionnel à la cinquième puissance de sa demi-période T ou à la puissance $\frac{5}{2}$ de la longueur 2L de ses vagues.

Cosserat. — Sur les courbes tracées sur une surface et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface. (43-46).

Les courbes tracées sur une surface et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface ont été considérées pour la première fois par M. Darboux, qui a montré que leur équation différentielle est du second ordre seulement et a intégré cette équation dans le cas des quadriques et dans celui des cyclides.

Se proposant d'étendre le nombre des surfaces sur lesquelles on peut déterminer les courbes (D) de M. Darboux, M. Cosserat montre que le problème se ramène à la détermination d'une fonction φ donnée par l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial v}[\mathrm{A}(a'-a)\sin^3\varphi] = \frac{\partial}{\partial u}[\mathrm{C}(a'-a)\cos^3\varphi],$$

où u et v sont les paramètres des lignes de courbure, a et a' les courbures principales.

La théorie des courbes (D) dépend donc surtout des deux fonctions $\mathrm{A}(a'-a)$ et $\mathrm{C}(a'-a)$. (*Voir* pour les notations le Livre V des *Leçons* de M. Darboux.)

Si l'on appelle *intégrale homogène de degré m* une fonction

$$f(\cos\varphi, \sin\varphi, u, v)$$

homogène et de degré m par rapport à $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, telle que pour toutes les valeurs de la constante k, la fonction φ tirée de l'équation

$$f(\cos\varphi, \sin\varphi, u, v) = k$$

satisfasse à l'équation (1), on peut énoncer le théorème suivant :

« Les surfaces pour lesquelles le problème de la recherche des courbes (D) admet une intégrale entière homogène du premier degré sont celles pour lesquelles toutes les lignes de courbure sont des cercles géodésiques; la cyclide de Dupin et les surfaces telles que le tore, dans lesquelles elle peut dégénérer, sont les surfaces pour lesquelles il existe une infinité de pareilles intégrales.

« La proposition de Ribaucour relative aux cyclides conduit à la suivante : les quadriques et les cyclides sont des surfaces pour lesquelles le problème de la recherche des courbes (D) admet une intégrale homogène entière du second degré. »

Delassus. — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles. (46-48).

Étant donnée une équation linéaire, l'auteur dit qu'une ligne est *singulière fixe du premier genre* si elle est singulière pour un ou plusieurs coefficients, *du deuxième genre* si elle annule tous les coefficients de l'équation caracté-

ristique; *du troisième genre* si le long de cette ligne l'équation caractéristique a deux racines qui se permutent.

Moyennant ces définitions, M. Delassus peut énoncer d'une manière simple, les conditions auxquelles des équations n'ayant en commun aucun système de caractéristiques sont incompatibles ou donnent naissance à un système *de première espèce* (c'est-à-dire dont l'intégrale générale ne dépend que d'un nombre limité de constantes arbitraires).

Cherchant ensuite les intégrales qui traversent les singularités fixes d'un système, il trouve entre autres résultats que les intégrales analytiques jouissent de cette propriété à l'égard des singularités fixes de troisième espèce de ce système.

Il énonce enfin un théorème dont l'objet est de délimiter, dans des cas étendus, la région où sont confinées les singularités mobiles d'une équation.

Guldberg. — Sur l'intégration des équations différentielles ordinaires. (49-50).

La théorie de l'intégration due à Euler est fondée sur la détermination du facteur intégrant. Mais la détermination de ce facteur exige en général la solution d'équations aux dérivées partielles si compliquées que la méthode en devient illusoire. Mais il y a d'autres fonctions qui jouissent de la même propriété que le facteur d'Euler, et qui ont l'avantage de transformer l'équation différentielle donnée en une équation aux différentielles totales *complètement intégrable*. C'est sur ces fonctions que M. Guldberg présente quelques remarques.

Boussinesq. — Sur la manière dont se régularise au loin, en s'y réduisant à une houle simple, toute agitation confuse mais périodique des flots. (85-88).

Touche. — Calcul des trajectoires fluides. (157-160).

Levavasseur. — Sur les groupes de substitutions dont l'ordre égale le degré. (238-241).

L'auteur énumère les plus intéressants parmi les types de groupes Ω qu'il a déjà trouvés.

Castelnuovo et *Enriques.* — Sur les surfaces algébriques admettant un groupe continu de transformations birationnelles en elles-mêmes. (242-244).

M. Picard, à qui l'on doit la théorie générale des surfaces qui admettent des transformations birationnelles en elles-mêmes a considéré en particulier le cas où le groupe de transformations se compose de ∞^2 transformations deux à deux changeables, ce qui l'a conduit à la classe des surfaces hyperelliptiques. Dans les autres cas, il a montré que la surface contient un ou plusieurs faisceaux de courbes rationnelles ou elliptiques. C'est ce dernier cas que MM. Castelnuovo et Enriques approfondissent au point de vue géométrique.

Painlevé. — Sur les surfaces algébriques qui admettent un groupe continu de transformations birationnelles. (318-321).

Les résultats obtenus par M. Painlevé achèvent la solution de la question, posée par M. Picard, sur les surfaces qui admettent un groupe fini G de transformations birationnelles.

Soit

$$(1) \qquad S(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface algébrique admettant un groupe G dont une transformation infinitésimale est définie par les fonctions rationnelles X, Y, Z de x, y, z. Si l'on envisage le système

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = X(x, y, z), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dt} = Z(x, y, z),$$

deux cas sont possibles :

1° Ou bien les coordonnées x, y, z s'expriment en fonctions abéliennes de deux paramètres u, v; ce cas a été complètement élucidé par M. Picard;

2° Ou bien l'intégrale générale de (2) est rationnelle, ou simplement périodique, ou doublement périodique en t, et la surface S possède un faisceau de courbes Γ de genre zéro, ou de genre un et de même module. C'est ce cas que traite M. Painlevé.

Il établit d'abord que l'équation du faisceau des courbes Γ peut toujours se mettre sous la forme

$$C = R(x, y, z),$$

R étant rationnel. Moyennant une transformation birationnelle on peut faire en sorte que l'équation de Γ prenne la forme $z = z_0$.

Cela posé, on écrit sous forme irréductible l'équation de la courbe

$$S(x, y, z_0) = 0.$$

Soit

$$P(x, y, z_0, Z_0) = 0$$

l'équation ainsi obtenue, Z_0 s'exprimant rationnellement en x, y, z et étant lié à z_0 par une relation algébrique $G(z_0, Z_0) = 0$. Le genre de P est 0 ou 1.

M. Painlevé établit que, si la surface S admet effectivement un groupe G, les coordonnées x, y, z s'expriment rationnellement en fonction de z_0, Z_0 et de u, ou en fonction de

$$z_0, Z_0, u, U = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)},$$

et cela de telle façon que z_0, Z_0, u (ou z_0, Z_0, u, U) soient rationnels en x, y, z.

Il est dès lors en état d'énumérer toutes les surfaces qui rentrent dans la catégorie étudiée :

1° La surface est uniformément unicursale;

2° La surface correspond birationnellement au cylindre

$$G(\xi, \eta) = 0.$$

la courbe G étant de genre $p \geq 1$; elle possède par suite p intégrales de différentielle totale de première espèce j, qui sont fonctions l'une de l'autre;

3° La surface correspond birationnellement à la multiplicité ξ, η, u, U définie par les équations

$$G(\xi, \eta) = 0, \qquad U = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)},$$

G_1 étant de genre $p \gtreqless 1$; la surface par suite $(p+1)$ intégrales dont p sont fonctions l'une de l'autre;

4° Les coordonnées x, y, z s'expriment en fonction abélienne (à trois ou quatre périodes) de deux paramètres u, v.

Toutes ces surfaces admettent un groupe fini G, dépendant au moins d'un paramètre. Ce qui précède permet, en se servant des travaux de Lie, d'énumérer explicitement tous les groupes G qu'admettent ces diverses surfaces, et par suite tous les groupes continus finis de substitutions algébriques à deux variables (que ces groupes dépendent algébriquement des constantes ou non).

Serret (*Paul*). — Sur les hyperboles équilatères d'ordre quelconque. (340-342).

Les courbes que l'auteur appelle *équilatères* d'ordre n et dont il étudie les propriétés sont celles que définit l'équation

$$\Phi_{n,0} + \Phi_{n-2}(x, y) = 0$$

et dont les asymptotes forment un faisceau régulier $\Phi_{n,0}$.

Faurie. — Sur les déformations permanentes et la rupture des corps solides. (343-345).

Serret (*Paul*). — Sur les faisceaux réguliers et les équilatères d'ordre N. (372-375).

Stæckel. — Sur un groupe continu de transformations avec vingt-huit paramètres qu'on rencontre dans la théorie de la déformation des surfaces. (396-397).

Étant donné un couple de surfaces applicables l'une sur l'autre

$$S_1(x_1, y_1, z_1) \quad \text{et} \quad S_2(x_2, y_2, z_2),$$

on forme un nouveau couple

$$\Sigma_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \quad \text{et} \quad \Sigma_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$$

en faisant

$$(1) \quad \begin{cases} \xi_1 = f_1(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2), & \xi_2 = f_2(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2), \\ \eta_1 = g_1(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2), & \eta_2 = g_2(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2), \\ \zeta_1 = h_1(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2), & \zeta_2 = h_2(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2). \end{cases}$$

L'auteur détermine toutes les substitutions (1) qui transforment chaque

couple de surfaces applicables l'une sur l'autre en un couple de même nature. M. P. Adam avait déjà donné une solution partielle de ce problème.

Mendeleeff. — Sur un théorème de Géométrie. (421-422).

L'aire comprise entre une parabole et deux ordonnées parallèles à son axe est égale à celle d'un trapèze rectangle ayant pour hauteur la portion de l'axe des x interceptée par les pieds des deux ordonnées, pour petite base la première ordonnée et pour quatrième côté une droite qui coupe la parabole en un point dont la projection divise la hauteur dans le rapport de 2 à 1.

Serret (Paul). — Sur les équilatères comprises dans les équations $0 = \Sigma_1^{2n-2} l_1 T^n \equiv H_n$, $0 = \Sigma_1^{2n-1} l_1 T_1^n \equiv H_n + \lambda H'_1$. (438-442).

Stæckel. — Sur l'intégration de l'équation différentielle de Hamilton. (489-492).

Étant donnée une équation différentielle de Hamilton

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k \left(\frac{\partial W}{\partial q_k}\right)^2 = H + \alpha_1,$$

il s'agit de déterminer une solution complète

$$W = V(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

M. Stæckel trouve des types de pareilles équations en supposant que les quantités $\left(\frac{\partial W}{\partial q_k}\right)^2$ soient des fonctions linéaires des constantes arbitraires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial q_k}\right)^2 = \varphi_{k0} + \varphi_{k1}\alpha_1 + \ldots + \varphi_{kn}\alpha_n,$$

les fonctions φ, dont le premier indice est k ne dépendant que de q_k.

Si l'on appelle $\Phi_{k\lambda}$ le déterminant adjoint de $\varphi_{k\lambda}$ par rapport au système des n^2 quantités $\varphi_{11}, \ldots, \varphi_{nn}$, et que l'on pose

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{k\lambda}\Phi_{k\lambda} = \Phi, \qquad \sum_{k=1}^{n} \varphi_{k0}\Phi_{k\lambda} = \Psi_\lambda,$$

l'équation

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi_{k1}}{\Phi}\left(\frac{\partial W}{\partial q_k}\right)^2 = \frac{\Psi_1}{\Phi} + \alpha_1$$

admet la solution complète

$$W = \sum_{k=1}^{n} \int \sqrt{2\varphi_{k0} + 2\varphi_{k1}\alpha_1 + \ldots + 2\varphi_{kn}\alpha_n}\, dq_k.$$

Cette proposition conduit l'auteur à une généralisation d'un théorème connu de Liouville, généralisation qui permet d'utiliser tout progrès réalisé dans l'intégration des équations de Hamilton pour trouver des types nouveaux intégrables ou, en d'autres termes, pour former de nouveaux éléments linéaires dont on puisse déterminer les lignes géodésiques.

Andrade. — Sur une amplification mécanique de la composante horizontale de la rotation de la Terre. (511-512).

Coret. — Sur un appareil hydraulique propre à mettre en évidence le mouvement de rotation de la Terre. (512-514).

Fabre. — Intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, à une fonction x et à n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. (514-517).

Von Koch. — Sur une classe d'équations linéaires aux dérivées partielles. (517-519).

L'auteur indique quelques résultats relatifs aux équations

$$ax^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2bxy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+cy^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+px\frac{\partial z}{\partial x}+qy\frac{\partial z}{\partial y}+\varphi z=0,$$

où a, b, c, p, q sont des constantes (dont les trois premières vérifient l'inégalité $ac-b^2>0$), et φ une fonction de x et y assujettie à la seule condition d'être développable dans un domaine donné C suivant les puissances positives et négatives de x, y.

On peut trouver une intégrale de la forme

$$x^\rho y^\mu \sum_{\alpha,\beta} G_{\alpha\beta}^{(\rho\mu)} x^\alpha y^\beta,$$

ρ et μ étant deux constantes dont l'une est arbitraire et la série précédente étant convergente dans le même domaine C que la série qui représente $\varphi(x, y)$.

Thybaut. — Sur les surfaces dont les lignes de courbure forment un réseau à invariants tangentiels égaux. (519-522).

La détermination des surfaces S, dont les lignes de courbure forment un réseau à invariants tangentiels égaux, dépend de la résolution d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre.

On peut déterminer toutes les surfaces S, dont les inverses sont également des surfaces S. M. Thybaut montre que la recherche des couples de surfaces inverses S se ramène à la détermination des couples de surfaces minima qui sont les focales d'une congruence rectiligne et dont les asymptotiques se correspondent. Réciproquement tout couple de surfaces minima possédant ces propriétés fait connaître un couple de surfaces inverses S.

Abordant ensuite la solution analytique de la détermination de ces deux

surfaces S et S_1, l'auteur fait voir qu'elle dépend d'une équation aux dérivées partielles du second ordre et peut être entièrement résolu.

On peut, en outre, démontrer les propriétés géométriques suivantes :

Chacune des surfaces S, S_1 a même représentation sphérique de ses lignes de courbure qu'une surface minima.

Les asymptotiques de l'une des deux surfaces S, S_1 correspondent sur l'autre à un réseau conjugué à invariants ponctuels égaux, et réciproquement deux surfaces inverses jouissant de cette propriété sont des surfaces S.

Si une surface est telle que la demi-somme de ses rayons de courbure en un point M soit égale à la distance d'un point fixe O au point A correspondant de la développée moyenne, toute surface inverse par rapport au point O possède la même propriété et forme avec la première un couple de surfaces S.

Adam (*P.*). — Sur la déformation des surfaces. (551-553).

Soient (σ) et (σ_1) deux surfaces applicables l'une sur l'autre ; (Σ) le lieu du milieu de la corde joignant les points correspondants de ces deux surfaces.

Les deux surfaces (Σ), (Σ_1) ne peuvent jamais être convexes en même temps aux points correspondants.

Quand (Σ) est une développable, (Σ_1) est toujours à courbures opposées. La projection de la génératrice de (Σ) sur le plan tangent à (Σ_1) fait, avec l'une quelconque des directions principales de cette dernière surface, un angle aigu égal aux angles aigus de la seconde direction principale avec les directions asymptotiques de (Σ_1).

Si (Σ_1) est une sphère, on a, entre les rayons de courbure principaux ρ, ρ' de (Σ) et les distances δ, δ' du point correspondant de (σ) ou de (σ_1) aux directions principales de Σ, la relation simple

$$\frac{\rho}{\rho'} = -\frac{\delta'^2}{\delta^2}.$$

Si (Σ) est un cylindre, le couple (σ), (σ_1) est composé de deux surfaces réglées applicables l'une sur l'autre avec parallélisme des génératrices correspondantes.

Enfin, M. P. Adam a déterminé tous les couples (σ), (σ_1) pour lesquels (Σ) est une quadrique.

Petrovitch. — Sur l'équation différentielle binôme du premier ordre. (632-635).

L'auteur considère l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^m = \mathrm{R}(x, \mathrm{X}, y),$$

où R est rationnel en x, X, y, en supposant x et X liés par une relation algébrique $\mathrm{G}(x, \mathrm{X}) = 0$. L'équation se ramène d'ailleurs à la forme

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{P}_1(x, \mathrm{X}, y)\sqrt[m]{\mathrm{P}_2(x, \mathrm{X}, y)}}{\mathrm{P}_3(x, \mathrm{X}, y)},$$

où P_1, P_2, P_3 sont des polynômes en x, X, y. Il ne peut y avoir d'intégrales

uniformes et transcendantes en x que si G est du premier degré en x. S'il n'en est pas ainsi, toute intégrale uniforme en x est rationnelle; mais il peut y avoir des intégrales uniformes et transcendantes en x et X, et même l'intégrale générale peut être de telle nature.

Étudiant d'abord le cas où l'intégrale générale de (1) est uniforme en (x, X) (cas où l'équation est à points critiques fixes), M. Petrovitch montre qu'alors l'équation ou bien est linéaire, ou bien se ramène à une équation de Riccati, ou aux quadratures.

Si l'intégrale générale n'est pas uniforme en (x, X) il peut y avoir des intégrales particulières de telle nature. L'auteur précise les types d'équations (1) pouvant admettre de telles intégrales.

Vazquez-Prada. — Nouvelle méthode pour extraire les racines des nombres. (635-637).

Fontviolant (de). — Expression de la charge supportée par l'arbre d'une turbine hydraulique en marche. — Théorème relatif à l'effet dynamique de l'eau sur les aubages. (637-639).

Le théorème en question fournit une détermination très simple de l'effet dynamique. On peut l'énoncer ainsi :

A un facteur constant près égal à la masse liquide débitée par seconde, l'effet dynamique de l'eau sur une turbine parallèle est représenté en grandeur, direction et sens par la résultante de la vitesse (relative ou absolue) d'entrée et d'une vitesse égale et contraire à la vitesse (relative ou absolue) de sortie.

Goursat. — Sur un problème relatif à la détermination des intégrales d'une équation aux dérivées partielles. (671-673).

Quand on cherche à déterminer une intégrale d'une équation du second ordre

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

passant par deux courbes données quelconques C, C', ayant en commun un point O, et représentée dans le voisinage de ce point par une série entière convergente en x et y, on est conduit pour calculer les valeurs des dérivées successives au point O, à des systèmes d'équations linéaires qui déterminent *en général* sans ambiguïté toutes ces dérivées. M. Goursat signale quelques résultats curieux relatifs à la discussion des équations linéaires qui déterminent les coefficients.

Pour que ces équations soient incompatibles ou indéterminées, il faut que le rapport anharmonique des tangentes aux deux courbes C, C' et des tangentes aux deux caractéristiques issues du point O soit une racine de l'unité.

Lorsque les deux courbes C, C' sont réelles, on arrive à des résultats très différents, suivant que les caractéristiques de l'équation (1) sont réelles ou imaginaires.

Dans le premier cas, il ne peut y avoir indétermination que si les tangentes aux deux courbes données sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes aux caractéristiques. Dans le second cas, il en est tout autrement. Si, par exemple, les tangentes aux caractéristiques sont les droites isotropes, pour

qu'il y ait incompatibilité ou indétermination, l'angle des tangentes aux deux courbes C, C' doit être commensurable avec π.

Autonne. — Sur les variétés unicursales à deux dimensions (673-676).

Soit une substitution Cremona

$$s = |x_i \varphi_i| \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où les x_i sont des coordonnées homogènes et les φ_i des formes ternaires en x_i de même degré, et soit ω un point fondamental, c'est-à-dire un point fixe de la courbe générale Γ_c du réseau

$$\Sigma c_i \varphi_i = 0 \qquad (c_i = \text{const. arbitr.}).$$

Les deux propositions suivantes sont connues depuis longtemps :

1° Lorsque ω est un point μ^{uple} de Γ_c, sans autre particularité, s fait correspondre à ω non un point unique, mais une *courbe fondamentale* unicursale de degré μ;

2° Lorsque μ est un point σ^{uple}, sans autre particularité, pour une courbe algébrique A, le degré de la courbe image de A s'abaisse de $\mu\sigma$ unités.

Que deviennent ces énoncés quand on ne fait aucune hypothèse spéciale sur les allures de Γ_c et de A au point ω? C'est là une question non encore examinée dont M. Autonne donne la solution, en généralisant un peu le problème.

Floquet. — Sur les équations différentielles linéaires homogènes dont l'intégrale générale est uniforme. (676-679).

Fouché. — Sur le déplacement d'un trièdre trirectangle autour de son sommet, la position de ce trièdre dépendant de deux paramètres. (763-765).

Picard (Ém.). — Sur l'extension des idées de Galois à la théorie des équations différentielles. (789-792).

L'auteur a développé dans les *Comptes rendus* (8 octobre 1894) les deux propositions fondamentales de cette théorie. Il revient aujourd'hui sur ce sujet pour étendre la définition d'une équation auxiliaire qui joue un rôle essentiel. Se donnant une équation à coefficients rationnels

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m y = 0,$$

M. Picard considère une fonction V que l'on peut réduire à la forme

$$V = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_m y_m,$$

les u étant des fonctions arbitrairement choisies de x et les y désignant un

système fondamental d'intégrales. Cette fonction V satisfait à une équation d'ordre m^2,

$$(2) \qquad \frac{d^{m^2}}{dx^{m^2}} V + P_1 \frac{d^{m^2-1}}{dx^{m^2-1}} V + \ldots + P_{m^2} V = 0,$$

les P étant rationnels et les y s'exprimant linéairement en fonction de V et de ses dérivées. A toute intégrale de (2) correspond un système d'intégrales fondamentales de (1), à moins que V ne satisfasse à une certaine équation φ facile à former.

En général, l'équation (2) n'aura aucune solution commune avec une équation différentielle algébrique d'ordre inférieur à m^2, si l'on fait abstraction des solutions qui satisfont à φ.

Mais il pourra, dans certains cas, en être autrement. Il est possible qu'une équation différentielle algébrique

$$(3) \qquad f\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}\right) \qquad (p < m^2),$$

ait avec (2) une solution commune n'appartenant pas à φ. M. Picard avait supposé antérieurement que cette équation était irréductible. Cela n'est pas nécessaire; il suffit de prendre parmi toutes les équations algébriques telles que (3) celles ou l'une de celles qui sont d'*ordre moindre*.

On est ainsi conduit, de la manière la plus satisfaisante, à la notion de *groupe de transformations* d'une équation linéaire, groupe qui est l'analogue de celui de Galois pour une équation algébrique.

Les considérations précédentes ne sont d'ailleurs pas bornées aux équations linéaires.

Poincaré (*H.*). — Remarque sur un mémoire de M. Jaumann intitulé : *Longitudinales Licht.* (792-793).

M. Jaumann attribue les rayons cathodiques à des vibrations longitudinales de l'éther. Il suppose que, dans les gaz raréfiés, le pouvoir diélectrique ε est variable, et pour représenter les oscillations électriques dans un pareil milieu, il arrive à des équations qui peuvent être écrites sous la forme

$$A\left(\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0 X + \frac{X_0}{K}\theta\right) = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y},$$

$$A\left(\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0 Y + \frac{Y_0}{K}\theta\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z},$$

$$A\left(\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0 Z + \frac{Z_0}{K}\theta\right) = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x},$$

où A est l'inverse de la vitesse de la lumière; X, Y, X et L, M, N les composantes de la force électrique et de la force magnétique; X_0, Y_0, Z_0 les valeurs moyennes de X, Y, X; ε_0 le pouvoir diélectrique moyen; k une constante, et

$$\theta = \frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_0 X + \frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_0 Y + \frac{\partial}{\partial z}\varepsilon_0 Z.$$

M. Poincaré fait à la théorie de M. Jaumann de graves objections. Si l'on

différentie les trois équations précédentes respectivement par rapport à x, y, z et que l'on ajoute, on trouve

$$A\left[\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{K}\left(\frac{\partial}{\partial x}X_0\theta + \frac{\partial}{\partial y}Y_0\theta + \frac{\partial}{\partial z}Z_0\theta\right)\right] = 0.$$

Cette équation exprimerait que les rayons cathodiques suivraient des lignes de force, au lieu de se propager en ligne droite. De plus ils ne seraient pas déviés par l'aimant.

Floquet. — Sur l'équation de Lamé. (805-808).

Soit une équation différentielle, linéaire, à coefficients elliptiques, de mêmes périodes 2ω et $2\omega'$. L'auteur développe sur un exemple simple une méthode qui, dans certains cas, permet d'obtenir aisément les conditions d'uniformité de l'intégrale générale, puis son expression sous forme explicite.

Il prend pour exemple une équation du second ordre, admettant un seul point singulier $x = \alpha$ dans le parallélogramme des périodes. Une pareille équation, dont l'intégrale est supposée méromorphe, est nécessairement de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2H\frac{dy}{dx} + [K - n(n+1)\,p(x-\alpha)]y = 0,$$

n étant un entier positif, et H, K des constantes quelconques. Ces sortes d'équations sont bien connues : on les rencontre lorsqu'on intègre par la méthode habituelle l'équation de Lamé, à laquelle on les ramène d'ailleurs en posant $y = e^{Hx}z$.

Beudon. — Sur l'extension de la méthode de Cauchy aux systèmes d'équations aux dérivées partielles d'un ordre quelconque. (808-811).

La notion de multiplicités caractéristiques formées *d'éléments unis* a perfectionné, comme on sait, la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. M. Beudon se propose de montrer comment on peut faire une théorie analogue pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque, et de déterminer leur forme générale.

Le développement de cette théorie le conduit à la proposition suivante :

« Étant donné un système complètement intégrable définissant z en fonction de $x_1, \ldots, x_n$ et tel que toutes ses équations ont été amenées à être du même ordre p, si la différence entre le nombre des dérivées d'ordre p de z et le nombre de ces équations est inférieur au nombre des variables, la méthode de Cauchy est applicable et le système jouit des mêmes propriétés que les systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. »

Dans le cas contraire on devra appliquer la méthode de M. Darboux pour compléter le nombre des équations.

Borel. — Sur les fonctions de deux variables réelles et sur la notion de fonction arbitraire. (811-812).

2ᵉ Partie.

L'auteur a récemment appelé l'attention sur les fonctions d'une variable réelle admettant des dérivées de tous les ordres sans être analytiques. Il a indiqué pour ces fonctions un développement en série tel que les dérivées de la fonction s'obtiennent en différentiant la série terme à terme.

Il étend ce théorème à une fonction de deux variables réelles x, y admettant des dérivées partielles dans le rectangle

$$-\pi \leqq x \leqq +\pi, \qquad -\pi \leqq y \leqq +\pi.$$

Une telle fonction peut être développée en une série de la forme

$$\begin{aligned}\sum_m \sum_n & A_{mn} \cos mx \cos ny + B_{mn} \sin mx \cos ny + C_{mn} x^m \cos ny \\ & + A'_{nm} \cos mx \sin ny + B'_{mn} \sin mx \sin ny + C'_{mn} x^m \sin ny \\ & + A''_{mn} y^n \cos mx + B''_{mn} y^n \sin mx + C''_{mn} x^m y^n.\end{aligned}$$

Le développement est convergent, ainsi que toutes ses dérivées partielles prises terme à terme, et ces dérivées partielles représentent par suite les dérivées de la fonction dans le domaine considéré.

Adam (*P.*). — Sur les systèmes orthogonaux. (812-815).

Quelle est la surface qui, dans tous les mouvements possibles, engendre une famille de Lamé (c'est-à-dire appartenant à un système triplement orthogonal)?

Il est probable, a dit M. Darboux, que la sphère seule répond à la question.

Par l'emploi d'un système particulier de coordonnées tangentielles, M. P. Adam établit l'exactitude de cette prévision.

Kœnigs. — Application des invariants intégraux à la réduction au type canonique d'un système quelconque d'équations différentielles. (875-878).

Soit le système d'équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les X sont des fonctions des x, et soit l'intégrale curviligne

$$I = \int (\Xi_1\, dx_1 + \Xi_2\, dx_2 + \ldots + \Xi_n\, dx_n),$$

où les Ξ sont des fonctions des x. Si dans cette intégrale on remplace les x par leurs valeurs d'intégration, l'intégrale I devient une fonction de t. Il peut arriver qu'elle se réduise à une constante; alors I est un *invariant intégral* (Poincaré).

M. Kœnigs indique la condition pour que I soit un invariant intégral; si l'on pose

$$\mathcal{A}(\Xi_i) = \sum_k X_k \frac{\partial \Xi_i}{\partial x_k},$$

cette condition est

$$(2) \qquad \delta\left(\sum_i X_i \Xi_i\right) + \sum_i [\mathcal{A}(\Xi_i)\,\delta x_i - X_i\,\delta\Xi_i] = 0.$$

Elle doit avoir lieu quels que soient les δx_i. On en déduit que

$$\Omega = \sum_i X_i \Xi_i$$

est une intégrale du système (1).

Cela posé on démontre que toute forme linéaire de différentielles

$$\Theta_d = \sum_i \Xi_i\, dx_i$$

est réductible à l'un ou à l'autre des deux types

$$(A) \qquad dy - z_1\,dy_1 - z_2\,dy_2 - \ldots - z_p\,dy_p,$$

$$(B) \qquad z_1\,dy_1 + z_2\,dy_2 + \ldots + z_p\,dy_p.$$

Que deviennent les équations différentielles (1) lorsqu'on introduit les nouvelles variables y et z? L'application de la formule (2) prouve que, si la forme réduite de Θ est du type (A), les équations (1) se transforment en

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial H}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{dz_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$$\frac{dy}{dt} = H - \sum_i z_i \frac{\partial H}{\partial z_i};$$

H dépend de $y_1, y_2, \ldots, y_p, z_1, \ldots, z_p$, mais non de y. On est donc ramené à un système canonique suivi d'une quadrature. L'intégrale Ω devient l'intégrale H, en sorte que le fait que Ω est une intégrale apparaît comme une extension de l'intégrale des forces vives.

On reconnaît par ce qui précède que chaque invariant intégral de (1) est attaché à un problème de variations qui est résolu par les équations du système (1).

Lerch. — Sur le nombre des classes de formes quadratiques de déterminant négatif. (878-881).

Autonne. — Sur les variétés unicursales à trois dimensions. (881).

Goursat. — Sur les systèmes orthogonaux. (883-884).

Démonstration purement géométrique de cette proposition énoncée par M. Darboux comme très probable : La sphère est la seule surface qui, dans tous les mouvements possibles, engendre une famille de Lamé.

Bertrand (J.). — Note sur un théorème de Géométrie. (922).

Démonstration très simple du théorème sur la sphère, énoncé comme probable par M. Darboux, et déjà démontré par M. Adam et par M. Goursat.

Borel. — Sur les équations aux dérivées partielles à coefficients constants et les fonctions non analytiques. (933-935).

Étant donnée l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \alpha^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \psi(x, y),$$

on peut, pour certaines valeurs de la constante α, se donner pour ψ une fonction analytique et trouver comme unique solution pour φ une fonction non analytique.

Cosserat. — Sur le roulement de deux surfaces l'une sur l'autre. (935-938).

On peut supposer connue la surface Σ enveloppe des plans entraînés par une surface S roulant sur une surface S_1, et chercher les mouvements de roulement correspondants. M. Cosserat indique des résultats qui mettent en évidence l'intérêt que présente ce procédé particulier de détermination de couples de surfaces applicables l'une sur l'autre.

Kœnigs. — Sur les problèmes de variations qui correspondent aux droites de l'espace. (1122-1125).

La recherche des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la variable x qui annulent la variation première de l'intégrale

$$I = \int f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n; y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)\, dx,$$

où $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ sont les dérivées des fonctions y_i, se ramène à l'intégration des systèmes d'équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'_i}\right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0.$$

S'il n'y a qu'une fonction y, le système précédent se réduit à une seule équation du second ordre, et si l'on sait intégrer celle-ci le problème de variation se réduit à une simple quadrature (Darboux).

Il n'en est plus ainsi dans le cas d'un plus grand nombre de variables, comme M. Kœnigs le prouve par l'examen du cas particulier où les équations (1) sont équivalentes à

$$(2) \qquad \frac{d^2 y_1}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2 y_2}{dx^2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^2 y_n}{dx^2} = 0.$$

Dans ce cas, bien qu'on connaisse les intégrales des équations (2), chaque solution du problème de variation exige, en outre, la connaissance d'une solution d'un certain système aux dérivées partielles.

Borel. — Sur la sommation des séries divergentes. (1125-1127).

Soit

$$\varphi(a) = c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \ldots$$

une fonction entière telle que, a augmentant indéfiniment, $\frac{\varphi(a)}{a^n}$ augmente indéfiniment quel que soit n. Soit, d'autre part,

$$(u) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

une série convergente ou divergente et s_n la somme de ses n premiers termes. Si la série

$$\theta(a) = \frac{1}{\varphi(a)}(c_0 s_0 + c_1 a s_1 + c_2 a^2 s_2 + \ldots)$$

converge quelle que soit la valeur positive de a et si sa somme tend vers une limite lorsque a augmente indéfiniment, la série (u) sera dite *sommable* et cette limite sera dite sa *somme*.

Si maintenant $u_1, u_2, \ldots$ sont des fonctions holomorphes d'une variable complexe z dans un domaine D, la série (u) sera dite *uniformément sommable* dans ce domaine si, d'abord pour toute valeur de a, la série $\theta(a)$ est uniformément convergente dans D, et si, de plus, la somme $\theta(a, z)$ tend uniformément vers une limite $F(z)$, quand a augmente indéfiniment.

Ces définitions posées, M. Borel démontre les théorèmes suivants :

« Si les termes d'une série sont des fonctions holomorphes dans un domaine D d'un seul tenant et si la série est uniformément sommable dans ce domaine, sa somme F est holomorphe dans D ».

« La somme F d'une série uniformément sommable dans un domaine D d'un seul tenant est, lorsque la série converge uniformément dans une portion D′ de D, le prolongement analytique dans D de la fonction que la série représente dans D′ ».

De là, M. Borel tire pour la sommation des séries divergentes un procédé qui exige seulement la connaissance des valeurs numériques des divers termes.

Bougaïef. — Sur le théorème de Taylor transformé. (1127-1129).

L'auteur donne à la formule de Taylor la forme nouvelle

$$\psi(x+h) = \psi(x) + h\psi'(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\psi^{(n)}(x) - \frac{\phi\left[\psi(x) + h\psi'(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\psi^{(n)}(x)\right] - (x+h)}{\phi'\left[\psi(x) + h\psi'(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\psi^{(n)}(x)\right]} + R,$$

qui se distingue par cette particularité que le reste R est une quantité du même ordre de petitesse que h^{n+2}.

Le symbole $\phi(\alpha)$ désigne la fonction inverse de $\psi(\alpha)$.

Autonne. — Sur les variétés unicursales à trois dimensions. (1129-1130).

Tome CXXII; 1896.

Kœnigs. — Sur les invariants intégraux. (25).

Soient le système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

et l'intégrale n-uple

$$I = \int\int\cdots\int M(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\delta x_1\,\delta x_2\ldots\delta x_{n-1}. \tag{2}$$

Pour que I soit un invariant intégral, il faut et il suffit, comme on le sait, que M soit un *multiplicateur* des équations (1).

Ce théorème de M. Poincaré permet de construire tous les invariants intégraux du type (2); il montre dans quelle mesure on peut tirer parti d'un tel invariant connu *a priori*.

Ce sont ces mêmes questions que M. Kœnigs résout pour les invariants intégraux représentés par des intégrales $(n-1)$-uples.

$$I = \int\int\cdots\int \Sigma_i M_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\delta x_1\,\delta x_2\ldots\delta x_{n-1}.$$

La connaissance d'un pareil invariant peut rendre des services analogues à ceux qu'on est en droit d'attendre du théorème de Poisson dans le cas des équations de la Dynamique.

Petrovitch. — Sur un mode de décomposition des intégrales définies. (27-30).

Soit l'intégrale définie

$$J = \int_a^b F(u)\chi(z)\,dz,$$

où $\chi(z)$ est une fonction quelconque et $F(u)$ une fraction rationnelle, holomorphe entre les deux limites $u(a)$ et $u(b)$.

Si l'on développe $F(u)$ en série récurrente suivant les puissances de u, qu'on désigne par r une racine quelconque de l'équation génératrice de cette série récurrente et qu'on pose

$$\theta(x) = \sum_0^\infty \varphi(n)x^n, \qquad \varphi(n) = \int_a^b u^n\chi\,dz.$$

on pourra mettre l'intégrale J sous la forme

$$J = \sum_{r} [A_0 \theta(r) + A_1 r \theta'(r) - \ldots + A_{\lambda-1} r^{\lambda-1} \theta^{(\lambda-1)}(r)],$$

la sommation s'étendant à toutes les racines de l'équation génératrice.

La fonction $\theta(x)$ joue donc le rôle d'élément simple pour l'intégrale J.

Comme application, l'auteur indique la possibilité d'exprimer les fonctions méromorphes doublement périodiques à l'aide d'intégrales de la forme J.

Il signale l'intérêt que les transcendantes θ présentent pour le calcul des intégrales définies.

Borel. — Sur la généralisation de la notion de limite et sur l'extension aux séries divergentes sommables du théorème d'Abel sur les séries entières. (73-74).

Dans une Note récente, M Borel a indiqué comment on peut étendre la notion de somme à une classe étendue de séries divergentes. Il donne actuellement quelques exemples qui prouvent que la théorie des séries divergentes sommables présente avec celle des séries convergentes une analogie remarquable.

L'auteur considère une suite de quantités rangées dans un ordre déterminé

$$s_0, \quad s_1, \quad \ldots, \quad s_n, \quad \ldots.$$

Si la série de terme général $s_{n+1} - s_n$ est sommable et a pour somme s, la quantité s_n sera dite admettre s pour *limite généralisée.*

Cette notion nouvelle permet de donner aux caractères de sommabilité des séries divergentes des énoncés rappelant ceux de certains caractères de convergence. Par exemple, pour qu'une série soit sommable, il est nécessaire que le terme général admette zéro pour limite généralisée.

Une autre conséquence importante est l'extension suivante d'un théorème bien connu d'Abel :

Si une série ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable z est sommable pour $z = z_0$, elle est sommable, ainsi que toutes ses dérivées, pour $z = \rho z_0$, ρ étant un nombre positif quelconque inférieur à 1.

Picard (Ém.). — Sur deux invariants nouveaux dans la théorie générale des surfaces algébriques. (101-104).

Tandis que, pour les courbes algébriques, le genre riemannien est le seul invariant qui présente de l'intérêt, il est utile, dans la théorie des surfaces algébriques, d'introduire le plus grand nombre possible de nombres entiers offrant le caractère d'invariance pour toute transformation birationnelle de la surface.

M. Picard fait connaître deux invariants nouveaux.

Il prend deux fonctions rationnelles, R, R_1 dépendant de deux paramètres

arbitraires et il forme les deux équations

$$R\ (x, y, z) = u,$$
$$R_1(x, y, z) = v,$$

que l'on suppose déterminer un nombre limité ρ de points de la surface, variables avec u et v, pour lesquels le déterminant fonctionnel de x et y, par rapport à u et à v, n'est pas identiquement nul.

Soit π le nombre des points qui, parmi ces ρ points, peuvent être pris arbitrairement pour un système donné de valeurs de u et v; la différence $\rho - \pi$ aura, pour toutes les fonctions rationnelles possibles R et R_1, un certain *minimum* D qui sera différent de zéro (si la surface n'appartient pas à une certaine classe exceptionnelle). D est le premier des invariants annoncés.

Le second invariant r est le minimum de ρ fourni par toutes les fonctions rationnelles R et R_1 pour lesquelles la différence $\rho - \pi$ atteint le minimum D.

Dans le cas des courbes, on a $D = 0$ et $r = p + 1$.

Le fait que, pour les surfaces, D est, en général, différent de zéro, constitue une différence essentielle entre la théorie des courbes et celle des surfaces.

Kœnigs. — Sur les problèmes de variations relatifs aux intégrales doubles. (126-128).

On considère une surface S passant par un contour donné, et l'on forme l'intégrale double, étendue à l'aire limitée par le contour

$$I = \iint f(p, q)\, dx\, dy,$$

où p et q sont les dérivées premières de la coordonnée z considérée comme fonction de x et y.

Si l'on cherche à déterminer S de sorte que l'intégrale I ait sa première variation nulle, on est conduit à l'équation

$$r\frac{\partial^2 f}{dp^2} + 2s\frac{\partial^2 f}{\partial p\, dq} + t\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = 0.$$

M. Kurschak a trouvé que, par la transformation de Legendre suivie d'un changement de variables, on est conduit à une équation de Laplace à invariants égaux.

M. Kœnigs précise le rôle de cette équation de Laplace et montre du même coup qu'il existe des liens très étroits entre le problème de variations et celui de la déformation infiniment petite d'une surface.

Poincaré. — Sur l'équilibre d'un corps élastique. (154-159).

Solution du problème de l'équilibre élastique, problème qu'on peut énoncer analytiquement comme il suit :

Trouver trois fonctions ξ, η, ζ qui, à l'intérieur du corps, satisfassent aux

équations

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\,\Delta\xi=0\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\,\Delta\eta=0\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\,\Delta\zeta=0\end{aligned}\right\}\left(\theta=\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)$$

et qui, à la surface S du corps, soient telles que les trois expressions

$$P_x=l\lambda\theta+\mu\left(l\frac{\partial\xi}{\partial x}+m\frac{\partial\xi}{\partial y}+n\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)+\mu\left(l\frac{\partial\xi}{\partial x}+m\frac{\partial\eta}{\partial x}+n\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)$$

$$P_y=m\lambda\theta+\mu\left(l\frac{\partial\eta}{\partial x}+m\frac{\partial\eta}{\partial y}+n\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)+\mu\left(l\frac{\partial\xi}{\partial y}+m\frac{\partial\eta}{\partial y}+n\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)$$

$$P_z=n\lambda\theta+\mu\left(l\frac{\partial\zeta}{\partial x}+m\frac{\partial\zeta}{\partial y}+n\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)+\mu\left(l\frac{\partial\xi}{\partial z}+m\frac{\partial\eta}{\partial z}+n\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)$$

(où l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale à S) prennent des valeurs données.

Gyldén (*H*). — Sur une équation différentielle du second ordre, non linéaire et à coefficients doublement périodiques. (161-165).

Il s'agit de l'équation

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+(1+2g)k^2\operatorname{cn}2\xi\,y-k^2\operatorname{sn}2\xi\,(y^2-g)-\frac{2}{3}k^2\operatorname{cn}2\xi\,y^3=-\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2X,$$

dont l'intégration joue un rôle très important dans le calcul des inégalités planétaires à longue période. Cette intégration entraînerait de grandes difficultés dans le cas le plus général. Mais si l'on ne cherche la solution du problème qu'au point de vue de l'Astronomie (cas où X désigne une suite de termes périodiques connus), on pourra considérer y comme une quantité du premier ordre et g comme une quantité du second ordre égale à la partie constante de y^2. En conséquence, dans une première approximation, l'équation proposée se réduira à une équation de Lamé du type le plus simple, et M. Gyldén montre comment on peut partir de cette première approximation pour développer l'intégrale en une série de termes d'ordre décroissant.

Goursat. — Sur les équations linéaires et la méthode de Laplace. (169-172).

Soit

$$(1)\qquad \frac{\partial^2\Theta}{\partial u\,\partial v}+a\frac{\partial\Theta}{\partial u}+b\frac{\partial\Theta}{\partial v}+c\Theta=0$$

une équation linéaire où a, b, c sont des fonctions des deux variables indépendantes u et v.

Il peut arriver qu'entre $n+1$ intégrales linéairement distinctes il existe une relation linéaire et homogène où les coefficients ne dépendent que d'une seule des variables u, v. S'il en est ainsi, la suite de Laplace relative à l'équation (1) se termine dans un sens après $n-1$ transformations au plus.

Plus généralement, s'il existe entre n intégrales linéairement distinctes de l'équation (1) et la fonction $e^{-\int b\,du}$ une relation linéaire et homogène où les coefficients ne dépendent que de v, la suite de Laplace relative à cette équation se termine d'un côté après $n-1$ transformations au plus.

Fontené. — Sur l'addition des arguments dans les fonctions périodiques du second ordre. (172-175).

Störmer. — Sur les solutions entières $x_1, \ldots, x_n, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n, k$ de l'équation

$$x_1 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{\varkappa_1} + x_2 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{\varkappa_2} + \ldots + x_n \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{\varkappa_n} = k\,\frac{\pi}{4}.$$

(175-177).

Pour que les nombres entiers $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ satisfassent, aux multiples de $\frac{\pi}{2}$ près, à l'équation

$$x_1 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{\varkappa_1} + x_2 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{\varkappa_2} + \ldots + x_n \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{\varkappa_n} = k\,\frac{\pi}{4},$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$1 + \varkappa_1^2 = 2^{\delta_1} p_1^{|\alpha_1|} p_2^{|\beta_1|} \ldots p_s^{|\rho_1|},$$
$$1 + \varkappa_2^2 = 2^{\delta_2} p_1^{|\alpha_2|} p_2^{|\beta_2|} \ldots p_s^{|\rho_2|},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$1 + \varkappa_n^2 = 2^{\delta_n} p_1^{|\alpha_n|} p_2^{|\beta_n|} \ldots p_s^{|\rho_n|};$$

$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ sont égaux à 0 ou à 1; $x_1\delta_1 + \ldots + x_n\delta_n + k$ doit être pair; $p_1, p_2, \ldots, p_s$ sont des nombres premiers de la forme $4a+1$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \nu_1, \ldots, \rho_n$ des entiers assujettis aux relations

$$x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + \ldots + x_n\nu_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$\varkappa_\lambda + \varkappa_\mu$ doit être divisible par p_m si le produit correspondant $\nu_\lambda\nu_\mu$ est négatif, et non divisible par p_m si ce produit est positif ou nul.

Boulanger. — Sur certains invariants relatifs au groupe de Hesse. (178-180).

Levavasseur. — Sur les groupes d'opérations. (180-182).

Kriloff. — Théorie du tangage sur une mer houleuse. (183-186).

La théorie du roulis est fondée sur l'hypothèse que les dimensions transversales du navire sont petites par rapport à celle de la vague. Cette hypothèse est inadmissible pour le tangage, dont M. Kriloff donne une théorie qui en est affranchie.

Lecornu. — Sur l'équilibre d'une enveloppe ellipsoïdale. (218-220).

L'équilibre d'une surface flexible et inextensible, soumise à des forces données, est régi par un système d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre que M. Lecornu a établies en 1880 (*Journal de l'École Polytechnique*).

L'auteur est parvenu à traiter le cas d'une membrane affectant la forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux et tendue par une pression constante. Un seul état d'équilibre est compatible avec la condition que les tensions soient partout finies et continues.

La méthode suivie consiste à employer d'abord les coordonnées elliptiques, à transformer les équations d'équilibre en les rapportant aux génératrices imaginaires de l'ellipsoïde, à effectuer l'intégration et à déterminer les fonctions arbitraires dans ces conditions, puis à faire disparaître les imaginaires par le retour aux coordonnées elliptiques.

En désignant par a, b, c les demi-axes de l'ellipsoïde, par P la somme $a^2+b^2+c^2$, par $2\,\mathrm{Q}$ la somme $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$, par R le produit $a^2b^2c^2$, par u et v les coordonnées elliptiques, par Π la pression sur l'unité de surface, par n_1 et n_2 les tensions rapportées à l'unité de longueur qui s'exercent normalement aux éléments linéaires correspondant à du et dv, par t les tensions tangentielles qu'éprouvent ces mêmes éléments, on a les formules

$$n_1 = \frac{\Pi}{abc}\,\frac{\sqrt{uv}}{u(u-v)}\,[u^2v - \mathrm{P}uv + \mathrm{Q}(u+v) - \mathrm{R}],$$

$$n_2 = -\frac{\Pi}{abc}\,\frac{\sqrt{uv}}{v(u-v)}\,[uv^2 - \mathrm{P}uv + \mathrm{Q}(u+v) - \mathrm{R}],$$

$$t = -\frac{\sqrt{(a^2-u)(u-b^2)(u-c^2)}\,\sqrt{(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)}}{u-v}.$$

La discussion de ces équations montre que t est nul sur les trois sections principales. Elle prouve aussi qu'il existe quatre ombilics mécaniques, c'est-à-dire quatre points pour lesquels on a $n_1 = n_2$ et $t = 0$; ils ne coïncident pas avec les ombilics géométriques.

M. Lecornu montre en terminant comment on intègre l'équation des *lignes isostatiques*, c'est-à-dire des courbes dont chaque élément est normal à la tension qui le sollicite.

Störmer. — Sur les solutions entières $x_1, x_2, \ldots, x_n, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n, k$ de l'équation

$$x_1 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{\varkappa_1} + x_2 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{\varkappa_2} + \ldots + x_n \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{\varkappa_n} = k\frac{\pi}{4},$$

(225-227).

D'Ocagne. — Abaque de l'équation des marées diurnes et semi-diurnes. (298-301).

Blutel. — Sur les surfaces à lignes de courbure sphériques. (301-303).

Soit une surface Σ_0 admettant un système de lignes de courbure sphériques S.

Lorsque le point M décrit une ligne de première courbure sphérique S, le rayon de seconde courbure varie proportionnellement à la distance du centre de seconde courbure à un plan P variable seulement avec S.

Cette remarque entraîne pour la surface Σ_0 une autre propriété que voici : lorsque le point M décrit une ligne de première courbure sphérique S, le centre de seconde courbure se déplace sur une surface du second degré de révolution circonscrite à une sphère qui est elle-même inscrite dans la développable normale à Σ_0 suivant S.

La première des deux propriétés énoncées convient à toutes les surfaces Σ ayant même représentation sphérique qu'une surface Σ_0 à lignes de courbure sphériques, et ces surfaces Σ sont les seules qui possèdent la propriété en question.

Ceci conduit à la détermination de réseaux sphériques satisfaisant à la fois à deux équations de la forme

$$a(\alpha)c + a_1(\alpha)c' + a_2(\alpha)c'' + a_3(\alpha) = a_4(\alpha)A,$$
$$b(\beta)c + b_1(\beta)c' + b_2(\beta)c'' + b_3(\beta) = b_4(\beta)C,$$

où α et β sont les paramètres qui figurent dans l'expression de l'élément linéaire $ds^2 = A^2\,d\alpha^2 + C^2\,d\beta^2$ (les courbes $\beta =$ const. étant les lignes sphériques S), et où c, c', c'' sont les cosinus directeurs de la normale à Σ_0.

La détermination de ces réseaux revient à celle de certaines catégories de surfaces à lignes de courbure planes dans un système.

Stouff. — Sur une généralisation de la formule de l'aire du triangle sphérique. (303-304).

Toulon. — Résistance des poutres droites à travées solidaires sur appuis élastiques. (304-306).

Le Roy. — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles

linéaires et du second ordre à caractéristiques imaginaires. (367-369).

Soit l'équation

$$\Delta u + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + cU = 0,$$

où a, b, c sont trois fonctions continues données.

M. Le Roy montre comment on peut former une intégrale continue à l'intérieur d'un certain contour et prenant sur ce contour une suite de valeurs données. La méthode employée est susceptible de s'appliquer encore si le problème est posé dans l'espace. Si la fonction c est toujours négative ou nulle, ce problème ne comporte qu'une solution.

Bougaïef. — Sur le théorème de Taylor avec l'approximation du troisième degré. (369-370).

Miller. — Sur les groupes de substitutions. (370-372).

L'auteur, à l'encontre de M. Levavasseur, confirme ce résultat, dû à MM. Young et Hölder, qu'il existe 14 groupes d'ordre 16.

Examinant tous les groupes possibles d'ordre 16, M. Miller a trouvé que 14 seulement sont distincts et qu'en outre chacun d'eux contient un sous-groupe commutatif d'ordre 8.

Plus généralement, tout groupe dont l'ordre est p^{α} (p étant un nombre premier quelconque) contient un sous-groupe commutatif d'ordre p^3.

En étudiant tous les groupes possibles d'ordre 32, M. Miller a trouvé, contrairement à l'assertion de M. Levavasseur, que 51 seulement sont distincts, 7 sont commutatifs, 37 autres contiennent un sous-groupe commutatif d'ordre 16, et les 7 derniers ne contiennent aucun sous-groupe commutatif d'ordre supérieur à 8.

M. Miller communique un tableau donnant le nombre des groupes réguliers pour tous les ordres jusqu'à 36.

Enfin il a déterminé tous les groupes transitifs que l'on peut former avec 12 éléments : le nombre total est 295.

Picard (Ém.). — Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques imaginaires. (417-420).

Poincaré. — Sur la divergence des séries de la Mécanique céleste. (497-499).

M. Hill ayant publié dans le *Bulletin of the American mathematical Society* une Note intitulée : *On the convergence of the series used in the subject of perturbations,* et dont les résultats semblent au premier abord contradictoires avec ceux qu'avait obtenus M. Poincaré, celui-ci montre que la contradiction n'est qu'apparente. Le principal théorème de M. Hill avait même été démontré antérieurement par M. Poincaré.

Levavasseur. — Sur les groupes d'opérations. (516-517).

Énumération des groupes $8p$, p étant un nombre premier impair. Il y a bien 15 groupes d'ordre 24, comme l'annonce M. Miller.

Poincaré. — Sur la divergence des séries trigonométriques. (558-559).

Gyldén (H.). — Remarques ultérieures à ma dernière Communication à M. Hermite. (585-588).

L'auteur rectifie une erreur de calcul qui s'était glissée dans sa Note précédente, et ajoute à cette Note quelques remarques complémentaires.

Goursat. — Sur les lignes asymptotiques. (593-595).

On connaît les formules de M. Lelieuvre qui donnent les coordonnées d'un point d'une surface rapportée à ses lignes asymptotiques : α, β désignant les paramètres qui définissent les deux systèmes de lignes asymptotiques et θ_1, θ_2, θ_3 étant trois intégrales particulières d'une équation linéaire à invariants égaux

$$(1)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \lambda(\alpha, \beta)\theta,$$

on a

$$x = \int\left(\theta_2\frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha} - \theta_3\frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}\right)d\alpha - \left(\theta_2\frac{\partial\theta_3}{\partial\beta} - \theta_3\frac{\partial\theta_2}{\partial\beta}\right)d\beta,$$

$$y = \int\left(\theta_3\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha} - \theta_1\frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha}\right)d\alpha - \left(\theta_3\frac{\partial\theta_1}{\partial\beta} - \theta_1\frac{\partial\theta_3}{\partial\beta}\right)d\beta,$$

$$z = \int\left(\theta_1\frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha} - \theta_2\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}\right)d\alpha - \left(\theta_1\frac{\partial\theta_2}{\partial\beta} - \theta_2\frac{\partial\theta_1}{\partial\beta}\right)d\beta.$$

M. Goursat signale un nombre illimité de cas où l'on peut faire disparaître les signes de quadrature. Ceci a lieu lorsque la suite de Laplace relative à l'équation (1) se termine après un certain nombre d'opérations, en sorte que l'intégrale générale de cette équation contienne explicitement une fonction arbitraire de α, une fonction arbitraire de β et leurs dérivées jusqu'à un ordre déterminé. Les trois intégrales θ_1, θ_2, θ_3 contiennent chacune deux fonctions arbitraires, et l'on peut mettre ces fonctions arbitraires sous une forme telle que toutes les quadratures qui donnent x, y, z puissent être effectuées. On aura donc ainsi sous forme explicite les coordonnées d'une infinité de surfaces, rapportées à leurs lignes asymptotiques.

Painlevé. — Sur les fonctions uniformes définies par l'inversion de différentielles totales. (660-662).

L'auteur étudie les fonctions uniformes x, y de deux variables u, v définies

par l'inversion de deux différentielles totales

$$(1)\qquad \begin{cases} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = du, \\ P_1(x, y)\,dx + Q_1(x, y)\,dy = dv, \end{cases}$$

où P, P_1, Q, Q_1 sont algébriques en x, y. On peut toujours introduire une variable z liée à x, y par la relation algébrique

$$(2)\qquad S(x, y, z) = 0,$$

telle que P, P_1, Q, Q_1 s'expriment rationnellement en x, y, z et qu'inversement à un système de valeurs x, y, P, P_1, Q, Q_1 ne corresponde qu'une valeur de z. Dans ces conditions, z est une fonction uniforme de u, v en même temps que de x, y.

Soient maintenant x_0, y_0, z_0 les valeurs de x, y, z pour $u = 0$, $v = 0$; l'intégrale générale de (1), supposée uniforme,

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \varphi(u, v, x_0, y_0, z_0), \\ y = \psi(u, v, x_0, y_0, z_0), \\ z = \chi(u, v, x_0, y_0, z_0), \end{cases}$$

définit une transformation biuniforme à deux paramètres u, v de la surface S en elle-même. Deux cas généraux sont à distinguer, suivant que cette transformation est ou non birationnelle. Dans les deux cas, le nombre des périodes du couple d'intégrales abéliennes $u = \int P\,dx + Q\,dy$, $v = \int P_1\,dx + Q_1\,dy$ ne peut dépasser 4.

Premier cas. — La transformation (3) est birationnelle; x, y, z sont des fonctions abéliennes de u, v ou des dégénérescences.

Second cas. — La transformation (3) est simplement biuniforme; x, y, z s'expriment algébriquement en fonction d'une des combinaisons suivantes :

1° $$u,\quad e^{v+R(u)};$$

2° $$u,\quad p\left[v + \frac{\omega}{2i\pi}\log R(u) + \frac{\omega'}{2i\pi}\log R_1(u) + R_2(u)\right]$$

[les R désignant des fractions rationnelles et ω, ω' les périodes de $p(u)$];

3° et 4° (Se déduisent de 1°, 2° en changeant u en e^u);

5° $$p(u),\quad e^v\frac{\sigma(c-u)}{\sigma(u)}e^{\rho(u)+h\frac{\sigma'}{\sigma}(u)};$$

6° $$p(u),\quad p_1[v + j(u)].$$

Les cas énumérés sont les seuls où l'inversion des différentielles totales (1) conduise à des fonctions uniformes.

M. Painlevé fait remarquer qu'on n'avait pas signalé jusqu'à présent de différentielles totales

$$u = \int P\,dx + Q\,dy, \qquad v = \int P_1\,dx + Q_1\,dy$$

à quatre périodes dont l'inversion donnât des fonctions uniformes non méromorphes.

Mannheim. — Propriété nouvelle de la surface de l'onde. (708-711).

La droite qui joint un point m de la surface de l'onde au pied u de la perpendiculaire abaissée du centre o de cette surface sur son plan tangent en m rencontre l'un des plans principaux de la surface de l'onde en un point r; si e est le pied de la perpendiculaire abaissée de m sur la droite or, on a, quel que soit m,

$$oe \times or = \text{const.}$$

Cette constante est le carré du rayon du cercle de la surface de l'onde situé dans le plan principal considéré.

M. Mannheim indique quelques conséquences de ce théorème général, celle-ci entre autres :

Les pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'une surface de l'onde sur les plans tangents à cette surface en un de ses points coniques appartiennent à une circonférence de cercle.

Enfin le théorème nouveau trouve son application dans la solution de ce problème : déterminer les axes d'une surface d'onde, connaissant les plans principaux de cette surface, un de ses points et son plan tangent en ce point.

Levavasseur. — Sur les groupes d'opérations. (711-713).

Painlevé. — Sur l'inversion des systèmes de différentielles totales. (769-772).

L'auteur indique d'importantes propositions générales relatives à l'inversion d'un système de différentielles totales

$$(1)\quad \begin{cases} J_1(x_1, \ldots, x_n) = \int P_{1,1}\, dx_1 + \ldots + P_{n,1}\, dx_n = u_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ J_n(x_1, \ldots, x_n) = \int P_{1,n}\, dx_1 + \ldots + P_{n,n}\, dx_n = u_n, \end{cases}$$

où les P_{ij} sont des fonctions algébriques de $x_1, \ldots, x_n$ dont le déterminant n'est pas identiquement nul.

Après avoir énoncé quelques théorèmes plus ou moins explicitement connus, mais qu'il démontre d'une manière entièrement nouvelle et directe, il arrive à l'objet principal de sa Communication :

Les intégrales $J_1, \ldots, J_n$ étant quelconques, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions $x_1, \ldots, x_n$ de $u_1, \ldots, u_n$, définies par (1), admettent un théorème d'addition?

Ces conditions s'énoncent ainsi :

« Il faut et il suffit : 1° que les intégrales J n'aient que $2k$ périodes non polaires distinctes ($k \leq n$) et l périodes polaires distinctes ($l \leq n - k$); 2° que (moyennant un changement linéaire convenable effectué sur $u_1, \ldots, u_n$) les k

premières intégrales J soient de première espèce et que les $(n-k)$ dernières n'aient chacune qu'une période polaire distincte au plus. »

Étant donné un système (1), on peut toujours reconnaître, à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques, si l'intégrale $x_1(u_1, \ldots, u_n)$, ..., $x_n(u_1, \ldots, u_n)$ n'a qu'un nombre *donné* q de branches et dépend algébriquement des constantes.

Les fonctions $x_1, \ldots, x_n$ de $u_1, \ldots, u_n$ peuvent d'ailleurs n'admettre qu'un nombre *fini* de détermination et renfermer les constantes $x^0, \ldots, x_n^0$ sous forme transcendante.

M. Painlevé fait connaître des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi. On peut d'ailleurs reconnaître algébriquement si un système (1) donné rentre dans la catégorie considérée, le nombre q des branches des fonctions $x_1, \ldots, x_n$ étant donné.

Il est plus que probable que les systèmes énumérés par l'auteur épuisent les systèmes (1) dont l'intégrale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n'a qu'un nombre limité de branches.

Delassus. — Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles. (772-775).

Borel. — Applications de la théorie des séries divergentes sommables. (807-809).

L'auteur a indiqué précédemment comment on peut, dans des cas très étendus, faire correspondre à une série divergente numérique un nombre qu'il a appelé *somme de la série* et qui peut être calculé avec telle approximation que l'on veut lorsque la série est donnée. Une fonction entière, en partie arbitraire, que M. Borel a appelée $\varphi(a)$, joue un rôle important dans ces recherches, mais, sauf des cas exceptionnels, la valeur de la somme ne dépend pas du choix de $\varphi(a)$.

Le but de M. Borel est actuellement d'indiquer quelques applications nouvelles des résultats acquis dans cette théorie. Ces applications lui ont été suggérées par la lecture du Mémoire de Stieltjes *sur les fractions continues.*

Stieltjes réduit en fraction continue convergente la série de M. Poincaré :

$$\varphi(\omega, \mu) = 1 + \frac{\omega}{1+\mu} + \frac{\omega^2}{1+2\mu} + \frac{\omega^3}{1+3\mu} + \ldots,$$

ou plutôt son développement divergent suivant les puissances de μ

$$\varphi(\omega, \mu) = A_0 + A_1\mu + A_2\mu^2 \ \ldots.$$

M. Borel montre que cette série divergente est sommable, si l'on prend $\varphi(a) = e^{\sqrt{a}} + e^{-\sqrt{a}}$ dans un domaine auquel appartiennent toutes les valeurs réelles et positives de μ.

Un résultat analogue peut être énoncé pour la série de Stirling. Ces exemples, et d'autres semblables, montrent que les séries divergentes sommables peuvent être aussi utiles dans les calculs numériques que dans les recherches théoriques.

Féraud. — Sur la valeur approchée des coefficients des termes d'ordre élevé dans le développement de la partie principale de la fonction perturbatrice. (871-874).

Painlevé. — Sur les transformations biuniformes des surfaces algébriques. (874-875).

Contrairement aux courbes algébriques, les surfaces algébriques peuvent admettre des transformations biuniformes en elles-mêmes, qui ne soient pas birationnelles.

M. Painlevé montre que toute transformation simplement biuniforme transforme une intégrale double algébrique de première espèce en une intégrale double de même espèce. La surface S et sa transformée s sont donc nécessairement de même genre p. Au contraire, une transformation birationnelle ne conserve pas nécessairement les différentielles totales de première espèce.

D'après cela, si la correspondance S et s est biuniforme sans être birationnelle, la surface S rentre (pour $p > 1$) dans la classe des surfaces coupées par leurs adjointes de degré $(m - 4)$ suivant des courbes de genre 1 (m étant le degré de la surface).

De plus, pour $p > 1$, la correspondance biuniforme transforme un faisceau de courbes algébriques S en un faisceau algébrique de s.

Il y a donc à distinguer deux classes de transformations biuniformes : les *transformations semi-transcendantes*, qui laissent algébrique une courbe algébrique dépendant d'un paramètre, et les *transformations biuniformes quelconques*.

1° *Transformations semi-transcendantes.* — Pour qu'une surface s admette un faisceau continu de transformations biuniformes en elle-même, il faut et il suffit qu'elle corresponde birationnellement soit à un cylindre, soit à une surface coupée par tout plan $x =$ const. suivant des courbes du genre 1. M. Painlevé fait connaître les formes canoniques auxquelles sont réductibles algébriquement toutes ces transformations.

2° *Transformations biuniformes quelconques.* — De ces transformations qui ne peuvent se présenter que pour $p > 1$, l'auteur indique deux types généraux.

Les résultats obtenus par M. Painlevé ont d'importantes conséquences pour la théorie des équations différentielles. Soit, par exemple,

$$S(y'', y', y, \bar{x}) = 0$$

une équation algébrique en y'', y', y et de genre $p > 1$.

Si l'intégrale générale d'une telle équation a ses points critiques et essentiels fixes, elle se ramène algébriquement à la fonction $\operatorname{sn}[J(x) + C]$, $J(x)$ désignant l'intégrale d'une fonction $\varphi(x, C')$ qui dépend algébriquement des coefficients de S et de la constante C'. Quand x ne figure pas explicitement dans l'équation S, le théorème est encore vrai pour $p = 1$.

Joukovsky. — A propos d'une Communication de M. R. Liouville sur la rotation des solides. (915-916).

Dans une Note insérée aux *Comptes rendus* (t. CXX, p. 903); 1895, M. R. Liouville examine le cas de la rotation d'un solide autour d'un point fixe dans le cas où

$$\beta = 0, \qquad A(B-C)\alpha^2 = C(A-B)\gamma^2, \qquad A > B > C,$$

qui admet l'intégrale algébrique particulière

$$A\alpha p + C\gamma r = 0.$$

M. Joukovsky fait remarquer que ce cas a déjà été l'objet de recherches de la part de MM. Hess, Nekrassov, Mlodzieiowski et de lui-même.

Hamy. — Sur le développement approché de la fonction perturbatrice dans le cas des inégalités d'un ordre élevé. (980-983).

Hadamard. — Une propriété des mouvements sur une surface. (981-983).

Sur une surface fermée quelconque, parcourue par un mobile sous l'action de forces quelconques, il existe toujours une région R assignable *a priori*, où toute trajectoire du mobile doit nécessairement passer. (Ainsi toutes les trajectoires possibles d'un point pesant sur une sphère pénètrent dans l'hémisphère inférieur.)

Un point où la fonction des forces est minimum n'appartient pas à la région R. Ceci démontre qu'un tel point est une position d'équilibre instable.

Dans le cas d'un point matériel libre dans l'espace, un maximum de U ne peut avoir lieu dans une région où les surfaces de niveau tournent leur convexité dans le sens de la force. On en déduit diverses conséquences, par exemple :

Une position d'équilibre où la fonction des forces admet un minimum est instable.

Si les surfaces de niveau sont partout à courbure positive et tournent leur convexité dans le sens de la force, les trajectoires s'éloignent indéfiniment.

Autonne. — Sur les substitutions régulières non linéaires. (1043-1045).

Dans son Mémoire : *Sur la théorie des équations différentielles du premier ordre et du premier degré* (*Journal de l'École Polytechnique*, LXIe et LXIIe cahiers), M. Autonne a introduit les substitutions *régulières* dans l'espace, qui ont la double propriété d'être birationnelles et admettre un invariant différentiel D dont l'évanouissement identique caractérise les courbes intégrantes. Ayant, dans ce Mémoire, construit les régulières linéaires, l'auteur passe maintenant aux non linéaires. L'intérêt du problème tient à ce que les régulières ne sont autres que les transformations birationnelles planes de contact dont le rôle est si important dans la théorie des équations différentielles du premier ordre.

Les recherches de M. Autonne constituent (sauf les conditions complémen-

taires qu'entraîne l'existence de D) la généralisation de l'étude que M. Nœther a consacrée à la birationnalité de l'espace (*Math. Ann.*, t. III).

Borel. — Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Picard sur les fonctions entières. (1045-1047).

M. Borel est parvenu à trouver une démonstration directe du célèbre théorème de M. Picard d'après lequel une fonction entière ne devenant pas égale ni à a, ni à b se réduit nécessairement à une constante.

La question se ramène à prouver l'impossibilité d'une relation de la forme

$$e^{G(z)} + e^{G_1(z)} = 1,$$

G, G_1 étant des fonctions entières.

Soit $M_1(r)$ le maximum de $|G(z)|$ pour $|z| = r$.

R désignant une quantité supérieure à r, ρ' une quantité moindre que $2r - R$, et K une constante comprise entre des limites finies, M. Borel parvient, par une remarquable analyse, à l'inégalité

$$M_1(R) < K^{\frac{(R-\rho')^2}{R^2}}[M_1(\rho')]^2.$$

Il suffit de faire successivement

$$\rho' = \lambda, \qquad R = \lambda + h,$$
$$\rho' = \lambda + h, \qquad R = \lambda + h + \frac{h}{2},$$
$$\rho' = \lambda + h + \frac{h}{2}, \qquad R = \lambda + h + \frac{h}{2} + \frac{h}{4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

pour constater que, si $M_1(\lambda)$ est assez grand et h convenablement choisi, $M_1(\lambda + 2h)$ dépasse toute quantité assignable; le rayon de convergence de $G_1(z)$ serait donc au plus égal à $\lambda + 2h$.

Picard (Ém.). — Remarques sur la Communication de M. Borel. (1048).

Liouville (R.). — Sur la rotation des solides et le principe de Maxwell. (1050-1051).

Il est remarquable que, malgré l'existence d'une équation invariante algébrique quand les deux conditions

$$\beta = 0, \qquad A(B - C)\alpha^2 + C(A - B)\gamma^2$$

sont satisfaites, il n'existe aucune intégrale uniforme différente des trois intégrales communes à tous les cas.

Cette question de Mécanique met en défaut le principe de Maxwell. Car si l'on choisit les données initiales du mouvement, de façon que l'équation invariante

$$A\alpha p + C\gamma r = 0$$

soit vérifiée, l'expression $A\alpha p + C\gamma r$ devrait, si le principe de Maxwell était exact, pouvoir approcher d'une valeur donnée arbitrairement, ce qui est manifestement impossible.

Kœnigs. — Sur les solutions périodiques du problème du mouvement d'un corps pesant quelconque suspendu par un de ses points. (1048-1049).

En appliquant les méthodes de M. Poincaré au problème du mouvement d'un corps pesant quelconque suspendu par un de ses points, M. Kœnigs démontre rigoureusement l'existence d'une infinité de solutions périodiques de ce problème, lorsque le point de suspension est suffisamment voisin du centre de gravité.

Andrade. — Sur les droites de contact des courbes gauches et sur une famille de courbes gauches. (1110-1113).

Étant donnée une courbe gauche, comment se groupent les droites qui, liées invariablement au trièdre fondamental, sont capables d'engendrer une surface développable?

Un premier groupe de ces *droites de contact* est évidemment commun à toutes les courbes gauches ayant même tangente : c'est le groupe des parallèles à cette tangente situées dans le plan rectifiant. M. Andrade montre que ce groupe de droites de contact est le seul qui puisse appartenir à toutes les courbes gauches, et il indique les familles de courbes qui peuvent admettre d'autres groupes spéciaux de droites de contact.

Schoute. — L'aire des paraboles d'ordre supérieur. (1113-1115).

Korkine. — Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre. (1183-1185).

L'auteur considère une équation différentielle

$$M(y)\,dx + N(y)\,dy = 0, \tag{1}$$

où $M(y)$ et $N(y)$ sont deux fonctions entières de y dont les coefficients sont des fonctions quelconques de x. On suppose que $M(y)$ et $N(y)$ n'aient pas de facteurs communs qui soient des fonctions entières de y, que le degré de $M(y)$ ne surpasse pas celui de $N(y)$, et que l'équation $N(y) = 0$ n'ait pas de racines multiples en y.

M. Korkine enseigne à former toutes les équations (1) dont l'intégrale générale est de la forme

$$(y - v_1)^{m_1}(y - v_2)^{m_2}\ldots(y - v_n)^{m_n} = C,$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont des constantes données, n un entier donné, C une constante arbitraire, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des fonctions de x à déterminer.

Mayor. — Sur les forces de l'espace et les conditions d'équilibre d'une classe de systèmes déformables. (1185-1188).

Exposition de remarques qui conduisent à une notion comprenant comme cas particulier celle de polygone funiculaire d'un système de forces situées dans un plan.

Lecornu. — Sur un mode nouveau de régulation des moteurs. (1188-1191).

Les régulateurs à force centrifuge sont paresseux au démarrage et enclins à des oscillations nuisibles, défaut qui s'opposent à la réalisation pratique de l'isochronisme.

Faisant appel à un principe tout différent, M. Lecornu reprend une idée qui consiste à synchroniser les mouvements de la machine avec ceux d'un mécanisme indépendant tournant à une vitesse constante ω_1. Un procédé essayé sans succès consiste à commander la valve de réglage par une vis sans fin tournant avec une vitesse proportionnelle à $\omega - \omega_1$, ω étant proportionnel à la vitesse du volant. La théorie montre qu'alors la tendance au mouvement oscillatoire n'est nullement atténuée.

Mais, modifiant le dispositif, qu'on imagine deux axes situés dans un même plan vertical et faisant entre eux un petit angle i. Ces axes tournent en sens contraire avec les vitesses ω et ω_1. Le premier, horizontal, porte une vis le long de laquelle se meut un écrou pratiqué au centre d'un disque mince vertical D, qui touche la génératrice supérieure, horizontale, d'un tambour en tronc de cône calé sur le second axe. Le rayon ρ du disque est égal au rayon moyen du tambour, et, à l'état normal de régime, le contact a lieu sur le parallèle moyen. Dès lors, le disque, entraîné par le tambour, tourne avec la vitesse ω_1, et si la condition $\omega = \omega_1$ est remplie, la vis et l'écrou, animés de la même vitesse angulaire, ne prennent aucun déplacement relatif. Mais si ω vient à varier d'une manière continue, le disque se meut horizontalement et, au bout du temps t, son point de contact avec le tambour se trouve déplacé d'une longueur x.

D'autre part, on peut faire en sorte que le déplacement x du disque produise à chaque instant une réduction du moment moteur sensible égale à λx, λ étant une constante. Si C est la réduction constante du moment résistant qui caractérise la perturbation, l'analyse montre que ω tend asymptotiquement et sans trace d'oscillations vers la valeur limite

$$\omega = \omega_1\left(1 + \frac{C \sin i}{\lambda\rho}\right),$$

valeur qui sera pratiquement atteinte au bout d'un temps très court.

Léauté. — Remarques au sujet de la Note précédente. (1191).

Tout en rendant justice à l'ingéniosité de l'appareil imaginé par M. Lecornu, M. Léauté émet quelques doutes sur sa valeur pratique; d'abord la liaison par entraînement est loin d'être certaine; ensuite les variations périodiques de la vitesse pourront dans certains cas avoir des effets sensibles.

Hadamard. — Sur les fonctions entières. (1257-1258).

Faisant allusion à la récente Communication de M. Borel, l'auteur regarde comme assez probable que la démonstration directe du théorème de M. Picard sur les fonctions entières, pris sous sa forme générale, une fois trouvée, s'étend au cas d'une fonction douée d'un point essentiel. En fait, la démonstration précédemment donnée par M. Hadamard s'applique à ce cas nouveau sans modification notable, moyennant une restriction toute semblable à celle qui intervient pour les fonctions entières.

Goursat. — Sur les systèmes en involution d'équations du second ordre. (1258-1260).

Deux équations du second ordre à deux variables x et y et à une seule fonction inconnue z forment un *système en involution* si les quatre équations que l'on obtient en prenant les dérivées par rapport à x et par rapport à y se réduisent à trois équations distinctes.

M. Goursat examine d'abord les systèmes en involution linéaires par rapport aux dérivées du second ordre.

Si $F(x, y, z, a, b, c) = 0$ est une intégrale d'un pareil système dépendant de trois paramètres a, b, c, l'intégrale générale est représentée par le système de deux équations

$$(1)\quad \begin{cases} F[x, y, z, f(\alpha), \varphi(\alpha), \psi(\alpha)] = 0, \\ \dfrac{dF}{df(\alpha)} f'(\alpha) + \dfrac{dF}{d\varphi(\alpha)} \varphi'(\alpha) + \dfrac{dF}{d\psi(\alpha)} \psi'(\alpha) = 0, \end{cases}$$

$f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ étant trois fonctions d'un paramètre α qui doivent satisfaire à une relation déterminée en f, φ, ψ, f', φ', ψ' et homogène par rapport à ces trois dernières quantités.

Les formules (1) ne renfermeront plus, lorsqu'on aura remplacé f, φ, ψ par leurs expressions, qu'une fonction arbitraire et ses dérivées en nombre fini.

L'auteur termine sa Note par l'intégration des systèmes en involution non linéaires.

Petrovitch. — Sur une équation différentielle du premier ordre. (1261-1263).

Picart (L.). — Sur la rotation d'un corps variable. (1264-1265).

Les équations qui définissent la rotation des axes principaux d'un corps variable peuvent s'écrire sous la forme donnée par Liouville

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr + p\frac{dA}{dt} + q\gamma - r\beta + \frac{d\alpha}{dt} = 0, \qquad \dots$$

Se plaçant dans le cas d'une déformation très petite et cherchant si l'axe de rotation peut tourner périodiquement autour de l'axe Oz en restant dans le

voisinage de cette droite. M. L. Picart pose

$$A = A_1 + \lambda A_2, \qquad B = B_1 + \mu B_2, \qquad C = C_1 + \mu C_2,$$
$$\alpha = \mu\alpha', \qquad \beta = \mu\beta', \qquad \gamma = \mu\gamma'.$$

En appliquant la méthode de M. Poincaré (*Les nouvelles methodes de la Mécanique céleste*, t. I, p. 156), on trouve que, pour qu'il existe, lorsque μ est très petit, une solution périodique voisine de la solution $p = q = 0$, $r = n$ correspondant à $\mu = 0$, il est nécessaire que l'équation

$$S\left[S - \frac{n^2(C_1 - A_1)(C_1 - B_1)}{A_1 B_1}\right] = 0$$

admette des racines imaginaires. On aura dans ce cas, pour la durée T de la période

$$T = \frac{2\pi}{n}\sqrt{\frac{A_1 B_1}{(C_1 - A_1)(C_1 - B_1)}}.$$

Si l'on applique ce résultat à la rotation de la Terre, on voit que la seule période exacte qui puisse exister dans la variation du pôle à la surface du globe est la période dite *eulérienne*.

Rateau. — Sur la théorie des turbines, pompes et ventilateurs. (1268-1269).

La théorie des turbines, pompes et ventilateurs centrifuges prend habituellement comme point de départ le théorème des forces vives, qui permet difficilement de tenir compte des pertes de charge par frottements, tourbillons et chocs du fluide à l'intérieur de la roue mobile. Il vaut mieux s'appuyer sur le théorème des quantités de mouvement qui s'applique aux machines avec toutes leurs imperfections, et qui conduit rapidement à une formule générale dont les formules données dans les Traités ne sont que des cas particuliers. Cette formule générale est la suivante :

$$M = m + \Sigma i(r_0 a_0 - r_1 a_1).$$

M est le couple moteur donné par l'appareil; m le moment des frottements de l'arbre dans ses guides et des joues de la turbine sur le fluide qui ne circule pas dans ses roues; i le débit pour un petit élément de la roue; r_0, r_1 les rayons au point d'entrée et au point de sortie dans la turbine; a_0, a_1 les projections sur les vitesses d'entraînement des vitesses absolues du fluide à l'entrée et à la sortie.

Boussinesq. — Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section (tuyaux de conduite et canaux découverts) quand cet écoulement s'est régularisé en un régime uniforme, c'est-à-dire moyennement pareil à travers toutes les sections normales du lit. (1289-1295).

Painlevé. — Sur les équations différentielles du premier ordre. (1319-1322).

A propos de la récente Communication de M. Korkine, M. Painlevé revient sur une question qu'il avait traitée antérieurement.

Étant donnée une équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(y, x)}{Q(y, x)}, \tag{1}$$

où P et Q sont des polynomes en y qui dépendent de x d'une manière quelconque, reconnaître si l'intégrale de cette équation peut s'écrire

$$h(x)[y - g_1(y)]^{\lambda_1}[y - g_2(x)]^{\lambda_2}\ldots[y - g_n(x)]^{\lambda_n} = C, \tag{2}$$

$h, g_1, \ldots, g_n$ désignant des fonctions inconnues de x, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des constantes inconnues, C la constante arbitraire, n un entier donné. On retombe sur le problème de M. Korkine quand on suppose que $h(x)$ est égal à 1 et que λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des quantités données toutes distinctes.

M. Painlevé rappelle la solution qu'il a donnée du problème général énoncé ci-dessus, ainsi que du problème inverse : former toutes les équations différentielles (1) dont les coefficients soient, par exemple, rationnels en x et dont l'intégrale se laisse mettre sous la forme (2).

Lecornu. — Sur la régulation des moteurs. (1322-1323).

Dans sa précédente Communication, l'auteur avait considéré uniquement l'effet d'une variation brusque du moment moteur représentée par une constante C. Il complète maintenant sa théorie en indiquant comment se comporte l'appareil lorsque la différence C, entre le moment moteur et le moment résistant, éprouve des variations quelconques. Si ce moment effectif passe par de petites variations périodiques, la présence du régulateur n'exagère, en aucun cas, l'importance des oscillations dues à ces petites oscillations. Il agit même pour les réduire, sauf dans un cas exceptionnel où son effet est nul.

Boussinesq. — Formules des pressions moyennes locales dans un fluide animé de mouvements tourbillonnants et tumultueux. (1369-1375).

Mannheim. — Sur les surfaces apsidales. (1396-1398).

Cette Note a pour objet de rectifier une erreur assez répandue sur les surfaces apsidales. On sait comment on construit ces surfaces : par un point fixe o on mène un plan normal à une surface donnée $[m]$ en un point m de cette surface. Dans ce plan, on élève du point o une perpendiculaire à om, et l'on porte sur cette droite le segment $om_1 = om$. Le point m_1 décrit une surface $[m_1]$ qui est l'apsidale de $[m]$.

Or, le point m pouvant être déduit de m_1 par la construction inverse, plusieurs auteurs ont cru pouvoir dire : si une surface A est l'apsidale de B, réciproquement B est l'apsidale de A. Ils oubliaient qu'il y a des points auxquels

correspondent des circonférences de cercle et que réciproquement les points de cette courbe ne donnent pas seulement l'unique point d'où ils provenaient.

On voit donc que, si A est l'apsidale de B, cette dernière surface n'est pas l'apsidale complète de A par rapport au même pôle.

Korteweg. — Sur le Théorème énoncé par M. P.-H. Schoute dans les *Comptes rendus* du 18 mai 1896. (1399).

M. Korteweg simplifie et rend moins abstraite la démonstration de ce théorème qui exprime que la formule

$$A = h(b_0 y_0 + \ldots + b_n y_n)$$

de l'aire d'une parabole d'ordre supérieur, obtenue pour $n = 2m$, est encore valable pour $n = 2m + 1$.

Maunoury. — Sur la Note de M. P.-H. Schoute intitulée : *L'aire des paraboles d'ordre supérieur*. (1399-1400).

Andrade. — Sur la méthode des moindres carrés. (1400-1403).

Dans les applications habituelles de la méthode des moindres carrés, on suppose que chaque équation renferme un seul argument mesuré par une observation directe. Grâce à cette hypothèse, le choix même des valeurs adoptées pour les paramètres, qui sont les inconnues principales du problème, définit l'erreur commise dans chaque observation. Mais cette hypothèse n'est pas conforme à la réalité des choses. Les problèmes naturels conduisent à des équations dont chacune contient au moins deux arguments; ces arguments, bien que liés par la loi même dont la vérification est soumise au calcul, n'en sont pas moins mesurables par des instruments indépendants.

Cette circonstance donne à la question un tout autre aspect.

Supposons, avec M. Andrade, que les équations qui doivent déterminer les n paramètres a, b, c soient de la forme

$$F(a, b, c;\ t_i) = N_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \qquad (p > n).$$

Chaque équation résulte ainsi de deux mesures simultanées t_i et N_i. Soient θ_i l'erreur de l'observation t_i et ν_i celle de l'observation N_i. Supposant *connues d'avance* la précision p des mesures t_i et la précision q des mesures N_i, on est conduit, en adoptant la loi de Gauss, à déterminer les quantités a, b, c, θ_i, ν_i, assujetties aux relations

$$F(a, b, c;\ t_i + \theta_i) = N_i + \nu_i,$$

par la condition que la somme

$$p \sum_i \theta_i^2 + q \sum \nu_i^2$$

soit minima.

M. Andrade déduit de là les formules qui donnent les inconnues et résolvent ce problème.

Boussinesq. — Expression du frottement extérieur dans l'écoulement tumultueux d'un fluide. (1445-1451).

De Jonquières. — Quelques propriétés des racines primitives des nombres premiers. (1451-1455).

I. Le produit d'un nombre pair de racines primitives n'est jamais une racine primitive de p; il appartient à l'exposant $\frac{p-1}{2}$ ou à l'un de ses diviseurs.

II. Le produit d'un nombre impair de racines primitives est lui-même une racine primitive, ou bien il appartient à l'un de ceux des diviseurs de $p-1$ qui ne divisent pas $\frac{p-1}{2}$.

Corollaire. — La puissance $(2n+1)^{\text{ième}}$ d'une racine primitive (ou son résidu) n'est jamais une racine primitive si $p-1$ est divisible par $2n+1$; mais elle l'est toujours si $2n+1$ ne divise pas $p-1$. Réciproquement, si a^{2n+1} est racine primitive, a l'est aussi.

Cornu (A.). — Sur la caustique d'un arc de courbe réfléchissant les rayons émis par un point lumineux. (1455-1461).

Les rayons issus d'un point lumineux P et réfléchis sur un arc infiniment petit MM' ont pour caustique G une conique située dans un plan normal au plan de l'élément et passant par le point lumineux; c'est la section plane du cône décrit par la révolution du rayon incident autour de la tangente; le plan de la section passe en outre par un point de la normale qui est la projection du pied de la normale au cône abaissée du centre de courbure.

La caustique (conique) ainsi déterminée convient à un arc fini quelconque de la courbe focale conjuguée de cette conique. Les deux coniques conjuguées définies ci-dessus sont géométriquement et optiquement réciproques.

La surface caustique est une portion de cyclide de Dupin.

Hadamard. — Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. (1470-1473).

On sait que la fonction $\zeta(s)$ ne s'annule pour aucune valeur de s ayant sa partie réelle supérieure à 1. Stieltjes avait montré que tous les zéros imaginaires de $\zeta(s)$ sont, conformément aux prévisions de Riemann, de la forme $\frac{1}{2}+ti$. Mais, sa démonstration n'ayant pas été publiée, M. Hadamard se contente de faire voir que $\zeta(s)$ ne peut avoir de zéro dont la partie réelle soit égale à 1.

De Jonquières. — Quelques propriétés des racines secondaires des nombres premiers. (1513-1517).

Appelant *racines secondaires* d'un nombre premier p les nombres qui, relativement à ce module, appartiennent à un même exposant l, diviseur de $p-1$.

l'auteur étend à ces racines les théorèmes qu'il avait établis dans sa dernière Communication.

I. Le produit d'un nombre pair de racines secondaires d'exposant impair i appartient soit à i, soit à l'un de ses diviseurs.

II. Le produit d'un nombre impair de racines secondaires d'exposant impair i appartient soit à i, soit à l'un de ses diviseurs.

III. Le produit de toutes les racines secondaires, quels que soient les exposants auxquels elles appartiennent, est $\equiv -1 \pmod{p}$.

IV. La somme de toutes les racines secondaires, sans distinction de l'exposant auquel elles appartiennent, est $\equiv 0$ ou à $\pm 1 \pmod{p}$, suivant que $p-1$ est divisible par un carré, égal au produit d'un nombre pair ou d'un nombre impair de facteurs inégaux.

V. Le produit de toutes les racines secondaires qui appartiennent à un seul et même exposant i est congru à $+1 \pmod{p}$.

Boussinesq. — Formules du coefficient des frottements intérieurs dans l'écoulement tumultueux graduellement varié des liquides. (1517-1523).

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXI.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXI; 1897. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.



TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXI.

24192 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.